**Université Moulay–Ismail**

Faculté des Sciences et Techniques
Errachidia
Département de Mathématiques

**Année Universitaire: 2020/2021**
**S5, Module: M510**
**Responsable: Belhadj. Karim**

**<u>Série N1</u>.** https://sites.google.com/a/fste.umi.ac.ma/karim-belhadj/home

**Exercice 1.** 1. *Montrer qu'une partie d'un e.m.E est bornée ssi elle est contenue dans une boule fermée.*

2. *Montrer que dans un e.m.E, toute boule ouverte est un ouvert.*

3. *Montrer que dans un espace discret, toute partie est à la fois ouverte et fermée.*

4. *Soient $A$ et $B$ deux parties bornées d'un espace metrique $E$. Montrer que $A \cup B$ est bornée et que $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$.*

**Exercice 2.** *Soient $N_1$ et $N_2$ deux normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$.*

1. *On note $B_1 = \{x \in E/N_1(x) \leq 1\}$ et $B_2 = \{x \in E/N_2(x) \leq 1\}$. Montrer que $B_1 = B_2 \Rightarrow N_1 = N_2$.*

2. *Même question pour les boules ouvertes.*

**Exercice 3.** *Soient $(E_i, d_i)_{1 \leq i \leq n}$ des e.m et $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. Pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans $E$, on pose:*
$\delta_1(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} d_i(x_i, y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$; $\delta_2(x, y) = \max d_i(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$; $\delta_3 = \sum_{i=1}^{i=n} d_i(x_i, y_i)$.

1. *Montrer que $\delta_1$, $\delta_2$ et $\delta_3$ sont des distances sur $E$.*

2. *montrer que $\delta_1$, $\delta_2$ et $\delta_3$ sont métriquement équivalentes.*

**Exercice 4.** 1. *Montrer que deux distances métriquement équivalentes sont topologiquement équivalentes.*

2. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application strictement croissante vérifiant: $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(u + v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$. Montrer que si $d$ est une distance sur un e.m.E alors $\varphi \circ d$ est une distance sur $E$.*

3. *Déduire que $d_1 = \frac{d}{1+d}$ et $d_2 = \log(1 + d)$ sont des distances sur $E$.*

4. *Montrer que $d$ et $d_1$ sont topologiquement équivalentes.*

5. *Est ce que $d$ et $d_1$ sont métriquement équivalentes?*

**Exercice 5.** *Soit $(E,\tau)$ un e.t, montrer qu'en posant $\varphi(x) = \mathcal{V}(x)$(l'ensemble des voisinages de $x$), on définit une application $\varphi : E \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, vérifiant $\varphi(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in E$ les propriétés suivantes.*

1. *Si $A \in \varphi(x)$ et $A \subset B$, alors $B \in \varphi(x)$.*
2. *Si $A, B \in \varphi(x)$, alors $A \cap B \in \varphi(x)$.*
3. *Si $A \in \varphi(x)$, alors $x \in A$.*
4. *Si $A \in \varphi(x)$, alors $\exists B \in \varphi(x)$ tq, $\forall y \in B$ on a $A \in \varphi(y)$.*
5. *Soit $(E,\varphi)$ un couple où $E$ est un ensemble et $\varphi : E \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ une application vérifiant 1), 2), 3) et 4). On définit l'ensemble $\tau = \{A \in \mathcal{P}(E); \forall x \in A, A \in \varphi(x)\}$. Démontrer que $(E,\tau)$ est un e.t et que pour tout $x \in E$ on a: $\varphi(x) = \mathcal{V}(x)$.*

**Exercice 6.** *Soient $E$ un e.t et $A$ un ouvert de $E$.*

1. *Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.*
2. *Montrer que si $B$ est dense dans $E$, alors $\overline{A} = \overline{A \cap B}$.*
3. *Montrer que si $A$ et $B$ sont denses dans $E$, alors $A \cap B$ est dense dans $E$.*
4. *Dans $\mathbb{R}$, déterminer des ouverts $A$ et $B$ telque: $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ soient differents.*

**Exercice 7.** *Pour toute partie $A$ d'un e.t $E$, on pose: $\alpha(A) = (\overset{\circ}{\overline{A}})$, $\beta(A) = \overline{(\overset{\circ}{A})}$.*

1. *Montrer que si $A$ est ouverte, alors $A \subset \alpha(A)$, et que si $A$ est fermé, alors $\beta(A) \subset A$.*
2. *Montrer que pour toute partie $A$ de $E$, on a: $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ et $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.*
3. *Montrer que si $U$ et $V$ sont deux ouverts disjoints, alors $\alpha(U)$ et $\beta(V)$ sont disjoints.*

**Exercice 8.** *Soient $(E,d)$ un e.m et $A \subset E$.*
*Montrer qu'il y a équivalence entre les assertions suivantes.*

1. *$x \in \overline{A}$.*

2. $d(x, A) = 0$.

3. *Il existe une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points de* $A$ *tq:* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$.

**Exercice 9.** *Soient* $(E, d)$ *un e.m,* $A$ *et* $B$ *deux parties non vides de* $E$.

1. *Montrer que pour tout* $x, y \in E$ *on a:* $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$, *en déduire que l'application* $x \in E \mapsto d(x, A)$ *est continue.*
2. *Montrer que l'ensemble* $\{x \in E; d(x, A) < d(x, B)\}$ *est un ouvert.*
3. *Déduire que si* $A$ *et* $B$ *sont deux fermées dijointes de* $E$, *alors il existe deux ouverts* $U$ *et* $V$ *tels que* $A \subset U$ *et* $B \subset V$ *et* $U \cap V = \varnothing$.