Exercice 1:

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Considérons $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction : $\Gamma : x \longmapsto \int_0^{\varphi(x)} f(t)dt$ est de classe C^1 et déterminer sa dérivée Γ'.

Exercice 2:

Calculer les limites des suites suivantes lorsque $n \to +\infty$:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^4}{n^5}, \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n\sqrt{4n^2 - k^2}}, \qquad c_n = n \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{k^2 + n^2}, \qquad d_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} (n^2 + k^2)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 3:

Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$G_1 = \int_0^1 \frac{1}{t(t-1)} dt \qquad G_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dx$$

$$G_3 = \int_0^{+\infty} x(\sin x)e^{-x} dx \qquad G_4 = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$$

Exercice 4:

On se propose d'intégrer dans $]0, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) : y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -9x^2$$

1. Déterminer $a > 0$ tel que $y_0(x) = ax$ soit une solution particulière de (E).
2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \dfrac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle : $(E_1) : z'(x) + \left(6x + \dfrac{1}{x}\right) z(x) = 1.$
3. Intégrer (E_1) sur $]0, +\infty[$.
4. Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5: **Équation de Bernoulli**

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation différentielle :

$$(E_b) : y'(x) + x^2 y(x) + x^5 y^2(x) = 0$$

1. Montrer que le changement de fonction : $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$ transforme l'équation (E_b) en l'équation différentielle : $(E_z) : z'(x) + x^2 z(x) + x^5 = 0.$
2. Intégrer (E_z) sur $\mathbb{R}$
3. Donner toutes les solutions de (E_b) définies sur $\mathbb{R}$.