

Travaux dirigés : Séries de Fourier
Série 3

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, paire et vérifiant

$$f(x) = x \text{ sur } [0, \pi]$$

1. Calculer la série de Fourier de f .
2. Etudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier de f .
3. Déterminer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

4. En déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique, impaire et vérifiant

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2} \text{ sur }]0, \pi]$$

1. Préciser la convergence de la série de Fourier de f . La convergence est-elle uniforme?
2. Calculer la série de Fourier de f .
3. En déduire la convergence et la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$$

4. Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 3

Soit f une fonction réelle développable en série de Fourier. Calculer en fonction des coefficients de Fourier réels de f , ceux des fonctions g et h définies par :

$$g(x) = f(x) \cos(x) \text{ et } h(x) = f(x) \sin(x)$$

Exercice 4

Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par

$$f(t) = \cos(\alpha t) \text{ sur }]-\pi, \pi]$$

1. Montrer que f admet une série de Fourier convergente sur $\mathbb{R}$. Préciser le type de convergence.
2. Expliciter les coefficients de Fourier de f .
3. Pour tout $x \notin \pi\mathbb{Z}$, montrer l'égalité

$$\cotan x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - (n\pi)^2}$$

Exercice (Facultatif)

Déterminer les fonctions 2π -périodiques solutions de l'équation différentielle

$$(E) : y' + \beta y = f$$

où f est une fonction 2π -périodique (dérivable) et $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Application $f(x) = \cos(4x) + \sin(3x)$ et $\beta = 3$.

Série 3 : correction d'exercices

Rappel

Définition (fonction continue par morceaux)

Soit $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que

f est continue par morceaux sur I s'il existe une subdivision

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de I telle que

- f est continue sur les intervalles $]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1, \dots, n$;
- f admet une limite à droite en $a = x_0, \dots, x_{n-1}$ et une limite à gauche en $x_1, \dots, x_n = b$.

Définition (fonction dérivable par morceaux)

Soit $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que

f est dérivable par morceau sur $I = [a, b]$ (relativement à une subdivision $x_0 < \dots < x_n$ de I) si

- f est continue par morceaux sur I
- f est dérivable sur les intervalles $]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1, \dots, n$;
- la dérivée f' admet une limite à droite en $a = x_0, \dots, x_{n-1}$ et une limite à gauche en $x_1, \dots, x_n = b$.

Définition (fonction de classe C^1 par morceaux)

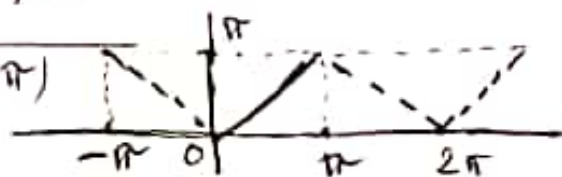
Soit $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que

f est de classe C^1 par morceaux sur I (relativement à une subdivision $x_0 < \dots < x_n$ de I) si

- f est de classe C^1 sur les intervalles $]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1, \dots, n$;
- f et sa dérivée f' possèdent des limites finies à gauche et à droite en x_{k-1} et x_k , $k = 1, \dots, n$;

Exercice 1

$$(f \text{ pair} \Rightarrow f(-\pi) = f(\pi) = \pi)$$



1. Puisque f est pair, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \stackrel{\text{(par parité)}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\pi} = \pi.$$

• Pour $n \geq 1$: $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos nx \, du$ [2]
 (par partie)

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi} [\cos nx]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1).$$

Donc $a_n(f) = 0, \forall n \geq 1$

$$\left\{ \begin{aligned} a_{2k+1}(f) &= \frac{-4}{(2k+1)^2\pi}, \forall k \geq 0. \end{aligned} \right.$$

Par suite $SF(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$

2. f est 2π -périodique, continue et de classe C^2 par morceaux donc d'après le théorème de Dirichlet la série de Fourier de f converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$,

$$SF(f)(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^n a_n \cos nx = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} = f(x)$$

3. Pour $x=0$, $f(0)=0$ donc on obtient

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

La formule de Parseval donne $\left(\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \geq 1} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$

$$\text{or } \left| \frac{a_0(f)}{2} \right|^2 + \sum_{n \geq 1} |a_n(f)|^2 = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2 (2k+1)^4}$$

$$\text{donc, } \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2} = \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{4\pi^2 - 3\pi^2}{6} \right) = \frac{\pi^2}{96}.$$

4. D'abord $\sum \frac{1}{n^2}$ existe et on a:

3

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{4}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

De même $\sum \frac{1}{n^4}$ existe et on a:

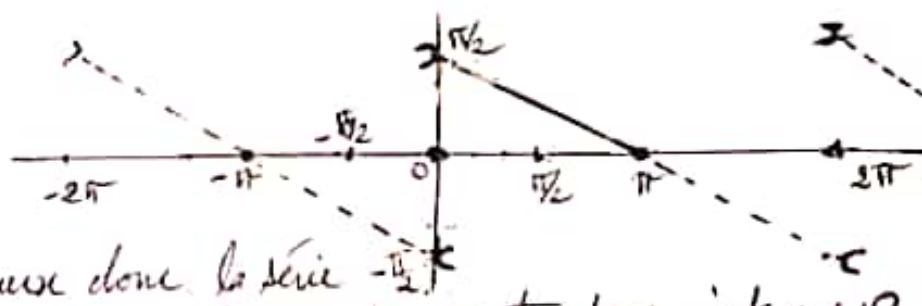
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} + \frac{\pi^4}{96}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{16}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96} \Rightarrow \frac{15}{16} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\text{donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{15 \times 6} = \frac{\pi^4}{90}$$

Exercice 2



1. f est 2π -périodique,

de classe C^1 par morceaux donc la série de Fourier de f converge simplement vers $f(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$ où f est continue, et vers $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ en ses points de discontinuité.

f n'est pas continue en 0 car f impaire donc $f(-x) = -f(x)$,
 $\Rightarrow f(-\pi) + f(\pi) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ et $f(0^+) = \frac{\pi}{2}$, $f(0^-) = -\frac{\pi}{2}$,
 donc f ne converge pas uniformément.

2. f est impaire donc $a_n(f) = 0 \quad \forall n \geq 0$.

174

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin nu \, du, \text{ la fonction } x \mapsto f(x) \sin nx \text{ est pair}$$

$$\text{paire} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi-u}{2} \sin nu \, du = \frac{2}{n\pi} \left[-\frac{\pi-u}{2} \cos nu \right] - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, du$$

$b_n(f) = \frac{1}{n}$ donc le développement en série de Fourier de f s'écrit $SF(f)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.

3. f est continue en Δ donc la série de Fourier de f converge vers $f(x)$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi-1}{2}$

4. Par le formalisme de Parseval on a $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, du$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi-x}{2} \right)^2 \, du = \frac{1}{6\pi} \left[-\frac{(\pi-x)^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3

on a $g(x) = f(x) \cos x$ et $h(x) = f(x) \sin x$.

f est une fonction réelle développable en série de Fourier donc

$$b_0(g) = b_0(h) = 0, \quad a_0(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx = a_1(f) \text{ et}$$

$$b_2(h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \sin x \, dx = b_1(f).$$

$$\forall n \geq 2 \quad a_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \cos nx \, dx \text{ or } \cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$$

$$\text{donc,} \quad a_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)}{2} \, dx$$

$$\text{d'où} \quad a_n(g) = \frac{a_{n+1}(f) + a_{n-1}(f)}{2}$$

$$b_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \sin nx \, dx \text{ or } \cos x \sin y = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2}$$

$$\text{donc,} \quad b_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)}{2} \, dx$$

$$\text{d'où} \quad b_n(g) = \frac{b_{n+1}(f) - b_{n-1}(f)}{2}$$

de même, $\forall n \geq 1$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \cos x \, dx \quad \text{or} \quad \sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$$

$$\text{donc } a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\sin(n+1)x + \sin(n-1)x}{2} \, dx$$

$$\text{d'où } a_n(f) = \frac{b_{n+1}(f) - b_{n-1}(f)}{2}$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin x \sin nx \, dx \quad \text{or} \quad \sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\text{donc } b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\cos(n-1)x - \cos(n+1)x}{2} \, dx$$

$$\text{d'où } b_n(f) = \frac{a_{n-1}(f) - a_{n+1}(f)}{2}$$

Exercice 4

1. f est 2π -périodique localement intégrable donc développable en série de Fourier.

on a $f(t + k\pi) = f(t) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, pour $k = -1$ et $t = \pi$

$$f(\pi - 2\pi) = f(\pi) \Leftrightarrow f(-\pi) = f(\pi)$$

De plus f est continue sur $]-\pi, \pi[$ $\lim_{t \rightarrow \pi^-} \cos t = \cos(-\pi) = -1$ (est paire)
 $\lim_{t \rightarrow \pi^+} \cos t = \cos(\pi) = -1$
 $= \cos(2\pi) = 1$
 $= f(\pi) = f(-\pi)$

donc f est continue sur $[-\pi, \pi]$

$$\lim_{t \rightarrow (\pm\pi)^+} \frac{f(t) - f(-\pi)}{t + \pi} = f'_d(-\pi) \in \mathbb{R} \text{ (existe).}$$

ainsi f est continue, de classe C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ d'après le théorème de Dirichlet sa série de Fourier converge Normalement donc uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

2. f est une fonction pair donc la fonction $x \mapsto f(x) \sin x$ est impair d'où $b_n(f) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
 (par parité)

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos t \cos nt \, dt \quad \text{intégration par parties} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\cos t \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \sin nt \, dt \quad \text{intégration par parties} \\ &= \frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi} \cos t \cos nt \, dt \end{aligned}$$

Série 3

Exercice 3

Soit f une fonction réelle développable en série de Fourier. Calculer en fonction des coefficients de Fourier réels de f , ceux des fonctions g et h définies par :

$$g(x) = f(x) \cos(x) \text{ et } h(x) = f(x) \sin(x)$$

Solution :

Pour $n = 0$, on a

$$a_0(g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(x) dx = a_1(f) \text{ et } a_0(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(x) dx = b_1(f)$$

Pour $n = 1$, on obtient

$$a_1(h) = b_1(g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(x) \sin(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(2x) dx = \frac{1}{2} b_2(f)$$

Pour $n \geq 1$, on a

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)) = \frac{1}{2} (a_{n+1}(f) + a_{n-1}(f))$$

$$b_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (\cos((n-1)x) - \cos((n+1)x)) = \frac{1}{2} (a_{n-1}(f) - a_{n+1}(f))$$

et pour $n \geq 2$,

$$b_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)) = \frac{1}{2} (b_{n+1}(f) + b_{n-1}(f))$$

$$a_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)) = \frac{1}{2} (b_{n+1}(f) - b_{n-1}(f))$$

de même, $\forall n \geq 1$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \cos x \, dx \quad \text{or} \quad \sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$$

$$\text{donc } a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\sin(n+1)x + \sin(n-1)x}{2} \, dx$$

$$\text{d'où } a_n(f) = \frac{b_{n+1}(f) - b_{n-1}(f)}{2}$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin x \sin nx \, dx \quad \text{or} \quad \sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\text{donc } b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\cos(n-1)x - \cos(n+1)x}{2} \, dx$$

$$\text{d'où } b_n(f) = \frac{a_{n-1}(f) - a_{n+1}(f)}{2}$$

Exercice 4

1. f est 2π -périodique localement intégrable donc développable en série de Fourier.

$$\text{on a } f(t + k\pi) = f(t) \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \text{ pour } k = -1 \text{ et } t = \pi$$

$$f(\pi - 2\pi) = f(\pi) \Leftrightarrow f(-\pi) = f(\pi)$$

$$\text{De plus } f \text{ est continue sur }]-\pi, \pi[\quad \lim_{t \rightarrow \pi^-} \cos t = \cos(-\pi) \quad (\text{est paire})$$

$$= \cos(\pi) = f(\pi) = f(-\pi)$$

donc f est continue sur $[-\pi, \pi]$

$$\lim_{t \rightarrow (\pi)^+} f(t) = f(-\pi) = f'(-\pi) \in \mathbb{R} \text{ (existe)}$$

ainsi f est continue, de classe C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ d'après le théorème de Dirichlet sa série de Fourier converge Normalement donc uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

2. f est une fonction pair donc la fonction $x \mapsto f(x) \sin x$ est impair d'où $b_n(f) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(par parité)

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos t \cos nt \, dt \quad \text{intégration par parties}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\cos t \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos nt \, dt \quad \text{intégration par parties}$$

$$= -\frac{2n}{\pi n^2} \left[\sin nt \cos nt \right]_0^{\pi} + \frac{2n^2}{\pi n^2} \int_0^{\pi} \cos t \cos nt \, dt$$

$$a_n(f) = \frac{2d(-1)^{n-1}}{\pi n^2} \sin d\pi + \frac{d^2}{n^2} a_n(f) \quad (\cos n\pi = (-1)^n \forall n \in \mathbb{N}) \quad [6]$$

$$\left(1 - \frac{d^2}{n^2}\right) a_n(f) = (-1)^{n-1} \frac{2d \sin d\pi}{\pi n^2}$$

$$\text{donc, } a_n(f) = (-1)^{n-1} \frac{2d \sin d\pi}{\pi (d^2 - n^2)}$$

$$\text{pour } n=0 \quad a_0(f) = \frac{2 \sin d\pi}{\pi d}$$

3. La série de Fourier de f , $SF(f)$ converge uniformément donc converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$. D'où

$$\forall t \in \mathbb{R}: f(t) = \frac{\sin d\pi}{d\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2d \sin d\pi}{\pi (n^2 - d^2)} \cos(nt)$$

pour $t = \pi$, on a

$$\cos d\pi = \frac{\sin d\pi}{d\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2d \sin d\pi}{\pi (n^2 - d^2)}$$

$$\frac{\cos d\pi}{\sin d\pi} = \frac{1}{d\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2d}{\pi (n^2 - d^2)}$$

$$\cotan d\pi = \frac{1}{d\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2d\pi}{(d\pi)^2 - (n\pi)^2}$$

Poseons $x = d\pi$, puisque $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ donc $d\pi \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ donc $x \notin \pi\mathbb{Z}$ et on a

$$\cotan x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - (n\pi)^2}$$

EXERCICES

La fonction f est dérivable donc continue et par suite localement intégrable et comme elle est 2π -périodique donc développable en série de Fourier. Ainsi la solution y de l'équation différentielle $(E): y' + \beta y = f \quad (\beta \in \mathbb{R})$ s'écrit $y(x) = \frac{a_0(y)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(y) \cos nx + b_n(y) \sin nx)$.

$$\text{on a } y(x) = \frac{a_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(x) \cos nx + b_n(x) \sin nx) \quad \text{E}$$

$$\text{donc } \beta y(x) = \frac{\beta a_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\beta a_n(x) \cos nx + \beta b_n(x) \sin nx),$$

$$\text{et } y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-n a_n(x) \sin nx + n b_n(x) \cos nx).$$

De l'équation (E), on obtient

$$a_0(x) = a_0(x) \beta \Rightarrow a_0(x) = \frac{a_0(x)}{\beta}$$

$$\text{et } \begin{cases} -n a_n(x) + \beta b_n(x) = b_n(x) \\ n b_n(x) + \beta a_n(x) = a_n(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\beta n a_n(x) + \beta^2 b_n(x) = \beta b_n(x) \quad (1) \\ n^2 b_n(x) + n \beta a_n(x) = n a_n(x) \quad (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 b_n(x) + n^2 b_n(x) = \beta b_n(x) + n a_n(x) \quad (1)+(2) \\ n^2 b_n(x) + n \beta a_n(x) = n a_n(x) \quad (2) \end{cases}$$

d'où

$$(1)+(2) \Rightarrow \boxed{b_n(x) = \frac{\beta b_n(x) + n a_n(x)}{\beta^2 + n^2}}$$

$$(2) \Rightarrow n b_n(x) + \beta a_n(x) = a_n(x)$$

$$\Rightarrow \beta a_n(x) = a_n(x) - n b_n(x)$$

$$\Rightarrow \beta a_n(x) = a_n(x) - n \frac{\beta b_n(x) + n a_n(x)}{\beta^2 + n^2}$$

$$\Rightarrow a_n(x) = \frac{\beta^2 a_n(x) + n^2 a_n(x) - n \beta b_n(x) - n a_n(x)}{\beta (\beta^2 + n^2)}$$

$$\Rightarrow a_n(x) = \frac{\beta (\beta a_n(x) - n b_n(x))}{\beta (\beta^2 + n^2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n(x) = -\frac{\beta a_n(x) - n b_n(x)}{\beta^2 + n^2}}$$

Application: $f(x) = \cos 4x + \sin 3x$ et $\beta = 3$

8

ona $a_0(f) = 0 \Rightarrow a_0(y) = 0$ et $a_1(f) = a_2(f) = a_3(f) \neq 0$.

$$b_1(f) = b_2(f) = b_3(f) = 0 \text{ et } a_4(f) = b_3(f) = 1.$$

et $\forall n \geq 5, a_n(f) = b_n(f) = 0$.

donc $a_0(y) = a_2(y) = 0$

$$\text{pour } n=3 \quad a_3(y) = \frac{\beta \times a_3(f) - 3b_3(f)}{\beta^2 + 3^2} = \frac{3 \times 0 - 3 \times 1}{3^2 + 3^2} = \frac{-3}{2 \times 3^2} = -\frac{1}{6}$$

$$b_3(y) = \frac{\beta b_3(f) + 3a_3(f)}{\beta^2 + 3^2} = \frac{3 \times 1 + 3 \times 0}{3^2 + 3^2} = \frac{3}{2 \times 3^2} = \frac{1}{6}$$

$$\text{pour } n=4 \quad a_4(y) = \frac{\beta a_4(f) - 4b_4(f)}{\beta^2 + 4^2} = \frac{3 \times 1 - 4 \times 0}{9 + 16} = \frac{3}{25}$$

$$b_4(y) = \frac{\beta b_4(f) + 4a_4(f)}{3^2 + 4^2} = \frac{3 \times 0 + 4 \times 1}{9 + 16} = \frac{4}{25}$$

et $\forall n \geq 5, a_n(y) = b_n(y) = 0$

donc

$$y(x) = -\frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{6} \sin 3x + \frac{3}{25} \cos 4x + \frac{4}{25} \sin 4x$$