الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية – خيار فرنسية

الدورة العادية 2018

-الموضوع-

NS 24F

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⵓⵍⴰⵏ
ⴷ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⵏⴰⵡⴰⵏ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات
والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات		المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية : " أ" و " ب" – خيار فرنسية		الشعبة أو المسلك

- La durée de l’épreuve est de 4 heures.
- L’épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l’ordre choisi par le candidat.

- L’exercice 1 se rapporte aux structures algébriques ……………(3.5 pts)
- L’exercice 2 se rapporte à l’arithmétique ……………………………(3 pts)
- L’exercice 3 se rapporte aux nombres complexes ……………….(3.5 pts)
- L’exercice 4 se rapporte à l’analyse …………………………………….(7.5 pts)
- L’exercice 5 se rapporte à l’analyse …………………………………….(2.5 pts)

L’usage de la calculatrice n’est pas autorisé

L’usage de la couleur rouge n’est pas autorisé

EXERCICE 1 :(3.5 points)

On rappelle que $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire, de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-2y\\y&x+2y\end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

0.25 1- Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}),+)$

0.25 2- a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

0.5 b) On pose $J=M(0,1)$. Montrer que (I,J) est une base de l'espace vectoriel réel $(E,+,.)$

0.5 3-a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

0.5 b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.

4- Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $M_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\right)\quad ;\quad \varphi(x+iy)=M(x+y,-y)=\begin{pmatrix}x+y&2y\\-y&x-y\end{pmatrix}$$

0.5 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

0.5 b) On pose $E^*=E-\{O\}$. Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

0.25 c) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

0.25 5- Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 2: (3 points)

Soit p un nombre premier tel que : $p=3+4k \quad (k\in\mathbb{N}^*)$

0.5 1- Montrer que pour tout entier relatif x , si $x^2\equiv 1\ [p]$ alors $x^{p-5}\equiv 1\ [p]$

2- Soit x un entier relatif vérifiant : $x^{p-5}\equiv 1\ [p]$

0.5 a) Montrer que x et p sont premiers entre eux.

0.5 b) Montrer que : $x^{p-1}\equiv 1\ [p]$

0.5 c) Vérifier que : $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$

0.5 d) En déduire que : $x^2\equiv 1\ [p]$

0.5 3-Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^{62}\equiv 1\ [67]$

EXERCICE 3 : (3.5 points)

Soit m un nombre complexe.

I- On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$z^2+(im+2)z+im+2-m=0$$

0.25 1-a) Vérifier que $\Delta=(im-2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)

0.5 b) Donner, suivant les valeurs de m , l'ensemble des solutions de l'équation (E_m)

0.5 2- Pour $m=i\sqrt{2}$, écrire les deux racines de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A , Ω , M et M' d'affixes respectifs $a=-1-i$, $\omega=i$, m et $m'=-im-1+i$

1-Soit R la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ qui transforme M en M'

0.25 a) Vérifier que Ω est le centre de R

0.5 b) Déterminer l'affixe b de B , où B est le point tel que : $A=R(B)$

0.5 2-a) Vérifier que : $m'-a=\dfrac{\omega-a}{\omega-b}(m-b)$

0.5 b) En déduire que les points A , M et M' sont alignés si et seulement si les points A , B , Ω et M sont cocycliques.

0.5 c) Montrer que l'ensemble des points M tel que les points A , M et M' soient alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

EXERCICE 4 :(7.5 points)

PARTIE I :

0.5 1-a) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)$; $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = x-\ln(1+x)$

0.5 b) On utilisant le changement de variable $u=t^2$, montrer que :

$$\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right);\quad \int_0^x \frac{t}{1+t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{1+\sqrt{u}}du$$

0.5 c) En déduire que : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)$; $\displaystyle\frac{1}{2(1+x)}\le\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\le\frac{1}{2}$

0.25 2- Déterminer : $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

PARTIE II :

On considère la fonction f définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par : $\begin{cases} f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\ln(1+x) & ;\ x\neq0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.25 1-a)Montrer que f est continue à droite en 0

0.5 b) Montrer que f est dérivable à droite en 0

(On pourra utiliser le résultat de la question I-2)

0.75 c) Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 2-a) Montrer que f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$, puis vérifier que :

$$\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)\quad;\quad f'(x)=\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

0.25 b) En déduire que f est strictement croissante sur $\left[0,+\infty\right[$

0.25 c) Vérifier que : $f\left(\left[0,+\infty\right[\right)=\left[1,+\infty\right[$

0.5 3- Représenter graphiquement la courbe (C)

(On construira la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0)

PARTIE III :

1- On considère la fonction g définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $g(x)=f(x)-x$

0.5 a) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)$; $0\le f'(x)\le\dfrac{1}{2}$

0.5 b) En déduire que g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ puis montrer que $g(]0,+\infty[)=]-\infty,1[$

0.25 c) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α sur $]0,+\infty[$

2-Soit a un réel de l'intervalle $]0,+\infty[$.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0=a$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\quad ;\quad u_{n+1}=f(u_n)$

0.25 a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad ;\quad u_n>0$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad ;\quad |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

0.5 c) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad ;\quad |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|a-\alpha|$

0.25 d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers α .

<u>EXERCICE 5</u> : (2.5 points)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt$

0.5 1- Montrer que F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

0.5 2-a) Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[)\quad ;\quad F(x)\geq x$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

0.5 b) Montrer que F est impaire, en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$

0.5 c) Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

0.5 d) Montrer que la bijection réciproque G de la fonction F est dérivable en 0, puis calculer $G'(0)$

FIN