

الصفحة	1	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا المسالك الدولية - خيار فرنسية الدورة العادية 2017 - الموضوع -	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
5	★★		المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

NS 24F

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب) – خيار فرنسية	المعامل	9

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 4 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'exercice1 se rapporte aux structures algébriques.....(3,5pts)
- L'exercice2 se rapporte aux nombres complexes.....(3,5pts)
- L'exercice3 se rapporte à l'arithmétique.....(3pts)
- L'exercice4 se rapporte à l'analyse.....(10pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 : (3,5 points)

On rappelle que $(M_3(i), +, ')$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C}, +, ')$ est un corps commutatif.

On pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour tout (a, b) de i^2 , $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $E = \{M(a, b) / (a, b) \in i^2\}$

0.5 1-Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_3(i), +)$

0.5 2- On définit dans $M_3(i)$ la loi de composition interne T par :

$$(a, b, c, d) \in i^4 \quad M(a, b) T M(c, d) = M(a, b) + M(c, d)$$

Vérifier que E est stable dans $(M_3(i), T)$

3- soit j l'application de $\mathbb{C}^*$ dans E qui à tout nombre complexe non nul $a + ib$ (où $(a, b) \in i^2$) fait correspondre la matrice $M(a, b)$ de E

0.75 a) Vérifier que j est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, ')$ vers (E, T) et que $j(\mathbb{C}^*) = E^*$ où $E^* = E \setminus \{M(0, 0)\}$

0.75 b) En déduire que (E^*, T) est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre J

0.5 4- a) Montrer que la loi de composition interne " T " est distributive par rapport à la loi de composition interne " $+$ " dans E

0.5 b) En déduire que $(E, +, T)$ est un corps commutatif .

EXERCICE2 : (3,5 points)

Soit m un nombre complexe **non nul**.

Partie1 : On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : 2z^2 - 2(m + 1 + i)z + m^2 + (1 + i)m + i = 0$$

0.5 1- Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $D = (2im)^2$

0.5 2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

Partie2 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

On suppose que : $m \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, i\}$ et on pose : $z_1 = \frac{1+i}{2}(m+1)$ et $z_2 = \frac{1-i}{2}(m+i)$

On considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectifs $1, i, m, z_1$ et z_2

0.25 1-a) Vérifier que : $z_1 = iz_2 + 1$

0.5 b) Montrer que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre le point W d'affixe

$$w = \frac{1+i}{2} \text{ et d'angle de mesure } \frac{\pi}{2}$$

0.5 2- a) Vérifier que : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i \frac{m-1}{m-i}$

0.5 b) Montrer que si les points M, M_1 et M_2 sont alignés alors M appartient au cercle (G) de diamètre $[AB]$

0.75 c) Déterminer l'ensemble des points M pour que les points W, M, M_1 et M_2 soient cocycliques (remarquer que : $\frac{z_1 - w}{z_2 - w} = i$)

EXERCICE3 : (3points)

On admet que 2017 est un nombre premier, et que $2016 = 2^5 3^2 7$

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5

1- Soit le couple (x, y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que : $px + y^{p-1} = 2017$

0.25 a) Vérifier que : $p < 2017$

0.5 b) Montrer que : p ne divise pas y

0.75 c) Montrer que : $y^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ et en déduire que p divise 2016

0.5 d) Montrer que : $p = 7$

1 2- Déterminer, suivant les valeurs de p , les couples (x, y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant:

$$px + y^{p-1} = 2017$$

EXERCICE 4: (10 points)

Partie1 : On considère la fonction numérique f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } (\forall x \in]0, +\infty[) \quad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(on prend : $\|i\| = \|j\| = 2cm$)

- 0.25 1-a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0
- 0.5 b) Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0
- 0.5 c) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout x dans l'intervalle $]0, +\infty[$
- 0.5 2- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 0.25 b) Donner le tableau de variation de la fonction f
- 0.75 3- a) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.
- 0.5 b) Tracer la courbe (C) (On prend : $f(1)$; $0,7$ et $4e^{-3}$; $0,2$)

Partie2 : On considère la fonction numérique F définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_x^1 f(t) dt$$

- 0.25 1-Montrer que la fonction F est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$
- 0.5 2-a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) \quad \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}} dt = e^{-1} - x e^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt$$

- 0.25 b) Déterminer $\int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}} dt$ pour tout x de $]0, +\infty[$

- 0.5 c) Montrer que : $\int_0^1 f(t) dt = e^{-1}$

- 0.5 3-Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations : $x = 0$, $x = 2$ et $y = 0$

4- On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_n = F(n) - F(n+2)$

- 0.5 a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout entier

naturel n , il existe un réel v_n de l'intervalle $]n, n+2[$ tel que : $u_n = 2 \left(1 + \frac{1}{v_n}\right) e^{-\frac{1}{v_n}}$

- 0.25 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq 2 \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) e^{-\frac{1}{n+2}}$

- 0.25 c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Partie3 :

0.5 1-a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , il existe un nombre réel strictement positif unique a_n tel que : $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$

0.25 b) Montrer que la suite numérique $(a_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

0.25 c) Vérifier que : $\left(n \hat{=} \mathbb{N}^* \right) \quad - \frac{1}{a_n} + \ln \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}} = - \frac{1}{n}$

0.25 2-a) Montrer que : $\left(t \hat{=} [0, +\infty[\right) \quad 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$

0.5 b) Montrer que : $\left(x \hat{=} [0, +\infty[\right) \quad - \frac{x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

3- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4

0.5 a) Vérifier que : $a_4 \leq 1$, en déduire que $a_n \leq 1$ (On admettra que : $e^{\frac{3}{4}} \geq 2$)

0.5 b) Montrer que : $1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \leq 1$

(On pourra utiliser les questions 1-c) et 2-b) de la partie 3)

0.5 c) Montrer que : $\sqrt{\frac{n}{6}} \leq a_n$ (On pourra utiliser les questions 3-a) et 3-b)),
en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

0.5 d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{n}}$

FIN