Université Sultan Moulay Slimane
Faculté des Sciences et Techniques de Beni-Mellal
Département de Mathématiques

A. ABBASSI

Topologie et Analyse Fonctionnelle
Travaux Dirigés N°2
Novembre, 2020

FST Beni-Mellal.

Université Sultan Moulay Slimane
Faculté des Sciences et Techniques de Beni Mellal

Année universitaire 2020/2021
LST Génie Mathématique (S5)

Travaux Dirigés N°2
Module Topologie et Analyse Fonctionnelle

Exercice 1 : Soit $X = \mathbb{R}^3$ l'espace topologique euclidien. Soit Y la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ et

$$A = \{(x, y, z) \in X / \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z = a\},$$

où $a \in \mathbb{R}$ avec $|a| < 1$.
1- Trouver une base de la topologie induite sur A.
2- A est-il fermé? Est-il ouvert dans Y?
3- Déterminer $\mathring{A}_Y$.

Exercice 2 : Soient $\mathcal{T}_e$ la topologie euclidienne de $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}_d$ la topologie droite engendrée par les intervalles $[a, b[$, $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Etudier la continuité des fonctions suivantes:
1-

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d) \\ x &\longrightarrow \cos x \end{aligned}$$

2-

$$\begin{aligned} g : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) \\ x &\longrightarrow \frac{\log x}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

3-

$$\begin{aligned} h : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e \times \mathcal{T}_d) \\ x &\longrightarrow (e^x, \cos x) \end{aligned}$$

Exercice 3 : Soient A et B deux fermés de $\mathbb{R}$, f une application continue de $A \longrightarrow \mathbb{R}$ et g une application continue de $B \longrightarrow \mathbb{R}$.
On suppose que $\forall x \in A \cap B, \ f(x) = g(x)$, et on considère:

$$h : x \in A \cup B \longrightarrow h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

1- Montrer que h est continue.
2- Montrer que le résultat " h continue" n'est plus valable si on abandonne l'hypothèse "A et B fermés".
3- On suppose que A et B forment une partition de $\mathbb{R}$. Montrer que l'une de ces parties contient un point d'accumulation de l'autre et en déduire qu'il n'existe pas de partition de $\mathbb{R}$ en 2 fermés.

Exercice 4 : Soit $E = \prod_{i \in I} E_i$ un produit d'espaces topologiques muni de la topologie produit.
1- Montrer que, pour tout $i \in I$ et tout $A_i \subset E_i$,

$$\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} E_i \Leftrightarrow \bar{A}_i = E_i \ i \in I$$

2- Montrer que E est séparé si et seulement si chaque E_i est séparé.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On appelle graphe, épigraphe et hypographe de f les parties G, G^+ et G^- de $\mathbb{R}^2$,

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = f(x)\},$$
$$G^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > f(x)\},$$

et

$$G^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y < f(x)\}.$$

1- On suppose f continue. Montrer que G^+ et G^- sont des ouverts, et G un fermé de $\mathbb{R}^2$.
2- Déterminer $\overline{G^+}$, $\overline{G^-}$, $Fr(G^+)$ et $Fr(G^-)$.
3- On suppose le graphe G de f fermé dans $\mathbb{R}^2$. Peut-on en déduire que f est continue?

Exercice 6 : Soit f une application continue d'un esp. top. E dans un esp. top. F. Montrer que
1- E est homéomorphe au graphe de f.
2- Le graphe de f est fermé dans $E \times F$ si F est séparé.
3- Si $E = F$ alors $\{x \in E / f(x) = x\}$ est fermé si F est séparé.

Exercice 7 : (*Libre*) Soit $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un sous-espace de l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$ et $A \subset Y$ .Vérifier que:
1- $A'_Y = Y \cap A'$.
où A' est l'ensemble des points d'accumulation de A en tant que s.-esp. top. de Y.
2- $Y \cap \mathring{A} \subset \mathring{A}_Y$.
3- $Fr_Y(A) \subset Y \cap Fr(A)$.
4- Comparer $\bar{A}_Y$ et $\bar{A}$.

Exercice 8 : (*Libre*) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application d'un espace topologique E dans un espace topologique F. Soient A et B deux parties disjointes de E. Soient f_A et f_B les restrictions de f à A et B.
1- Si f_A et f_B sont continues, peut-on affirmer que f est continue?
2- Montrer que si A et B sont des ouverts (resp. fermés) la continuité de f_A et f_B entraîne celle de f.

Solutions série d'exercices

Exercice 1 :

1) La base de la topologie de A est l'ensemble B suivant:

$$B = \{B_o(x,r) \cap A/\ x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}.$$

2) a) Soit

$$X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in C_Y^A,$$

et soit

$$r < \frac{|z_0 - a|}{2},$$

alors

$$B_o(X_0, r) \cap A = \emptyset.$$

En effet,
supposons l'inverse $B_o(X_0, r) \cap A \neq \emptyset$, soit

$$w = (x, y, z) \in B_o(X_0, r) \cap A,$$

on a

$$\begin{aligned}(d(w, X))^2 &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \frac{(\overbrace{z_0 - a}^{z_0 - z})^2}{4} \\ &\Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \frac{3}{4}(z - z_0)^2 < 0,\end{aligned}$$

contradiction car $X_0 \notin A$, c-à-d $B_o(X_0, r) \cap A = \emptyset$
i.e.$B_o(X_0, r) \subset C_Y^A$.
Donc C_Y^A est un ouvert, par conséquent, A est fermé de Y.

3) Supposons que $\mathring{A}_Y \neq \emptyset$, soit $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathring{A}_Y$ alors

$$\begin{aligned}\exists V \text{ ouvert dans } Y \text{ tq } X_0 &\in V \subset A \\ &\Rightarrow \exists \varepsilon > 0,\ X_0 \in B(X_0, \varepsilon) \subset A,\end{aligned}$$

on prend

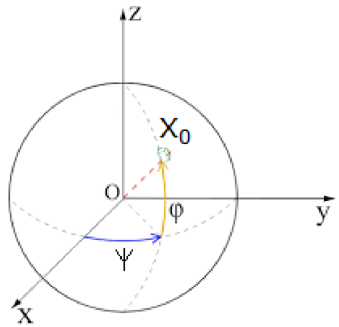
$$(x, y, z) \neq (x_0, y_0, a + \tfrac{\sqrt{\varepsilon}}{2})$$

on a

$$(x, y, z) \notin A \text{ car } z \neq a \text{ et } (x, y, z) \in B.$$

Utilisant les coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x_0 = \sin\varphi\cos\psi \\ y_0 = \sin\varphi\sin\psi \\ z_0 = \cos\varphi = a \end{cases}$$



Soit $\delta > 0$ et $X = (x, y, z)$ telle que

$$\begin{cases} x = \sin(\varphi + \delta)\cos\psi \\ y = \sin(\varphi + \delta)\sin\psi \\ z = \cos(\varphi + \delta) \end{cases}$$

on choisit δ assez petit de sorte que

$$\begin{cases} \cos(\varphi + \delta) \neq \cos\varphi \\ X \in B(X_0, \varepsilon) \end{cases}$$

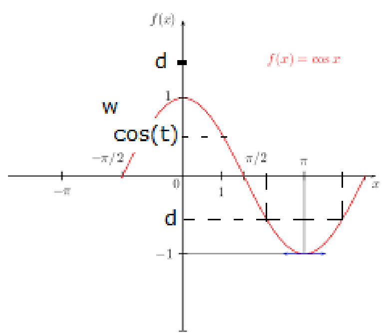
donc $X \in B(X_0, \varepsilon) \cap Y$ mais $X \notin A$ car $z = \cos(\varphi + \delta) \neq a$, ce qui est absurde, donc $\mathring{A}_Y = \emptyset$

Exercice 2 :

$*$ Montrons que f est continue au point π:

Soit $w \in \mathcal{V}(f(\pi))$ dans $\mathcal{T}_d$

$$\exists d < 0 \text{ tel que } [-1, d[\subset w$$



$$\Rightarrow \exists \alpha > 0, \text{ assez petit tel que } \cos(\pi + \alpha) = d$$

d'où

$$\begin{aligned} f(\underbrace{]\pi - \alpha, \pi + \alpha[}_{V}) &= [-1, d[, \\ &\Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}(\pi) \text{ dans } \mathcal{T}_e \text{ tel que } f(V) \subset w, \end{aligned}$$

donc f est continue au point π.

$*$ Soit $t \in [0, \pi[$, considérons

$$w = [\cos(t), d[, \ d > 1,$$

on a $w \in \mathcal{V}(f(t))$ dans $\mathcal{T}_d$, supposons que f est continue au point t, alors

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ assez petit tel que } f(]t-\varepsilon, t+\varepsilon[) \subset [\cos(t), d[,$$

car si $x > t$ avec $x \in]0, \pi[$

$$\Rightarrow \cos x \notin [\cos t, d[,$$

Absurde $\Rightarrow$ f non continue en t.
conclusion: les points de continuité de f sont les points $x_k = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2) Soit $]a, b[\in \mathcal{T}_e$, on a

$$]a, b[= \cup_{n \in \mathbb{N}^*} \underbrace{[a + \tfrac{1}{n}, b[}_{\in \mathcal{T}_d} \in \mathcal{T}_d,$$

donc

$$\mathcal{T}_e \subset \mathcal{T}_d.$$

D'autre part, la fonction g est continue sur $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ pour $\mathcal{T}_e$,donc pour tout $O \in \mathcal{T}_e$, $g^{-1}(O) \in \mathcal{T}_e \subset \mathcal{T}_d$.
En conclusion, g est continue sur D pour $\mathcal{T}_d$.

3) Rappelons qu'une fonction $J : (F, \mathcal{T}_F) \to (E = \prod_{\alpha \in I} E_\alpha, \mathcal{T}_{produit})$ est continue sur F ssi $\alpha \in I,\ J_\alpha = P_\alpha \circ J$ est continue.
Dans notre cas, la fonction

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

est continue et la fonction

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d) \\ x &\longmapsto \cos x \end{aligned}$$

est continue qu'aux points x_k. Donc la fonction h est continue en $x_k = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

<u>Exercice 3</u> :
1) Soit F un fermé de $\mathbb{R}$,
on a

$$\begin{aligned} h^{-1}(F) &= \{x \in A \cup B /\ h(x) \in F\} \\ &= \{x \in A /\ f(x) \in F\} \cup \{x \in B /\ g(x) \in F\} \\ &= f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F), \end{aligned}$$

on a $f^{-1}(F)$ est un fermé de A car f est continue, de même pour $g^{-1}(F)$ et puisque A et B sont des fermés de $\mathbb{R}$, alors $g^{-1}(F)$ et $f^{-1}(F)$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.
Or $A \cup B$ est un fermé de $\mathbb{R}$ et $g^{-1}(F)$ et $f^{-1}(F)$ sont inclus dans $A \cup B$, donc $g^{-1}(F)$ et $f^{-1}(F)$ sont des fermés de $A \cup B$.
C'est-à-dire $h^{-1}(F)$ est un fermé de $A \cup B$. Donc h est continue sur $A \cup B$.

2) Si on considère,

$$A = [-1, 0[,\ \ B = [0, 1],$$

soit la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

la fonction g définie par

$$\begin{aligned} g : B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Alors

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

vérifie

$$h^{-1}(\underbrace{]-\infty, -1]}_{\text{fermé de } \mathbb{R}}) = [-1, 0[\text{ qui n'est pas fermé de } A \cup B.$$

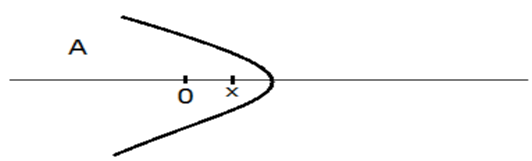
3) Soit A et B tels que

$$A \cap B = \emptyset \text{ et } A \cup B = \mathbb{R}.$$

Supposons par exemple $0 \in A$, alors

$$\mathbb{R}^+ \not\subseteq A \text{ ou } \mathbb{R}^- \not\subseteq A.$$

Supposons par exemple $\mathbb{R}^+ \not\subseteq A$



Soit

$$X = \{x \in \mathbb{R} / \ [0, x] \subset A\} \subset \mathbb{R}^+,$$

on a $X \neq \emptyset$ car $0 \in X$,
X est majoré sinon

$$X = \mathbb{R}^+ \subset A,$$

soit

$$x_0 = \sup X.$$

Premier cas: $x_0 \in A$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \ x_0 + \varepsilon \notin A \\ &\Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \ \underbrace{]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap B}_{\text{contient } x_0 + \frac{\varepsilon}{2}} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \ x_0 \in B'. \end{aligned}$$

Deuxième cas: $x_0 \in B$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \ x_0 - \varepsilon \in A \\ &\Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \ \underbrace{]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap A}_{\text{contient } x_0 - \frac{\varepsilon}{2}} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \ x_0 \in A'. \end{aligned}$$

Il reste à montrer qu'il n'existe pas de partition de $\mathbb{R}$ en deux fermés. Procédons par absurde et supposons qu'il existe deux ensembles A et B de $\mathbb{R}$ tels que:

$$(*) \qquad A \cup B = \mathbb{R} \text{ et } A \cap B = \emptyset.$$

D'après la question précédente, nous avons $A' \cap B \neq \emptyset$ ou $A \cap B' \neq \emptyset$,
supposons par exemple que $A' \cap B \neq \emptyset$,

$$A' \cap B \subset \bar{A} \cap B \Rightarrow \bar{A} \cap B \neq \emptyset,$$

Donc A ne peut pas être fermé, car sinon $A \cap B = \bar{A} \cap B \neq \emptyset$, ce qui sera contradictoire à $(*)$. D'où le résulat.

<u>**Exercice 4**</u> :

1) Il suffit de montrer que

$$\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \bar{A}_i.$$

On a

$$\overline{\prod_{i \in I} A_i} \subset \prod_{i \in I} \bar{A}_i,$$

en effet on a: $\prod_{i \in I} A_i \subset \prod_{i \in I} \bar{A}_i$ donc $\overline{\prod_{i \in I} A_i} \subset \overline{\prod_{i \in I} \bar{A}_i} = \prod_{i \in I} \bar{A}_i$.

Il reste à montrer que $\prod_{i \in I} \bar{A}_i \subset \overline{\prod_{i \in I} A_i}$,

soit $x \in \prod_{i \in I} \bar{A}_i$, soit $O \in \mathcal{T}_E \cap \mathcal{V}_E(x)$, montrons que

$$O \cap \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset.$$

Puisque $O \in \mathcal{T}_E \Rightarrow \exists J \subset I$ avec J fini et $\exists U_j \in \mathcal{T}_{E_j}$ pour $j \in J$ tel que

$$O = \prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} E_i.$$

On a

$$\begin{aligned} O \cap \prod_{i \in I} A_i &= \left(\prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} E_i \right) \cap \prod_{i \in I} A_i \\ &= \prod_{j \in J} (U_j \cap A_j) \times \prod_{i \in I \setminus J} A_i, \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \forall j &\in J, \ x_j \in \bar{A}_j \Rightarrow U_j \cap A_j \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \prod_{j \in J} (U_j \cap A_j) \neq \emptyset \end{aligned}$$

donc

$$x \in \overline{\prod_{i \in I} A_i}.$$

2) Supposons que chaque E_i est séparé,

soit $x \neq y$ dans E

$$\Rightarrow \exists i_0 \in I \text{ tel que } P_{i_0}(x) \neq P_{i_0}(y).$$

Comme E_{i_0} est séparé, donc il existe deux ouverts disjoints U et V de E_{i_0} tels que

$$P_{i_0}(x) \subset U \text{ et } P_{i_0}(y) \subset V.$$

Alors $P_{i_0}^{-1}(U)$ et $P_{i_0}^{-1}(V)$ sont deux ouverts disjoints de E contenant respectivement x et y, donc E est séparé.
Réciproquement, supposons que E est séparé,
soit

$$a = (a_i)_{i\in I} \in E = \prod_{i\in I} E_i$$

pour tout $j \in I$, E_j est homéomorphe à $E_j \times \prod_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} a_i$ qui est séparé comme sous-ensemble de E séparé, donc E_j est séparé $\forall j \in I$.

<u>Exercice 5</u> :
1) Les fonctions f_1 et f_2 ci-dessous sont continues

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto (f(x),y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,s) &\longmapsto s-t \end{aligned}$$

Considérons la fonction

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto y-f(x) \end{aligned}$$

la fonction ψ est continue comme composée de deux fonctions continues

$$\psi = f_2 \circ f_1.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y = f(x)\} \\ &= \psi^{-1}(\{0\}) \\ &\Rightarrow G \text{ est fermé de } \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G^+ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y > f(x)\} \\ &= \psi^{-1}(]0,+\infty[), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^- &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y < f(x)\} \\ &= \psi^{-1}(]-\infty,0[), \end{aligned}$$

donc G^+ et G^- sont ouverts de $\mathbb{R}^2$.
2) On montre que $Fr(G^+) = G = Fr(G^-)$ et que $\bar{G}^+ = G^+ \cup G$ et $\bar{G}^- = G^- \cup G$

3)Considérons par exemple la fonction

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0 \end{cases}$$

f n'est pas continue en 0, son graphe G est

$$G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*/xy=1\}\cup \underbrace{\{(0,0)\}}_{\text{fermé car } \mathbb{R}^2 \text{ séparé}},$$

qui est fermé comme réunion de deux fermés.

Exercice 6 : la fonction $f:E\to F$ continue, notons par G le graphe de f.
1) Soit ψ une application définie par:

$$\begin{aligned}\psi: E &\longrightarrow G\\ x &\longmapsto (x,f(x))\end{aligned}$$

* ψ est bien définie, surjective par construction
* ψ est également injective car pour x,y de E tel que $(x,f(x))=(y,f(y))\Rightarrow x=y$.
* ψ est continue car ses composantes id et f sont continues.
* Continuité de ψ^{-1}:
Soit $O\in\mathcal{T}_E$, montrons que $\psi(O)\in\mathcal{T}_G$ induite sur G,

$$\begin{aligned}\psi(O) &= \{(x,f(x)/\ x\in O\}\\ &= G\cap(\underbrace{O\times F}_{\text{ouvert de } E\times F})\\ &\Rightarrow \psi(O)\in\mathcal{T}_G\end{aligned}$$

On conclut que ψ est un homéomorphisme.
2) Montrons que G^cest un ouvert.
Soit $(x,y)\in G^c$, alors $f(x)\neq y$
F est séparé

$$\Rightarrow \exists U\in\mathcal{T}_F\cap\mathcal{V}(y),\ \exists V\in\mathcal{T}_F\cap\mathcal{V}(f(x)) \text{ tel que } U\cap V=\emptyset,$$

d'où

$$\underbrace{f^{-1}(V)\times U}_{\text{ouvert}}\in\mathcal{V}(x,y) \text{ avec } f^{-1}(V)\times U\subset G^c,$$

car

$$\forall(x,y)\in f^{-1}(V)\times U,\ f(x)\neq y.$$

3) Si $E=F$ séparé, alors

$$P=\{x\in E/f(x)=x\} \text{ est fermé}$$

car l'application

$$\begin{aligned}\varphi: E &\longrightarrow E\times F\\ x &\longmapsto (x,f(x))\end{aligned}$$

étant continue, alors

$$\varphi^{-1}(G\cap\Delta)=P \text{ est fermé},$$

où

$$\Delta = \{(x, x),\ x \in E\},$$

est un fermé de $E \times E$.