Université Sultan Moulay Slimane
Faculté des Sciences et Techniques de Beni-Mellal
Département de Mathématiques

A. ABBASSI

Topologie et Analyse Fonctionnelle
Travaux Dirigés N°1
Première version:
Octobre, 2019

FST Beni-Mellal.

Université Sultan Moulay Slimane
Faculté des Sciences et Techniques de Beni Mellal

Année universitaire 2019/2020
LST Génie Mathématique (S5)

Travaux Dirigés N°1
Module Topologie et Analyse Fonctionnelle

Exercice 1 : Soit $\mathcal{C}([a,b])$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On pose, pour f et g de $\mathcal{C}([a,b])$, et p réel, $p \geq 1$,

$$d_p(f,g) = (\int_a^b |f(x)-g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}, \quad d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]}(|f(x)-g(x)|).$$

1- Vérifier que $d_1,\ d_2$ et d_∞ sont des distances sur $\mathcal{C}([a,b])$.
2- On désigne par $\mathcal{O}_1,\ \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_\infty$ les familles d'ouverts associées, respectivement, aux distances $d_1,\ d_2$ et d_∞. Montrer que $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_\infty$ et que ces inclusions sont strictes.

Exercice 2 : Soit (E,d) un espace métrique.
1- On pose, pour x et y de E,

$$\delta(x,y) = Arctan(d(x,y)).$$

a) Montrons que δ est une distance sur E.
b) Les distances d et δ sont-elles comparables? Sont-elles topologiquement équivalentes?
2- Plus généralement, soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application strictement croissante vérifiant

$$\varphi(0) = 0 \text{ et, pour tous } u \text{ et } v \text{ de } \mathbb{R}^+, \varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v).$$

On pose, pour tous x et y de E,

$$\delta(x,y) = \varphi \circ d(x,y).$$

Vérifier que δ est une distance sur E. Montrer que si φ est continue en 0, d et δ sont topologiquement équivalentes.

Exercice 3 : Montrer que si un espace topologique $(E,\mathcal{T})$ est séparé, alors pour toute partie A de E, l'ensemble des points d'accumulation de A est fermé dans E.

Exercice 4 : Montrer que si A est ouvert, alors

$$Int(Fr(A)) = \emptyset.$$

Est-ce vrai si A est fermé? Si A est quelconque?

Exercice 5 : Soient E un ensemble et

$$\mathcal{T}_c = \{E, \emptyset\} \cup \{F \in \mathcal{P}(E)/\ F^c \text{ est fini}\}.$$

1- Montrer que $\mathcal{T}_c$ est une topologie ($\mathcal{T}_c$ est dite topologie des cofinis)
2- Montrer que $(E,\mathcal{T}_c)$ est séparé si et seulement si E est fini.

3- Si $E = \mathbb{R}$, montrer que la topologie des cofinis est strictement moins fine que la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 : Soit $\beta = \{[x, +\infty[,\ x \in \mathbb{R}\}$.
1-a) Montrer que β constitue une base de topologie sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{F}$ la topologie engendrée par β.
b) Donner les ouverts et les fermés de $\mathcal{F}$.
2- Donner l'adhérence et l'intérieur d'un singleton, du segment $[0, 1]$ et de $\mathbb{R}^{+*}$.
3-a) Cette topologie est-elle séparée?
b) Est-elle séparable?
4-a) β est-elle dénombrable?
b) $\mathcal{F}$ possède-t-elle une base de topologie dénombrable?

Exercice 7 : Soit E un espace topologique contenant une partie dénombrable dense. Montrer que toute famille d'ouverts non vides et disjoints de E est finie ou dénombrable.

Exercice 8 : Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique, soit $A \subset E$ avec $\mathring{A} \neq \emptyset$.
1- Montrer que $\mathring{A}$, $Fr(A)$ et $E \backslash \bar{A}$ forment toujours une partition de E.
2- Montrer que si A est ouvert, alors $E \backslash Fr(A)$ est dense dans E.
3- Soit A un ouvert, montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.
Dans $\mathbb{R}$, déterminer des ouverts A et B tels que les ensembles $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$ soient tous distincts.
4- Déterminer des parties A de $\mathbb{R}$ dont la frontière a un intérieur vide.
5- Soit A et B deux parties de E. Montrer que:

$$Fr(A) \cap Fr(B) = \emptyset \Longrightarrow \overset{0}{\widehat{A \cup B}} = \mathring{A} \cup \mathring{B}.$$

Solutions série d'exercices

Exercice 1 :

1- Utilisez l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur un intervalle $[a,b]$, pour

$$p,q \in \mathbb{N}^*/\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

on a

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Inégalité de Minkowski:

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2- Soit $f,g \in \mathcal{C}([a,b])$, on a

$$\begin{aligned} d_1(f,g) &= \int_a^b |f(x)-g(x)|dx \\ &\leq (b-a)\sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| \\ &\leq (b-a)d_\infty(f,g). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} d_2(f,g) &= \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (b-a)^{\frac{1}{2}} d_\infty(f,g). \end{aligned}$$

Par suite

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_\infty \text{ et } \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_\infty.$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, $\forall f \in \mathcal{C}([a,b])$

$$\int_a^b |f(x)\times 1|dx \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

soit $l,k \in \mathcal{C}([a,b])$, posons

$$f = l-k$$

on a

$$\underbrace{\int_a^b |l(x)-k(x)|dx}_{d_1(l,k)} \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \times \underbrace{\left(\int_a^b |l(x)-k(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}}_{d_2(l,k)},$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2.$$

Pour montrer que les deux inégalités sont strictes, prendre comme exemple sur $[0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$g_n(x) = \begin{cases} 2n(x-\frac{1}{n}) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Soit $n \in n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} d_1(g_n, 0) &= \frac{1}{n}, \\ d_2(g_n, 0) &= \frac{2}{\sqrt{3n}} \text{ et } d_\infty(g_n, 0) = 2. \end{aligned}$$

Soit $r > 0$, prenons $n > \frac{1}{r}$, on voit qu'$\exists g_n \in B_1(0, r)$ car $d_1(g_n, 0) = \frac{1}{n} < r$, ce g_n n'est pas élément de $B_\infty(0, 1)$ car $d_\infty(g_n, 0) = 2 \Rightarrow \mathcal{O}_\infty \neq \mathcal{O}_1$.
D'où $\mathcal{O}_1 \subsetneq \mathcal{O}_\infty$. Ceci d'une part, d'autre part, la fonction définie par

$$h_n(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{n}}(x - \frac{1}{n}) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

vérifie

$$d_1(h_n, 0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ et } d_2(h_n, 0) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Soit $n > \frac{1}{r^2}$, $h_n \in B_1(0, r)$ mais $h_n \in B_2(0, 1) \Rightarrow \mathcal{O}_1 \subsetneq \mathcal{O}_2$.

Exercice 2 :

1- a) La symétrie et la séparation de δ sont faciles à vérifier. Il reste à montrer l'inégalité triangulaire, pour cela posons

$$\varphi(u) = arctg(u), \ u \in \mathbb{R}^+.$$

Montrons que

$$\varphi(u + v) \leq \varphi(u) + \varphi(v), \ \forall u, v \in \mathbb{R}^+.$$

Soit u et v de $\mathbb{R}^+$, deux cas se présentent,
le premier est le cas où

$$\varphi(u) + \varphi(v) \geq \frac{\pi}{2}$$

dans ce cas l'inégalité est vérifiée car

$$\varphi(u + v) \leq \frac{\pi}{2} \leq \varphi(u) + \varphi(v),$$

le deuxième cas est celui où

$$\varphi(u) + \varphi(v) < \frac{\pi}{2}$$

si $u = 0$, l'inégalité est vérifiée
sinon, on sait que

$$\begin{aligned} \varphi(u) + \varphi(\frac{1}{u}) &= \frac{\pi}{2} > \varphi(u) + \varphi(v), \ \forall v \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow \varphi(\frac{1}{u}) > \varphi(v), \ \forall v \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow \frac{1}{u} > v, \ \forall v \in \mathbb{R}^+ \text{ car } \varphi \text{ est croissante} \\ &\Rightarrow 0 \leq uv < 1, \ \forall v \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

D'autre part,

$$tg(\varphi(u) + \varphi(v)) = \frac{u + v}{1 - uv} \geq u + v,$$

puisque φ est croissante, on en déduit:

$$\underbrace{\varphi(tg(\varphi(u)+\varphi(v)))}_{\varphi(u)+\varphi(v)} \geq \varphi(u+v),$$

Conclusion: soit x, y et z de E, on prend

$$u = d(x,z), \text{ et } v = d(z,y),$$

alors

$$\begin{aligned}
\delta(x,y) &= \varphi(d(x,y)) \leq \varphi(\underbrace{d(x,z)}_{u} + \underbrace{d(z,y)}_{v}) \\
&\leq \varphi(d(x,z)) + \varphi(d(z,y)) \\
&\leq \delta(x,z) + \delta(z,y).
\end{aligned}$$

b- La distance δ est bornée par $\frac{\pi}{2}$, ce qui n'est pas forcément le cas de la distance d. Donc les distances d et δ ne sont pas comparables.

c- Utiliser la continuité de la fonction φ en 0 et la continuité de la fonction tg au même point 0.

Soit $\varepsilon > 0$, soit $a \in E$,

$*$ Comme φ est continue en 0, $\exists \alpha > 0 / \ \forall u$ vérifiant

$$0 \leq \overbrace{u}^{d(a,x)} \leq \alpha \Rightarrow \overbrace{\varphi(u)}^{\delta(a,x)} < \varepsilon,$$

autrement dit

$$\boxed{B_d(a,\alpha) \subset B_\delta(a,\varepsilon).}$$

$*$ La fonction $\theta \mapsto \tan\theta$ est continue en 0, $\exists \beta > 0 / \ \forall v$ vérifiant

$$0 \leq \overbrace{v}^{\delta(a,x)=\arctan(x)} \leq \beta \Rightarrow \overbrace{\tan(v)}^{d(a,x)} < \varepsilon,$$

autrement dit

$$\boxed{B_\delta(a,\beta) \subset B_d(a,\varepsilon).}$$

On conclut que les distances d et δ sont topologiquement équivalentes.

Exercice 3 : Par l'absurde, supposons que $Ac(A)$ n'est pas fermé, i.e.

$$\overline{Ac(A)} \neq Ac(A)$$

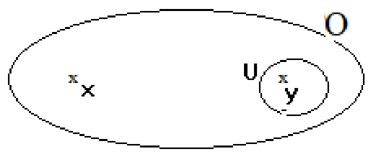
Soit

$$x \in \underbrace{\overline{Ac(A)} \backslash Ac(A)}_{\neq \emptyset},$$

soit O un ouvert contenant x, puisque $x \in \overline{Ac(A)}$

$$\Rightarrow O \cap Ac(A) \neq \emptyset,$$

soit $y \in O \cap Ac(A)$, nécessairement $y \neq x$, voir figure ci-dessous:



comme E est séparé, c-à-d on peut séparer deux points différents de E par des ouverts disjoints, il existe alors un ouvert U contenant y avec $x \notin U$.
Et comme O est un ouvert, on peut supposer $U \subset O$ (sinon considérer $U \cap O$).
On a $y \in Ac(A)$, $U \cap A$ contient un élément z différent de y, et puisque $z \in U$ donc nécessairement $x \neq z$ et $z \in O$.
Ainsi, $\forall O$ un ouvert contenant x, $\exists z \in U \cap A$ et $z \neq x$, c-à-d $x \in Ac(A)$.
contradiction avec l'hypothèse que $x \notin Ac(A)$.

Exercice 4 : Soit A un ouvert, supposons que

$$int(Fr(A)) \neq \emptyset.$$

Soit O un ouvert contenu dans $fr(A)$,

$$\begin{aligned} fr(A) &= \bar{A} \backslash \mathring{A} \\ &= \bar{A} \backslash A, \end{aligned}$$

soit $x \in O$, l'ouvert O contient x et ne recontre pas A, donc

$$x \notin \bar{A}$$

ce qui est contradictoire donc

$$int(Fr(A)) = \emptyset.$$

Même conclusion si A est fermé.
En effet,
soit O un ouvert contenu dans $fr(A)$,

$$\begin{aligned} fr(A) &= \bar{A} \backslash \mathring{A} \\ &= A \backslash \mathring{A}, \end{aligned}$$

On a $O \subset A$ et $O \cap \mathring{A} = \emptyset$,
d'où $O \cup \mathring{A}$ est un ouvert contenu dans A et strictement plus grand que $\mathring{A}$,
ce qui est impossible.
Donc

$$int(Fr(A)) = \emptyset.$$

Par contre c'est faux si A est quelconque, prendre $A = \mathbb{Q}$

$$int(Fr(\mathbb{Q})) = int(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Exercice 5 :

1- Soit $(F_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}_c$

$$\begin{aligned} (\cup_{i\in I} F_i)^c &= \cap_{i\in I} F_i^c \text{ fini} \Rightarrow \cup_{i\in I} F_i \in \mathcal{T}_c, \\ (\cap_{i=1}^n F_i)^c &= \cup_{i=1}^n F_i^c \text{ fini} \Rightarrow \cap_{i=1}^n F_i \in \mathcal{T}_c, \end{aligned}$$

$\mathcal{T}_c$ est donc une topologie sur E.

2- Soit $x \neq y$ dans E fini

$$\Rightarrow \{x\} \in \mathcal{T}_c \text{ car } \{x\}^c \text{ reste fini, de même } \{y\} \in \mathcal{T}_c,$$

et

$$\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$$

donc E est séparé.

Réciproquement, supposons $(E, \mathcal{T}_c)$ séparé, montrons que E est fini.

Soit $x \neq y$ dans E, $\exists U$ ouvert contenant x et $\exists V$ ouvert contenant y tel que,

$$U \cap V = \emptyset$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E &= (U \cap V)^c \\ &= U^c \cup V^c \text{ qui est fini.} \end{aligned}$$

3- Soit $U \in \mathcal{T}_c$

$$\Rightarrow U^c \text{ est fini,}$$

on a

$$U^c = \cup_{fini}\{x\} \text{ qui est fermé pour la topologie usuelle } \mathcal{T}_u,$$

donc U ouvert de $\mathcal{T}_u$,

Ainsi

$$\mathcal{T}_c \subset \mathcal{T}_u.$$

Cette dernière inclusion est stricte car $]0,1[\in \mathcal{T}_u$, mais $]0,1[\notin \mathcal{T}_c$.

Exercice 6 : Rappelons qu'un ensemble β est une base de l'espace topologique E s'il vérifie les deux conditions suivantes:
$*$ la réunion des éléments de β forme E,
$*$ l'intersection finie (on peut se limiter au cas de deux éléments) d'éléments de β peut s'écrire comme une réunion d'éléments de β.
1) Le premier point est vérifié, et on a

$$\mathbb{R} = \cup_{x\in\mathbb{R}}\{x\} \subset \cup_{x\in\mathbb{R}} \underbrace{[x, +\infty[}_{\in\beta} \subset \mathbb{R}.$$

Soit $x \neq y$,

$$[x, +\infty[\cap[y, +\infty[= [\max(x, y), +\infty[\in \beta,$$

donc β est une base topologique sur $\mathbb{R}$.
La topologie $\mathcal{F}$ engendrée par β s'écrit

$$\mathcal{F} = \{]x, +\infty[,\ x \in \mathbb{R}\} \cup \beta,$$

on peut voir que

$$]x, +\infty[= \cup_{n\in\mathbb{N}^*} \underbrace{[x - \tfrac{1}{n}, +\infty[}_{\in\beta}.$$

Par suite, les fermés de $\mathcal{F}$ sont

$$\{] - \infty, x],\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{] - \infty, x[,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

2) L'adhérence et l'intérieur

$$\overline{\{x\}} =] - \infty, x],\ Int(\{x\}) = \emptyset,\ x \in \mathbb{R},$$

et

$$\begin{cases} \overline{[0, 1]} =] - \infty, 1],\ Int([0, 1]) = \emptyset, \\ \overline{\mathbb{R}^{*+}} = \mathbb{R},\ Int(\mathbb{R}^{*+}) = \mathbb{R}^{*+}. \end{cases}$$

3) $\mathcal{F}$ n'est pas séparée car tout ouvert contenant x contient tous les réels supérieurs à x.
L'ensemble des rationnel $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$ par $\mathcal{F}$ puisque tout élément $[x, +\infty[$ de β contient un rationnel, donc $\mathcal{F}$ est séparable.

4) β n'est pas dénombrable.
$\mathcal{F}$ n'a pas de base dénombrable (par raisonnement par absurde).
En effet,
supposons qu'il existe une base β' pour $\mathcal{F}$ qui soit dénombrable.
Pour tout point $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $[a, +\infty[$ est alors réunion au plus dénombrable d'une famille d'ounert de β'.
Notons v_a l'un des ouverts de cette famille qui contient a.

Nous venons de construire, alors une injection de $\begin{array}{c} \mathbb{R} \rightharpoonup \beta' \\ a \rightharpoonup v_A \end{array}$,
mais ceci monte que β' ne peut pas être dénombrable puisque $\mathbb{R}$, qui n'est pas dénombrable, s'injecte dans β'. Contradiction

Conclusion: $\mathcal{F}$ n'a pas de base dénombrable.

Exercice 7 : Soit P une partie de $\mathbb{N}$, noton par

$$D = \{x_p,\ p \in P\},$$

une partie dénombrable dense dans E i.e.

$$\bar{D} = E.$$

Soit $(w_i)_{i\in I}$ une famuille d'ouverts de E avec

$$w_i \cap w_j = \emptyset,\ i \neq j$$

Montrons que l'ensemble I est soit fini, soit dénombrable
Puisque $\bar{D} = E$, donc pour tout indice $i \in I$, on a

$$w_i \cap D \neq \emptyset,$$

soit

$$P_i = \{n \in P/\ x_n \in w_i \cap D\},$$

$P_i \neq \emptyset$ et $P_i \subset \mathbb{N}$, il existe alors

$$P_{i_0} = \inf P_i.$$

On définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow \mathbb{N} \\ i &\longmapsto i_0 \end{aligned}$$

l'application φ est bien définie, elle est aussi injective car $w_i \cap w_j = \emptyset,\ i \neq j$.
Donc l'ensemble I est soit fini, soit dénombrable.

<u>Exercice 8</u> :

1) Par définition

$$\begin{aligned} E\backslash\bar{A} &= E \cap C^{\bar{A}} \\ &= C^{\bar{A}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Fr(A) &= \bar{A}\backslash\mathring{A} \\ &= \bar{A} \cap C^{\mathring{A}}, \end{aligned}$$

alors

(1) $$(E\backslash\bar{A}) \cap Fr(A) = \emptyset$$

Comme $\mathring{A} \subset \bar{A}$ donc

(2) $$(E\backslash\bar{A}) \cap \mathring{A} = \emptyset$$

Et par définition

(3) $$Fr(A) \cap \mathring{A} = \emptyset$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} C^{\bar{A}} \cup Fr(A) \cup \mathring{A} &= C^{\bar{A}} \cup ((\bar{A} \cap C^{\mathring{A}}) \cup \mathring{A}) \\ &= C^{\bar{A}} \cup (\underbrace{(\bar{A} \cup \mathring{A})}_{\bar{A}} \cap \underbrace{(C^{\mathring{A}} \cup \mathring{A})}_{E}) \\ &= C^{\bar{A}} \cup \bar{A} \\ &= E, \end{aligned}$$

donc d'après (1), (2) et (3) les trois parties $C^{\bar{A}}$, $Fr(A)$ et $\mathring{A}$ forment une partition disjointe de E.

2) A est un ouvert donc $\mathring{A} = A$, et on

$$\begin{aligned} \overline{E\backslash Fr(A)} &= \overline{(\bar{A} \cap C^{\mathring{A}})^c} \\ &= \overline{C^{\bar{A}} \cup \mathring{A}} \\ &= \overline{C^{\bar{A}}} \cup \bar{A}, \end{aligned}$$

or

$$E = C^{\bar{A}} \cup \bar{A} \subset \overline{C^{\bar{A}}} \cup \bar{A} \subset E,$$

donc

$$\overline{E\backslash Fr(A)} = E.$$

3) Soit $x \in A \cap \bar{B}$

(1) $$\Rightarrow x \in A \text{ et } \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap B \neq \emptyset.$$

En particulier A est un ouvert, donc

$$A \in \mathcal{V}(x) \text{ et } \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \in \mathcal{V}(x)$$

$$\begin{aligned}(1) \quad &\Rightarrow \quad \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap (A \cap B) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \quad x \in \overline{A \cap B}.\end{aligned}$$

L'inclusion peut être stricte, soit

$$A =]1,3[\cup]4,5[\text{ et } B =]2,4[,$$

on a

$$A \cap \bar{B} = [2,3[\text{ et } \bar{A} \cap B =]2,3],$$

les parties $A \cap \bar{B},\ \bar{A} \cap B,\ \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B}$ sont distincts,

$$\bar{A} \cap \bar{B} = [2,3] \cup \{4\} \text{ et } \overline{A \cap B} = [2,3].$$

4) Si on prend $A = [0,1[$,

$$\begin{aligned}Fr(A) &= \{0,1\} \\ &\Rightarrow Int(Fr(A)) = \emptyset.\end{aligned}$$

5) Soit A et B deux parties de E tel que

$$Fr(A) \cap Fr(B) = \emptyset$$

on a

$$\begin{aligned}Fr(A) \cap Fr(B) &= \bar{A} \cap \bar{B} \cap (C^{\mathring{A}} \cap C^{\mathring{B}}) = \emptyset \\ &\Rightarrow \bar{A} \cap \bar{B} \subset \underbrace{(C^{\mathring{A}} \cap C^{\mathring{B}})^c}_{\mathring{A} \cup \mathring{B}}.\end{aligned}$$

Soit $x \in Int(A \cup B)$, deux cas se présentent:
$*$ <u>Si $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$</u>, alors

$$x \in \mathring{A} \cup \mathring{B}.$$

$*$ <u>Si $x \notin \bar{A} \cap \bar{B}$</u>, alors $x \notin \bar{A}$ ou bien $x \notin \bar{B}$, le cas $x \notin \bar{A}$ et $x \notin \bar{B}$ n'est pas possible car

$$x \in Int(A \cup B) \subset \bar{A} \cup \bar{B}$$

supposons par exemple $x \notin \bar{A}$ et $x \in \bar{B}$, donc

$$\begin{aligned}\exists V_0 &\in \mathcal{V}(x),\ V_0 \cap A = \emptyset \\ &\Rightarrow V_0 \subset C^A,\end{aligned}$$

et puisque $x \in Int(A \cup B)$, alors

$$\exists W \text{ ouvert tq } x \in W \subset A \cup B,$$

notons par

$$O = V_0 \cap W$$

on a

$$x \in V_0 \cap W \subset B,$$

car

$$O \subset A \cup B \text{ et } O \subset C^A,$$

c'est-à-dire

$$x \in \mathring{B}.$$