

Exercice 1:

Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k$?

Exercice 2:

Étudier la nature de convergence de la série

$$\sum_{k \geq 1} \ln(\tanh k)$$

Exercice 3:

Déterminer tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum_{k \geq 1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} z^k$ soit absolument convergente.

Exercice 4:

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\begin{array}{ll} (i) \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}} & (ii) \quad u_n = \frac{1}{\ln(n^2 + 1)} \\ (iii) \quad u_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 2^n} & (iv) \quad u_n = \frac{n+1}{2^n + 8} \end{array}$$

Exercice 5:

Règle de d'Alembert

Étudier les séries de terme général suivant :

$$1. u_n = \frac{n!}{n^{an}}, a \in \mathbb{R} \quad 2. u_n = \frac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \quad 3. u_n = \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}, \alpha \in \mathbb{R}.$$