Exercice 1:

Soit $I_n = \int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,dx$. Montrons que $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2:

Soit f la fonction sur l'intervalle $[0,1]$ qui est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x \in \mathbb{Q} \\ 1 \ si \ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer à l'aide de la définition que f n'est pas intégrable.

Exercice 3:

Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$. On pose

$$u_n = \int_a^b \varphi(x)\sin(nx)dx.$$

(a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

(b) Montrer que cette propriété est conservée si φ est continue par morceaux sur $[a,b]$

Exercice 4:

Soit f une fonction réelle monotone définie sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer

(a) que f est bornée.

(b) a l'aide de la définition, que f est intégrable au sens de Riemann.

(c) Donner un encadrement de son intégrale.

(d) Application : $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = ax$ (oú $a \in \mathbb{R}_+^*$).

.
.

Exercice 5:

.
Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{-1}^{1} 2^x dx$, $I_2 = \int_0^{2\pi} \cos(nx)dx \ (n \in \mathbb{Z})$, $I_3 = \int_0^{2\pi} \cos^2(x)dx$,

$I_4 = \int_2^4 \frac{\ln(x)}{x} x dx$, $I_5 = \int_2^4 \frac{1}{x\ln(x)}dx$, $I_6 = \int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx$,

$I_7 = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2-5x+6}dx$, $I_8 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$, $I_9 = \int_0^{1/2} \frac{1}{x^4-1}dx$,