

Université Moulay–Ismail

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

ERRACHIDIA

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Année Universitaire: 2020/2021

M S5, Module: M510

Responsable: Belhadj. Karim

Serie N3.

Exercice 1. 1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tq: $\alpha + \beta = 1$. Montrer que pour tout $u, v \in \mathbb{R}^+$, on a: $u^\alpha v^\beta \leq \alpha u + \beta v$.

2. Montrer que pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a:
 $\sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\sum_{i=1}^n |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$ sachant que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

3. Dédurre que $x \mapsto \|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. On rappelle que si E est un $\mathbb{K}$ e.v.n, A et B deux parties non vides de E et λ une partie de $\mathbb{K}$, alors $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$ et si $A = \{a\}$ on note $a + B$. De même $\lambda A = \{\lambda x, \lambda \in \lambda, x \in A\}$, si $\lambda = \{\lambda\}$ on note λA .

1. Soient $a, b \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, montrer que $b + \lambda B(a, r) = B(b + \lambda a, |\lambda|r)$ et $b + \lambda B'(a, r) = B'(b + \lambda a, |\lambda|r)$.

2. Montrer que $\overline{a + B} = a + \overline{B}$, $\widehat{a + A} = a + \overset{\circ}{A}$ et $\overline{\lambda A} = \lambda \overline{A}$.

3. Soient $a \in E$ et $r > 0$. Montrer que $\overline{B(a, r)} = B'(a, r)$ et $\widehat{B'(a, r)} = B(a, r)$.

Exercice 3. Soient A et B deux parties non vides d'un e.v.n E .

1. Montrer que si A ou B est ouverte alors $A + B$ est ouverte.

2. Montrer que si A et B sont connexes, alors $A + B$ est connexe.

3. Montrer que si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.

4. Montrer que si A et B sont connexes par arcs, alors $A \times B$ est connexe par arcs.

5. Dédurre que si A et B sont connexes par arcs, alors $A + B$ est connexe par arcs.

6. Montrer que si A est convexe, alors A est connexe.

Exercice 4. Soient E, F deux $\mathbb{R}$ e.v.n et $f : E \rightarrow F$ une application vérifiant: $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in E$. De plus f est bornée sur la boule unité fermée.

1. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a: $f(rx) = rf(x)$.
2. Montrer que f est continue en 0.
3. Montrer que f est continue sur E .
4. Dédurre que f est linéaire.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$. On désigne par: $B'(0, 1) = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$, la boule unité fermée de centre 0 et de rayon 1. Soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel fermé de E . Pour $x \in E$, on pose: $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

1. Montrer que $\forall x \in E$, on a: $0 \leq d(x, F) \leq \|x\|$.
2. Montrer que $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.
3. (a) Montrer que $\forall x, x' \in E, \lambda \in \mathbb{C}, y \in F$ on a:

$$d(\lambda x, F) = |\lambda|d(x, F),$$

$$d(x - y, F) = d(x, F),$$

(b) Montrer que l'application $x \mapsto d(x, F)$ est uniformément continue dans E .

4. (a) Soit $x \in B'(0, 1)$. On pose $\alpha = d(x, F)$ et on suppose que $\alpha > 0$, soit de plus $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $y \in F$ tel que: $\alpha \leq \|x - y\| < \alpha(1 + \varepsilon)$.

(b) Soit $x' = \frac{x - y}{\|x - y\|}$, montrer que $d(x', F) > \frac{1}{1 + \varepsilon}$.

5. Montrer que si $F \neq E$, alors $\sup_{x \in B'(0, 1)} d(x, F) = 1$.

6. Montrer que si $F \neq E$ et E est de dimension finie, alors il existe $x_0 \in B'(0, 1)$ tel que $d(x_0, F) = 1$.

Belhadj Karim