Université Moulay–Ismail

Faculté des Sciences et Techniques
Errachidia
Département de Mathématiques

Année Universitaire: 2020/2021
S5, Module: M510
Responsable: Belhadj. Karim

Série N2.

Exercice 1. *Soit* (E, d) *un espace métrique,* $A \subset E$ *et* χ_A*, la fonction caractéristique définie par:* $\chi_A(x) = 1$ *si* $x \in A$ *et* $\chi_A(x) = 0$ *si* $x \notin A$.
Montrer que χ_A *est continue si et seulement si* A *est ouverte et fermée dans* (E, d).

Exercice 2. *Soient* E *et* F *deux e.t et* $f : E \to F$ *une application, montrer l'équivalence des propriétés suivantes:*

1. f *est continue sur* E.
2. *Pour toute partie* B *de* F *on a:* $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subseteq \widehat{f^{-1}(B)}^{\circ}$.
3. *Pour toute partie* B *de* F *on a:* $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Exercice 3. *Soient* E *et* F *deux e.t,* F *est separé,* f *et* g *deux applications continues de* E *dans* F.

1. *Montrer que* $G = \{x \in E; f(x) = g(x)\}$ *est fermé.*
2. *Déduire que s'il existe* $A \subset E$ *tq:* $\overline{A} = E$ *et* $\forall x \in A$ *on a:* $f(x) = g(x)$ *alors* $f = g$.

Exercice 4. *Soient* E *un e.t,* A *et* B *deux parties de* E.

1. *Montrer que* A *est ouverte(resp fermée) dans* E *ssi pour tout ouvert(resp fermé) de* A *est ouvert(resp fermé) dans* E.
2. *Montrer que si* $A \subset B$ *alors*
   (a) $\overline{A}^B = \overline{A} \cap B$.
   (b) $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A}^B$.
   (c) $Fr(A)^B \subset Fr(A)$.

Exercice 5. *Montrer les propriétés suivantes:*

1. *Dans un espace discret une partie est compact ssi elle est finie.*

2. *Dans un e.t separé toute union finie(resp toute intersection) de partie compacts est compact.*

3. *Si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments d'un e.t.*E *separé convergeant vers* $a \in E$*, alors* $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ *est compact.*

4. *Sachant que* E *est un espace compact, pour* $x \in E$*,* $E\backslash\{x\}$ *est compact ssi* x *n'est pas un point d'accumulation de* E*.*

Exercice 6. *Soit* E *un ensemble non vide muni de deux distances* d_1 *et* d_2*. On suppose que pour toute suite* x_n *de* E*:* $x_n \to^{d_1} x \Rightarrow x_n \to^{d_2} x$ *et que* (E, d_1) *est compact.*

1. *Montrer que si* F *est un fermé dans* (E, d_2)*, alors* F *est un fermé dans* (E, d_1)*.*

2. *Montrer que* (E, d_2) *est compact.*

3. *Montrer que si* F *est un fermé dans* (E, d_1)*, alors* F *est un fermé dans* (E, d_2)*.*

4. *Déduire que* d_1 *et* d_2 *définissent la même topologie sur* E*.*

Exercice 7. *Soient* E *un e.m et* A *et* B *deux parties non vides de* E*.*

1. *Montrer que si* A *est compact et* B *est fermé et* $A \cap B = \varnothing$*, alors* $d(A, B) > 0$*.*

2. *Montrer que si* A *et* B *sont compacts, alors il existe* $a \in A, b \in B$ *tq:* $d(A, B) = d(a, b)$*.*

Exercice 8. *Soient* E *un e.m complet, montrer que toute contraction* $f : E \to E$ *admet un point fixe.*

Exercice 9. *Soit* (K, d) *un espace métrique compact et* $f : K \to K$ *une fonction continue telle que* $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ *si* $x \neq y$*.*

1. *Montrer que* f *a au plus un point fixe.*

2. *Montrer qu'il existe un élément* $a \in K$ *tel que* $d(a, f(a)) \leq d(x, f(x))$ *pour tout* $x \in K$*.*

3. *Montrer que* a *est le point fixe de* f*.*

4. *Pour* $x_0 \in K$, *on définit la suite* $(x_n)_{n\geq 0}$ *par* $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que* $d(x_n, a)_{n\geq 0}$ *converge vers* $l \geq 0$.

5. *Montrer que* $l = 0$. *Conclusion?*