Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences et Techniques
Errachidia
Département de Mathématiques.

Année Universitaire 2022/2023
Filière : LST Mathématiques
Appliquées S6
Module M 616

Analyse Fonctionnelle

Série N°3

Exercice 1 *Soit φ une forme hérmitienne définie positive sur E.*
Montrer que $\| x \| = \sqrt{\varphi(x,x)}$ définit une norme sur E.

Corrigé 1 ☐ *Soit $x \in E$, on a: $\|x\| = 0 \iff \varphi(x,x) = 0 \iff x = 0$, car φ est définie positive.*
☐ *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on a: $\|\lambda x\| = \sqrt{\varphi(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2 \varphi(x,x)} = |\lambda| \sqrt{\varphi(x,x)} = |\lambda| \|x\|, \ \forall x \in E$.*
☐ *Soient $x,\, y \in E$, on a: $\|x+y\|^2 = \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + 2Re(\varphi(x,y)) + \varphi(y,y)$.*
D'après l'inégalité de Cauchy Schwartz $|\varphi(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$
Or $Re(\varphi(x,y)) \leq \|\varphi(x,y)\| \leq \|x\|\|y\|$
Alors $\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$
Ce qui implique $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Donc il s'agit bien d'une norme.

Exercice 2 *Soit f une forme linéaire continue sur un sous espace M d'un espace de Hilbert H.*
Démontrer que f admet un prolongement unique en une forme linéaire continue sur H, conservant la norme et que ce prolongement est nul sur $M^{\perp}$.

Corrigé 2 *On a $f \in \mathcal{L}_c(M, \mathbb{K})$, d'après le théorème de Hahn–Banach, $\exists \tilde{f} \in \mathcal{L}_c(H, \mathbb{K})$ tel que $\tilde{f}/M = f$ et $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ avec H est un Hilbert.*
Soit $h = \tilde{f}/\bar{M}$, on a $h \in \mathcal{L}_c(\bar{M}, \mathbb{K})$. Alors d'après le théorème de représentation de Riez
$\exists\ a \in \bar{M}$ tel que $h(x) =< x, a >$ et $\|h\| = \|a\|$.
Si $x \in M$ on a: $h(x) = \tilde{f(x)} = f(x) =< x, a >$
ce qui implique $\|f\| \leq \|a\| = \|h\|$ et comme $\|h\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1, x \in \bar{M}} \|\tilde{f(x)}\| \leq \sup\limits_{\|x\| \leq 1, x \in H} \|\tilde{f(x)}\| = \|\tilde{f}\|$
Alors $\|\tilde{f}\| = \|f\| = \|h\|$.
On a : $\tilde{f} \in \mathcal{L}_c(H, \mathbb{K})$. Alors d'après le théorème de représentation de Riesz $\exists!\ b \in H$ tel que $\tilde{f}(x) =< x, b >$ $\forall x \in H$ et $\|\tilde{f}\| = \|b\|$.
D'où $\forall\, x \in \bar{M}$, on a: $\tilde{f(x)} = h(x) =< x, a >=< x, b > \implies < x, a - b >= 0$.
En particulier pour $x = a$ on a : $< a, b - a >= 0 \implies \|a\|^2 =< b, a >= \|b\|^2$.
On a $< b - a, b - a >= \|a\|^2 - 2 < a, b > + \|b\|^2 = 0 \implies a - b = 0 \implies a = b$
Soit que g est un autre prolongement de f sur H on a: $g/M = \tilde{f}/M \implies g/\bar{M} = \tilde{f}/\bar{M} = h$ (par continuité).
Alors d'après le théorème de représentation de Riez
$\exists\ b' \in H$ tel que $\forall x \in \bar{M}$ $g(x) =< x, b' >=< x, b > \implies < x, b' - b >= 0$
pour $x = b$ On a $< b, b - b' >= 0 \implies \|b\|^2 =< b, b' > \implies < b - b', b - b' >= 0 \implies b = b'$
D'où l'unicité de $\tilde{f}$ (le prolongement de f sur H) et $\|\tilde{f}\| = \|f\| = \|b\|$ $(b \in \bar{M})$

Soit $x \in M^{\perp}$ est-ce que $\tilde{f}(x) = 0$?
on a: $\tilde{f}(x) =< x, b >$ où $b \in \bar{M}$.
Alors $\exists\, b_n \in M$ tq $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} b_n = b$, ce qui implique :
$\tilde{f}(x) =< x, b >=< x, \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} b_n >= \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} < x, b_n >= 0$. *D'où $\tilde{f}(x) = 0$.*

Exercice 3 *Vérifier que $l^2(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n\in I} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ est un Hilbert (muni du produit scalaire) $< (x_n), (y_n) >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.*

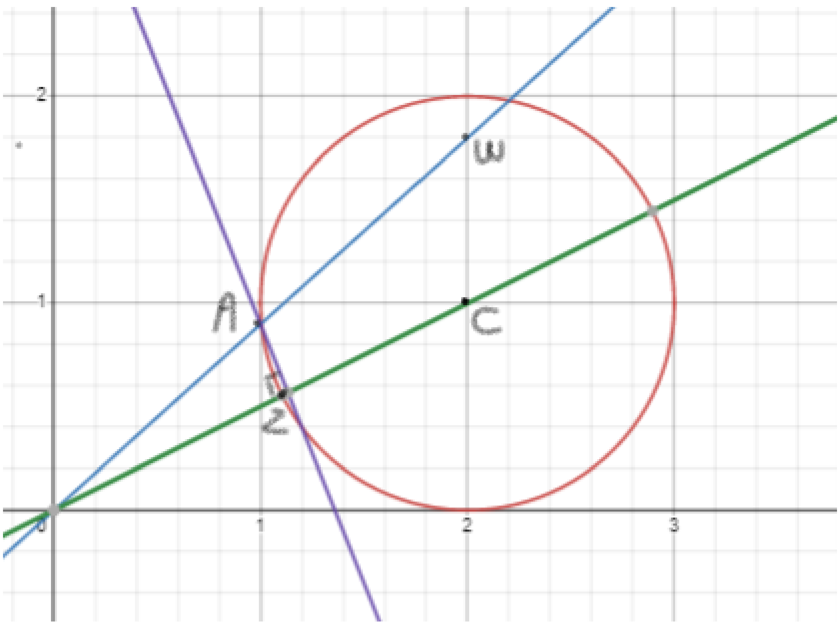
Corrigé 3 *Soit $(x^m)_m$ une suite de Cauchy de $l^2(\mathbb{N})$ c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, m_0 \in \mathbb{N}\, |\forall p, q \geq m_0$ on a: $\|x^p - x^q\| \leq \varepsilon \implies \forall \epsilon > 0\, \exists\, m_0 \in \mathbb{N}\, |\, \forall p, q \geq m_0$, on a : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \|x_n^p - x_n^q\|^2 \leq \varepsilon \implies \forall \varepsilon > 0\, \exists\, m_0 \in \mathbb{N}\, \forall p, q \geq m_0\, \forall n\ \|x_n^p - x_n^q\|^2 \leq \varepsilon$*
$\implies \forall n \geq 0\ (x_n^p)_p$ *est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ Complet, donc convergent vers y_n.*
$\forall \epsilon > 0\, \exists\, m_0\ \in \mathbb{N}\, \forall p, q \geq m_0\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \|x_n^p - x_n^q\|^2 \leq \epsilon.$

$\implies \forall \epsilon > 0\, \exists\, m_0\ \in \mathbb{N}\, \forall p, q \geq m_0 \sum\limits_{n=0}^{N} \|x_n^p - x_n^q\|^2 \leq \epsilon.$
Pour $q \longrightarrow +\infty$ et d'après la continuité de module (norme), on a:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, m_0\, \forall p, q \geq m_0\ \sum\limits_{n=1}^{N} \|x_n^p - y_n\|^2 \leq \epsilon$

Pour $y = (y_n)_n$, on a $x^p - y \in l^2$ $\|x^p - y\| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \|x_n^p - y\|^2 \leq \varepsilon$. D'où $y \in l^2$ $(l^2 e.v)$, et $\forall \epsilon > 0\, \exists\, m_0 \in \mathbb{N}\, |\, \forall p \geq m_0$, on a: $\|x^p - y\| \leq \varepsilon$. Ce qui implique $\lim\limits_{p \longrightarrow +\infty} x^p = y$.
D'où $l^2(\mathbb{N})$ est un Hilbert.

Exercice 4 *a) Soit D le disque fermé de $\mathbb{R}^2$ de centre $(2, 1)$ et de rayon 1.*
Déterminer $Z \in D$ tel que $\| Z \| \leq \| W \|, \forall W \in D$.
b) Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soient $a = (0, 0, 2)$, $b = (3, 1, -1)$, et $C = (0, 2, 1)$.
Déterminer $Z \in F = vect(b, c)$ tel que $\| a - Z \| \leq \| a - W \|, \forall W \in F$.

Corrigé 4 *a) Déterminons $Z \in D$ tel que $\|Z\| \leq \|W\|, \forall W \in D$.*



$[0,c]=\{tc|\, t\in[0,1]\}$

Soit z le point d'intersection de $[0,c]$ avec le cercle $C(c,1)$

Soit T la tangente au cercle au point Z et $w\in D$.

Soit A Le point d'intersection du segment $[0,w]$ et la tangente T.

★ *Si $w\notin(0,c)$.*

On a $d(0,A)\geq d(0,Z)$ car ((OZA) est un triangle rectangle en Z) $d(0,A)\leq d(0,w) \implies d(0,Z)\leq d(0,w) \implies \|Z\|\leq\|w\|$.

★ *Si $w\in(0,c)$, alors $A=Z$ et $\|Z\|\leq\|w\|$.*

On a Z le point qui vérifie $\|Z\|\leq\|w\|, \forall w\in D$. $\inf\limits_{w\in D}\|w\|$ est atteint car (D est un compacte) c'est-à-dire $\exists Z\in D$ tel que $\|Z\|=\inf\limits_{w\in D}\|w\|$. Alors $Z\in[0,c] \implies Z=t(2,1)=(2t,t)$ et $Z\in C((2,1),1) \implies (2t-2)^2+(t-1)^2=1 \implies 5t^2-10t+4=0$

Donc $\Delta=20, t=\frac{10\pm\sqrt{20}}{10}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}\pm1}{\sqrt{5}} \implies t=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}=1-\frac{1}{\sqrt{5}} \implies Z=(1-\frac{1}{\sqrt{5}})(2,1)$

b) Déterminons $Z\in F=\ vect(b,c)$ tel que $\|a-Z\|\leq\|a-W\|,\ \forall W\in F$.

On a $P_F(a)$ existe car F est un fermé de $\mathbb{R}^3$ qui est un Hilbert

$\implies \|a-P_F(a)\|\leq\|a-w\|\ ,\forall w\in Z \implies Z=P_F(a)$ *, Soit $Z=(\alpha,\beta,\gamma)$.*

On a : $a-P_F(a)\perp F \implies <a-P_F(a),b>=<a-P_F(a),c>=0$, et on a : $Z=P_F(a)\in F$, donc $det(Z,b,c)=0$,

On a : $a-Z\begin{vmatrix}-\alpha\\-\beta\\2-\gamma\end{vmatrix}$, $b\begin{vmatrix}3\\1\\-1\end{vmatrix}$, $c\begin{vmatrix}0\\2\\1\end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix}\alpha & 3 & 0\\ \beta & 1 & 2\\ \gamma & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha & 3 & 0\\ \beta-2\gamma & 3 & 0\\ \gamma & -1 & 1\end{vmatrix}=3\alpha-3\beta+6\gamma$$

$$\implies \begin{cases}-3\alpha-\beta+\gamma-2=0\\ -2\beta+2-\gamma=0\\ 3\alpha-3\beta+6\gamma=0\end{cases} \implies \begin{cases}-3\alpha-3\beta=0=0\\ -2\beta+2-\gamma=0\\ 3\alpha-3\beta+6\gamma=0\end{cases} \implies \begin{cases}\alpha=-\frac{2}{3}\\ \beta=\frac{2}{3}\\ \gamma=\frac{2}{3}\end{cases}$$

Exercice 5 *Soient E e.v.n et $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille sommable.*

1) Montrer que $\forall\epsilon>0, \exists I'$ fini $\subset I$ t.q.

$\forall\alpha\in I$ et $\alpha\notin I'$, $\parallel x_\alpha\parallel\leq\epsilon$.

2) $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ ne peut contenir plus d'une infinité dénombrable d'éléments non nuls.

3) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ est telle que : $\sum_{\alpha\in I'}\parallel x_\alpha\parallel< M\ \ \forall I'$ fini $\subset I$ alors,

$\sum_{\alpha\in I}\parallel x_\alpha\parallel=\sup\limits_{\substack{I'\, fini\\ \subset I}}(\sum_{\alpha\in I}\parallel x_\alpha\parallel)$ existe.

utiliser la caractérisation du "$\sup$")

Corrigé 5 *1) Montrons que $\forall\varepsilon>0, \exists\, I'$ fini $\subset I$ tel que $\forall\alpha\in I$ et $\alpha\notin I'$, $\|x_\alpha\|\leq\varepsilon$.*

On a : $\forall\varepsilon>0$, $\exists J_0$ fini ($J_0\subset I$) tel que pour tout J fini de I ($J_0\subset J$), $\|\sum\limits_{\alpha\in J}x_\alpha-S\|\leq\frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\alpha_0\notin J_0$. Alors $\{\alpha_0\}\cup J_0$ est une partie finie de I.

On a :$\|x_{\alpha_0}\|=\|S_{\{\alpha_0\}\cup J_0}-S_{J_0}\|\leq\|S_{\{\alpha_0\}\cup J_0}-S\|+\|S_{J_0}-S\| \implies \|x_{\alpha_0}\|\leq\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}\leq\epsilon$.

D'où $\forall\epsilon>0$, $\exists\, I'$ fini $I'=J_0$ tel que $\forall\alpha_0\in I$ et $\alpha_0\notin I'$, $\|x_{\alpha_0}\|\leq\varepsilon$.

2) Soit $I_0=\{\alpha\in I|x_\alpha\neq0\}$ avec $I_0^c=\{\alpha\in I|x_\alpha=0\}$.

Montrons que I_0 est dénombrable, montrons tout d'abord que $(x_\alpha)_\alpha \in I_0$ est une famille sommable.

Soit $\epsilon > 0$ fixé, $\exists J_0$ fini de I telle que $\forall J$ fini $\subset I$ contenant J_0 on a : $\| S - S_J \| < \epsilon$ où $S_J = \sum_{\alpha \in J} x_\alpha$.

Alors $J_0 \cap I_0$ est une partie finie de I_0.

Soit J une partie finie de I_0 contenant $J_0 \cap I_0$. Montrons que $\|S_J - S\| \leq \varepsilon$.

On a :$J \cup J_0 = J \cup (J_0 \cap I_0) \cup (J_0 \cap I_0^c) = (J \cup (J_0 \cap I_0)) \cup (J_0 \cap I_0^c) = J \cup (J_0 \cap I_0^c)$

Donc $S_{J\cup J_0} = S_{J\cup(J_0\cap I_0^c)} = \displaystyle\sum_{\alpha\in J} x_\alpha + \sum_{\alpha\in(J_0\cap I_0^c)} x_\alpha = S_J$

$\implies \|S_{J\cup J_0} - S\| = \|S_J - S\| \leq \varepsilon$. *D'où le résultat.*

$(x_\alpha)_{\alpha\in I_0}$ est sommable de somme S. D'après la question 1° $\forall n \in \mathbb{N}^* \; \exists J_0^n$ fini $\subset I_0$ tel que :

$\forall\, \alpha \in I_0 \backslash J_0^n$, on a $\| x_\alpha \| < \frac{1}{n}$.

On a $I_0 = \cup_{n\in\mathbb{N}} J_0^n$ en effet :

Si $x_\alpha \neq 0$, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\| x_\alpha \| \geq \frac{1}{p}$. D'où $\alpha \in J_0^p$.

3) Montrons que si $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ telle que: $\displaystyle\sum_{\alpha\in I'} \|x_\alpha\| < M$ $\forall I'$ fini $\notin I$ alors, $\displaystyle\sum_{\alpha\in I} \|x_\alpha\| = \sup_{I' fini \subset I} (\sum_{\alpha\in I'} \|x_\alpha\|)$ existe. (utiliser la caractérisation de la borne "sup")

On a l'ensemble $\{\sum_{\alpha\in I'} \|x_\alpha\| | I' \; fini \; \subset I\}$ est majoré. Donc possède une borne supérieure S.

D'après la caractérisation du borne sup on a : $\forall\epsilon > 0$, $\exists I'$ fini de I tel que $S - \epsilon \leq \displaystyle\sum_{\alpha\in I'\subset I} \|x_\alpha\| \leq S$

Soit I'' une partie fini de I tq $I'' \geq I'$

$\displaystyle\sum_{\alpha\in I'} \|x_\alpha\| \leq \sum_{\alpha\in I''} \|x_\alpha\| \leq S \implies S - \epsilon \leq \sum_{\alpha\in I''} \|x_\alpha\| \leq S \leq S + \epsilon \implies -\epsilon \leq \sum_{\alpha\in I''} \|x_\alpha\| - S \leq \epsilon$. *Donc* $|\displaystyle\sum_{\alpha\in I''} \|x_\alpha\| - S| \leq \epsilon$.

Exercice 6 *Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions réelles continues définies sur $[-1,\, 1]$ muni du produit scalaire.*

$$(f/g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite orthogonale de E non normé, obtenue à partir du système libre $\{1,\, x,\, x^2, ...\}$ en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

1- Montrer que pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à $n-1$, on a $(P_n/Q) = 0$.

2- Montrer que $\displaystyle\min_{a_0,..,a_{n-1}\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} (x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_0)^2 dx = \| P_n \|^2$.

3- Pour tout entier naturel n, on pose $q_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_n(1)}$. On admet que $P_n(1) \neq 0$, $q_n(-1) = (-1)^n$ et que $\| q_n \|^2 = \frac{2}{n+1}$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme unique S_n de degré n tel que pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à n, on ait : $(S_n/Q) = Q(1)$.

(Vous pouvez écrire écrire $S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k q_k$, puis calculer les coefficients c_k).

b) En déduire $S_n(1)$ et $S_n(-1)$.

4-a) Montrer que : $(1-x)S_n(x) = \frac{n+1}{2}(q_n(x) - q_{n+1}(x))$.

b) En déduire la valeur de $\int_{-1}^{1} (1-x)S_n(x)S_m(x)dx$ pour tout $n,\, m \in \mathbb{N}$.

Corrigé 6 *Rappel sur le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*

E est un préhilbertien sur $\mathbb{K}$.

Soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille libre. Alors il existe une famille $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de E, orthogonale telle que : $F_n = vect\{e_0, ..., e_n\} = vect\{f_0, ..., f_n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$f_p \perp F_n$ si $p > n$.
Les f_i sont données par : $f_{n+1} = e_{n+1} - P_{F_n}(e_{n+1})$.
$P_{F_n}(e_{n+1}) \in F_n$ entraîne $\exists \lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ telle que $P_{F_n}(e_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i$.
On a : $e_{n+1} - P_{F_n}(e_{n+1}) \perp F_n$.
D'où : $< e_{n+1} - P_{F_n}(e_{n+1}), f_j >= 0 \ \forall \, j = 0, ..., n$.
$\Longleftrightarrow < e_{n+1}, f_j >=< \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i, f_j >$. *D'où* $\lambda_j = \frac{< e_{n+1}, f_j >}{\|f_j\|^2}$.
Donc $P_{F_n}(e_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n} < e_{n+1}, f_j > \frac{f_j}{\|f_j\|^2}$,
avec $f_0 = e_0$.
D'où $f_{n+1} = e_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} < e_{n+1}, f_j > \frac{f_j}{\|f_j\|^2}$.
1) Montrons que pour tout polynôme Q de degré inférieur $\leq n-1$, on a $(P_n/Q) = 0$.
$Q \in F_{n-1} = Vect(1, x, x^2, ..., x^{n-1}) = Vect(P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-1})$.
$(P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-1})$ *est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$). Alors on a* $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i P_i$ *et* $< P_n, Q >=< P_n, \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i P_i >= \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \bar{\lambda_i} < P_n, P_i >= 0$
2) Montrons que $\displaystyle\min_{a_0,...,a_{n-1} \in \mathbb{R}} \int_{-1}^{1} (x^n - a_{n-1}x^{n-1} - ... - a_0)^2 dx = \|P_n\|^2$.
On a $\displaystyle\min_{a_0,...,a_{n-1} \in \mathbb{R}} \int_{-1}^{1} (x^n - a_{n-1}x^{n-1} - ... - a_0)^2 dx = \min_{Q \in F_{n-1}} \int_{-1}^{1} (x^n - Q(x))^2 dx \quad (Q \in F_{n-1} = \mathbb{R}_{n-1}[X])$
$\Longrightarrow \displaystyle\min_{a_0,...,a_{n-1} \in \mathbb{R}} \int_{-1}^{1} (x^n - a_{n-1}x^{n-1} - ... - a_0)^2 dx = \min_{Q \in F_{n-1}} \|x^n - Q\|^2 = \|x^n - P_{F_{n-1}}(x^n)\|^2 = \|P_n\|^2$.
3-a) $\exists ! S_n \in \mathbb{R}$ de degré n tel que :
$< S_n, Q >= Q(1)$, $\forall Q$ polynôme de degré $\leq n$.
Si un tel polynôme existe, il vérifie : $< S_n, q_j >= q_j(1) = 1 \quad j \leq n$.
Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k q_k$.
D'où $\sum_{k=0}^{n} c_k < q_k, q_j >= c_j \parallel q_j \parallel^2$. Donc $c_j = \frac{1}{\|q_j\|^2} = \frac{2j+1}{2} = j + \frac{1}{2}$.
Montrons que $S_n = \sum_{j=0}^{n} (j + \frac{1}{2}) q_j$ répond à la question.
Soit Q un polynôme de degré $\leq n$.
On a $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i q_i$ *et* $< S_n, Q >=< \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (j + \frac{1}{2}) q_j, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i q_i >= \sum_{j=0}^{n} (j + \frac{1}{2}) \sum_{i=0}^{n} \lambda_i < q_j, q_i >$
$$\Longrightarrow < S_n, Q >= \sum_{j=0}^{n} (j + \frac{1}{2}) \lambda_j \|q_j\|^2$$
$$\Longrightarrow < S_n, Q >= \sum_{j=0}^{n} \lambda_j (j + \frac{1}{2}) \frac{2}{2j+1} = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = Q(1).$$
S_n est unique par construction.
3-b) $S_n(1)$ et $S_n(-1)$?
$$-S_n(1) = \sum_{j=0}^{n} (j + \frac{1}{2}) q_j(1) = \sum_{j=0}^{n} j + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{2} = \frac{(n+1)^2}{2}$$
$$-S_n(-1) = \sum_{j=0}^{n} (j + \frac{1}{2})(-1)^j = \sum_{j=0}^{n} j(-1)^j + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j$$
★ *Si n est impair $(n = 2p+1)$*
$$S_n(-1) = \sum_{j=0}^{n} j(-1)^j + 0 = \sum_{k=0}^{p} 2k(-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{p} (2k+1)(-1)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{p} 2k - \sum_{k=0}^{p} 2k - \sum_{k=0}^{p} 1$$

$\implies S_n(-1) = -\sum_{k=0}^{p} 1 = -\frac{n+1}{2}$

★ *Si n est paire* $(n = 2p)$

$S_n(-1) = \sum_{j=0}^{n}(j+\frac{1}{2})(-1)^j = \sum_{j=0}^{2p-1}(j+\frac{1}{2})(-1)^j + (n+\frac{1}{2}) = -\sum_{k=0}^{2p-1} 1 + (n+\frac{1}{2}) = (-\frac{n}{2}) + (n+\frac{1}{2}) = \frac{n+1}{2}.$

4-a) Montrons que $(1-x)S_n(x) = \frac{n+1}{2}(q_n(x) - q_{n+1}(x))$.

On a: $deg((1-x)S_n(x)) \leq n+1$. *Alors* $(1-x)S_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1}\lambda_i q_i = \sum_{i=0}^{n+1}\frac{<(1-x)S_n, q_i>}{\|q_i\|^2}q_i$

Si $\forall j < n$ *On a:* $<(1-x)S_n, q_j> = \int_{-1}^{1}(1-x)S_n(x)q_j(x)dx = \int_{-1}^{1}S_n(x)(1-x)q_j(x)dx$

$\implies <(1-x)S_n, q_j> = <S_n, (1-x)q_j> = (1-x)q_j(1) = 0$ *c'est par définition de* S_n

$\implies \lambda_i = 0 \ \forall i < n \implies (1-x)S_n(x) = \lambda_n q_n + \lambda_{n+1}q_{n+1}$

Si $x = 1 \implies 0 = \lambda_n + \lambda_{n+1}$

Si $x = -1 \implies 2S_n(-1) = \lambda_n q_n(-1) + \lambda_{n+1}q_{n+1}(-1)$.

Alors $\begin{cases} 0 = \lambda_n + \lambda_{n+1} \\ \\ 2\frac{(-1)^n(n+1)}{2} = \lambda_n(-1)^n + \lambda_{n+1}(-1)^{n+1} \end{cases} \implies \begin{cases} 0 = \lambda_n + \lambda_{n+1} \\ \\ n+1 = \lambda_n - \lambda_{n+1} \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_n = \frac{n+1}{2} \\ \\ \lambda_{n+1} = -\frac{n+1}{2} \end{cases}$

$\implies (1-x)S_n = \frac{n+1}{2}(q_n - q_{n+1})$ *et Par suite* $(1-x)S_n(x) = \frac{n+1}{2}(q_n(x) - q_{n+1}(x))$.

4-b) En déduire la valeur de $\int_{-1}^{1}(1-x)S_n(x)S_m(x)dx$ *pour tout* $n, m \in \mathbb{N}$.

★ *Si* $n = m$.

$$\begin{aligned} I = \int_{-1}^{1}(1-x)S_n(x)S_n(x)dx &= \int_{-1}^{1}\frac{n+1}{2}(q_n(x) - q_{n+1}(x))S_n(x)dx \qquad (1) \\ &= \int_{-1}^{1}\frac{n+1}{2}q_n(x)S_n(x)dx - \frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1}q_{n+1}(x)S_n(x)dx \qquad (2) \end{aligned}$$

$\implies I = \frac{n+1}{2} <S_n, q_n> - \frac{n+1}{2} <S_n, q_{n+1}> = \frac{n+1}{2}$.

★ *Si* $n > m$

I$= \int_{-1}^{1}(1-x)S_n(x)S_m(x)dx = <S_n, (1-x)S_m> = (1-x)S_m(1) = 0.$

Exercice 7 *Soit* H *un espace de Hilbert réel et* B *une forme bilinéaire symétrique définie sur* H *vérifiant :*

- *i) Pour tout* $y \in H$, $x \longrightarrow B(x,y)$ *est continue;*
- *ii) Pour tout* $x \in H$, $y \longrightarrow B(x,y)$ *est continue;*
- *iii) Il existe une constante* $b > 0$ *telle que* $B(x,x) \geq b \parallel x \parallel^2, \ \forall x \in H$.

1-a) Montrer qu'il existe $a > 0$ *telle que* $|B(x,y)| \leq a \parallel x \parallel\parallel y \parallel, \ \forall x, y \in H$.

b) Montrer que l'espace vectoriel H *muni de* B *est un espace de Hilbert* H_1.

2- Soit $D = \{y \in H | \exists y^* \in H : B(x, y^*) = (x/y) \forall x \in H\}$.

a) Montrer que $\forall y \in H$, y^* *défini dans* D *est unique.*

b) Montrer que D *est un sous espace vectoriel de* H.

3- Soit S *l'application linéaire définie sur* D *à valeurs dans* H, *par* $Sy = y^*$, *i.e,*

$$B(x, Sy) = (x/y).$$

a) Montrer que S est continue et vérifie $\| S \| \leq b^{-1}$.

b) Montrer que D est fermé dans H.

4-a) Montrer que $D = H$ (Vous pouvez montrer que $D^{\perp} = \{0\}$ dans H en utilisant le théorème de représentation de Riez).

b) Montrer que S est bijective.

c) Montrer que $\| S^{-1}y \| = \sup\limits_{\|z\|\leq 1} |(S^{-1}y/z))$ $\forall y \in H$ en déduire que S^{-1} est continue vérifiant $\| S^{-1} \| \leq a$.

Corrigé 7 *1-a) Voir Exercice 7 Série 2 (En appliquant Théorème de Banach-Steinhaus).*

1-b) Montrons que H muni de B est un espace de Hilbert H_1.

Il suffit de Montrer que $H_1 = (H, B)$ est complet pour $\|x\|_1 = \sqrt{B(x,x)}$.

$Soit(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de cauchy dans $H_1(H, \|\|_1)$. Alors $\forall \epsilon > 0 \, \exists \, n_0$, $\forall p, \, q \geq n_0$, on a $\|x_p - x_q\|_1^2 = B(x_p - x_q, x_p - x_q) \leq \varepsilon^2$.

Par iii), on a : $\forall \epsilon > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \, \forall p, \, q \geq n_0$, $\|x_p - x_q\| \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{b}} \implies (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H qui est complet donc converge vers x, c'est-à-dire $\forall \epsilon > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \, | \, \forall n \geq n_0$, $\|x_n - x\|^2 \leq \epsilon^2$.

On a: $\|x_n - x\|_1^2 = B(x_n - x, x_n - x) \leq a\|x_n - x\|^2 < a\epsilon^2$.

Ainsi on a : $\forall \, \epsilon > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$ $\|x_n - x\|_1^2 < \sqrt{a}\epsilon$ c'est-à-dire $x_n \longrightarrow x$ dans H_1. Donc H_1 est complet.

2-a) Montrons que $\forall y \, \in H$, y^* définie dans D est unique.

Soient y^*, y^{**} tels que $B(x, y^*) =< x, y >= B(x, y^{**}) \, \forall x \in H \implies B(x, y^* - y^{**}) = 0 \implies B(y^* - y^{**}, y^* - y^{**}) = 0 \implies y^* - y^{**} = 0 \implies y^* = y^{**}$. D'où l'unicité.

2-b) Si y_1, $y_2 \in D$ est-ce-que $y_1 + y_2 \in D$ et $\lambda y_1 \in D$?

On a: $y_1 \in D \implies \exists \, y_1^*$ tq $B(x, y_1^*) =< x, y_1 >, y_2 \in D \implies \exists \, y_2^*$ tq $B(x, y_2^*) =< x, y_2 >$. Alors : $B(x, y_1^* + y_2^*) =< x, y_1 + y_2 > \exists z = y_1^* + y_2^* | B(x, z) =< x, y_1 + y_2 >$, d'où $y_1 + y_2 \in D$, et : $\lambda B(x, y_1^*) = \lambda(< x, y_1 >) \implies B(x, \lambda y_1^*) =< x, \lambda y_1 >$, d'où $\lambda y_1 \in D$. Donc D est un e.v. de H.

3-a) Montrons que S est continue et $\|S\| \leq b^{-1}$.

$S : D \longrightarrow H$, $y \longmapsto Sy$ avec S est linéaire et $b(x, Sy) =< x, y > \forall x \in H$

Pour $x = Sy \implies B(Sy, Sy) =< Sy, y > \implies |B(Sy, Sy)| = | < Sy, y > | \leq \|Sy\|\|y\|$ (d'après l'inégalité de cauchy-Schwartz)

Or $B(Sy, \, Sy) \geq b\|Sy\|^2$, d'où $b\|Sy\|^2 \leq \|Sy\|\|y\| \implies \|Sy\| \leq \|y\|b^{-1} \, \forall y \in D$. D'où S est continue et $\|S\| \leq b^{-1}$.

3-b) D fermé dans H ?

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ qui converge vers y, est ce que $y \in D$?

$\forall n \, \exists \, y_n^* = Sy_n | B(x, y_n^*) =< x, y_n > \implies \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} B(x, y_n^*) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} < x, y_n^* >=< x, \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} y_n >$

$\implies B(x, \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} y_n^*) \implies B(x, \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} Sy_n) =< x, y >$ *(S est continue)*

$\implies B(x, Sy) =< x, y >$*, d'où $y \in D$, et donc D est fermé dans H.*

4-a) Montrons que $D = H$.

<u>Première méthode:</u>

Soit $y \in H$ est ce que $y \in D$?

Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto < x, y >$ $\quad (= B(x, z)?)$

$\|f(x)\| = \| < x, y > \| \leq \|x\|\|y\| \leq \frac{\sqrt{B(x,x)}}{\sqrt{b}}\|y\| \implies \|f(x)\| \leq \|x\|_1 \frac{\|y\|}{\sqrt{b}}$*. D'où $f \in \mathcal{L}_c(H_1, \mathbb{R})$.*

D'après le théorème de représentation de Riesz $\exists! \, z = y^* \mid f(x) =< x, y >= B(x, z >= B(x, y^*) \implies \forall x \in H$, on a : $B(x, z) =< x, y >$ c'est-à-dire $y \in D \implies D = H$

<u>Deuxième méthode:</u>

Soient $y \in D^{\perp}$ *et* $f : H \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto < x, y >$, $(f \in \mathcal{L}_c(H, \mathbb{R}))$.

Soit $f_1 = f/D = 0$, *alors* $f_1(x) =< x, y >= 0$.

Donc $\exists!\ h \ \in \mathcal{L}_c(H, \mathbb{R})$ *tel que* $h/D = f_1$ *et* $\|h\| = \|f_1\| = 0$

$\implies \exists h = 0 = f$ *(d'après l'exercice 2)*

$\implies f = 0 \implies \forall x \in H \ \ f(x) =< x, y >= 0 \implies y = 0$

$\implies D^{\perp} = 0 \implies (D^{\perp})^{\perp} = (\{0\})^{\perp} = H \implies \bar{D} = H \implies D = H.$

3-b) Montrons que S est bijective. ($S : \ H \longrightarrow H$)

S est injective ?

Soit $y \in H$ *tq* $Sy = 0$ *c'est-à-dire* $B(x, 0) =< x, y > \ \ \forall x \in H$

$\implies < x, y >= 0\ \forall x \in H \implies y = 0$, *d'où S est injective.*

S est surjective ?

Soit $y \in H$ *existe t-il* $z \in H$ *tel que* $Sz = y$?

On a $f : H \longrightarrow \mathbb{K}\ , x \longmapsto B(x, y)$ *et* $|f(x)| = |B(x, y)| \leq a\|x\|\|y\| \implies f \in \mathcal{L}_c(H, \mathbb{K})$.

D'après le théorème de représentation de Riesz $\exists z$ *tq* $f(x) =< x, z >= B(x, y) \implies y = Sz = y^*$.

D'où S est surjective, et par suite S est bijective.

4-c) ★ *Montrons que* $\|S^{-1}y\| = \sup\limits_{\|z\|\leq 1} | < S^{-1}y, z > |$.

On a $| < S^{-1}y, z > | \leq |S^{-1}y|\|z\| \implies \forall\, Z \in H \mid \|z\| \leq 1$, *on a* $| < S^{-1}y, z > | \leq \|S^{-1}y\|$.

Pour $z = \frac{S^{-1}y}{\|S^{-1}y\|}$, *on a :*

$| < S^{-1}y, \frac{S^{-1}y}{\|S^{-1}y\|} > | \leq \sup\limits_{\|z\|\leq 1} | < S^{-1}y, z > | \leq \ \|S^{-1}y\|$

$\implies \|S^{-1}y\| \leq \sup\limits_{\|z\|\leq 1} | < S^{-1}y, z > | \leq \|S^{-1}y\|$.

Donc $\|S^{-1}y\| = \sup\limits_{\|z\|\leq 1} | < S^{-1}y, z > |$.

★ *Montrons que* S^{-1} *est continue et* $\|S^{-1}\| \leq a$.

Comme $\|S^{-1}y\| = \sup\limits_{\|z\|\leq 1} | < S^{-1}y, z > | = \sup\limits_{\|z\|\leq 1} |B(y, z)|$, *or* $|B(y, z)| \leq a\|y\|\|z\| \implies \sup\limits_{\|z\|\leq 1} |B(y, z)| \leq a\|y\| \implies \sup\limits_{\|z\|\leq 1} | < S^{-1}y, z > | = \sup\limits_{\|z\|\leq 1} |B(y, z)| \leq a\|y\| \implies \|S^{-1}y\| \leq a\|y\|$. *D'où* S^{-1} *est continue et* $\|S^{-1}\| \leq a$.