Université Sultan Moulay Slimane
Faculté des Sciences et Techniques de Beni-Mellal
Département de Mathématiques

A. ABBASSI

Topologie et Analyse Fonctionnelle

Travaux Dirigés N°3

Novembre, 2020

FST Beni-Mellal.

Université Sultan Moulay Slimane — Année universitaire 2019/2020
Faculté des Sciences et Techniques de Beni Mellal — LST Génie Mathématique (S5)

Travaux Dirigés N°3
Module Topologie et Analyse Fonctionnelle

Exercice 1 : Soient f la fonction définie sur $]0,1]$ par $f(x)=\sin(1/x)$ et

$$A=\{(x,\sin(1/x))/\ x\in]0,1]\}$$

son graphe, que l'on suppose muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$.
1- Montrer que $\bar{A}$ est connexe.
2- Montrer que $\bar{A}$ n'est pas connexe par arcs. On pourra raisonner par l'absurde, considérer un arc α ayant une extrémité dans A et l'autre dans $\bar{A}\backslash A$ et le réel

$$t_0=\sup\{t\in[0,1]/\ \alpha(t)\in\bar{A}\backslash A\}.$$

Exercice 2 : On note

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x\in\mathbb{Q},\ y\in[0,1]\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\ y\in[-1,0]\}.$$

Montrer que A est connexe et non localement connexe.

Exercice 3 : *Topologie quotient*
Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et $P:E\longrightarrow E/\mathcal{R}$ la surjection canonique.
1- Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{A}=\{A'\in\mathcal{P}(E/\mathcal{R})/\ P^{-1}(A')\in\mathcal{T}\},$$

est une topologie sur $E/\mathcal{R}$.
2- Soit F un espace topologique et $f:E/\mathcal{R}\longrightarrow F$ une application. Montrer que:
f est continue ssi $f\circ P$ est continue.

Exercice 4 : Soit A et B deux parties non vides connexes d'un espace topologique E tel que $\overline{A}\cap B\neq\emptyset$.
Montrer que $A\cup B$ est connexe. (On pourra raisonner par l'absurde)

Exercice 5 : *Topologie initiale et finale*
1- Soient E un ensemble non vide et $(F_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et $f_i:E\longrightarrow F_i$ une famille d'applications.
a- Montrer que parmi les topologies sur E qui rendent continues les f_i, il y en a une moins fine appelée *topologie initiale associée aux* f_i.
b- Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application $f:F\longrightarrow E$ soit continue, où F est un espace topologique et E muni de la topologie initiale.
c- Donner un exemple de topologie initiale.

2- Enoncer et démontrer un résultat "dual" en prenant $f_i : F_i \longrightarrow E$. La topologie obtenue sur E, s'appelle, dans ce cas, topologie finale.
Donner un exemple de topologie finale.

Exercice 6 : Soient X un espace régulier, A une partie compacte de X et B une partie fermée de X ne rencontrant pas A.
Montrer qu'il existe un voisinage de A et un voisinage de B sans point commun.

Exercice 7 : Soit $(K_n)_n$ une suite décroissante de compacts non vides d'un espace séparé E. Montrer que $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ n'est pas vide, et que pour tout ouvert W contenant K, il existe un K_{n_0} contenu dans W.

Solutions série d'exercices

Exercice 1 :

1) On montre que l'adhérence de A est

$$\bar{A} = A \cup \underbrace{\{0\} \times [-1,1]}_{I},$$

l'ensemble $A = g(]0,1])$ où g est l'application à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie sur $]0,1]$ par

$$g(x) = (x, f(x)),$$

la fonction g ainsi définie est continue sur $]0,1]$ car ses composantes le sont, comme $]0,1]$ est connexe alors A est connexe et par suite $\bar{A}$ est également connexe.

2) Par l'absurde, supposons que $\bar{A}$ soit connexe par arcs, il existe alors un arc $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ tel que:

$$\alpha(0) = (0,0) \in I \text{ et } \alpha(1) = (1, \sin 1) \in A,$$

soit

$$t_0 = \sup\{t \in [0,1] / \ \alpha(t) \in I\},$$

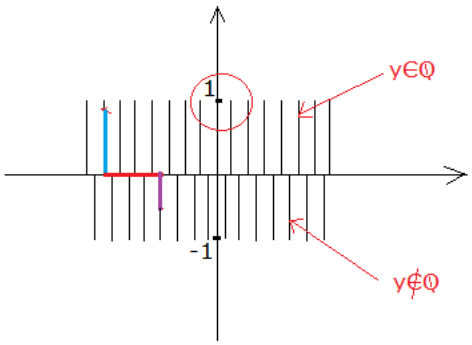
puisque $\alpha_1(0) = 0 \Rightarrow t_0 \geq 0$,

par définition de la borne sup et par continuité de α_1, on a

$$\alpha_1(t_0) = 0 \text{ et } \lim_{t \to t_0^+} \alpha_1(t) = 0.$$

Or, $\forall t > t_0$, $\alpha_2(t) = \sin(\frac{1}{\alpha_1(t)})$ et la limite précédente $\Rightarrow \alpha_2$ n'a pas de limite en $t_0^+ > 0$.
Ce qui est impossible car α_2 est continue sur $]0,1]$. D'où la contradiction.

Exercice 2 : L'ensemble A contient l'axe des abscisses $\mathbb{R}$, car y peut prendre la valeur 0 dans les deux sous-parties de A. Deux points quelconques de A sont connectés par au plus trois segments: un horizontal et deux verticaux, voir figure, donc A est connexe par arcs donc il est connexe.



Mais A n'est pas localement connexe: si O est un voisinage du point $(0,1)$ dans A contenu dans le demi-plan supérieur ouvert, pour tout irrationnel $\alpha > 0$ assez petit, l'ensemble O_- des points de O (resp. O_+) dont l'abscisse est $< \alpha$ (resp. $> \alpha$) est non vide et O_- et O_+ sont deux ouverts de O dont la réunion est égale à O, donc O ne peut pas être connexe.
Donc le point $(0,1)$ ne possède pas de voisinage connexe, donc A n'est pas localement connexe.

Exercice 3 :

1) $*$ les ensembles $\emptyset$ et $E/\mathcal{R} = P(E)$ sont des éléments de $\mathcal{A}$

$**$ Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ des éléments de $\mathcal{A}$

on a

$$P^{-1}(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \cap_{i=1}^{n} \underbrace{P^{-1}(A_i)}_{\in \mathcal{T}} \in \mathcal{T}$$

donc

$$\cap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$$

$***$ Soit $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}$ où I ensemble quelconque on a

$$P^{-1}(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} \underbrace{P^{-1}(A_i)}_{\in \mathcal{T}} \in \mathcal{T}$$

donc

$$\cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$$

$\mathcal{A}$ est la topologie la plus fine qui rend continue l'application P. On l'appelle topologie quotient.

2) On a

$$\underbrace{(E, \mathcal{T}) \to^{P} (E/\mathcal{R}, \mathcal{A}) \to^{f} (F, \mathcal{T}')}_{\longrightarrow f\circ P}$$

Si f est continue alors $f \circ P$ est aussi continue comme composé de deux fonctions continues.
Réciproquement, supposons $f \circ P$ continue
alors pour tout $w \in \mathcal{T}'$ on a $(f \circ P)^{-1}(w) \in \mathcal{T}$

$$\Rightarrow \quad \forall w \in \mathcal{T}',\ P^{-1}(f^{-1}(w)) \in \mathcal{T}$$

$$\Rightarrow \quad \forall w \in \mathcal{T}',\ f^{-1}(w) \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \quad f \text{ est continue.}$$

Exercice 4 : Supposons $A \cup B$ non connexe. Il existe alors deux fermés U et V de $A \cup B$ disjoints et non vides, tels que

$$U \cup V = A \cup B.$$

Les parties $U \cap A$ et $V \cap A$ sont fermées dans A et disjointes, de réunion A, puisque A est connexe, l'une d'elles est égale à A et l'autre est vide.
Nous avons donc soit $A \subset U$, soit $A \subset V$.
Supposons que $A \subset U$. De même, nous avons soit $B \subset U$ soit $B \subset V$.
Mais si l'on avait $B \subset U$, $A \cup B$ serait contenu dans U et V serait ègale au vide, donc $B \subset V$.
Plus précisément $A = U$ et $B = V$ car sinon $A \cup B$ ne serait pas égale à $U \cup B$.
Puisque $U = A$ est fermé, alors $\bar{A} \cap B = A \cap B$ (qui est supposé non vide) donc $A \cup B$ est connexe, ce qui contredit l'hypothèse de départ,

Exercice 5 :
1) a) $f_i : E \longrightarrow F_i$ une famille d'applications, $(F_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques.
soit

$$\sum = \cup_{i\in I} \{f_i^{-1}(w_j)/\ w_j \in \mathcal{T}_i\}.$$

Si O est une topologie sur E qui rend continues toutes les applications f_i, alors $\sum \subset O$, par suite O contient la topologie $\mathcal{T}(\sum)$ engendrée par $\sum$, donc $\mathcal{T}(\sum)$ répond à la question.

Rappelons que:

$$\mathcal{T}(\sum) = \{\cup_{qlq}(\cap_{finie} A)/\ A \in \sum\},$$

dans le sens où, $w \in \mathcal{T}(\sum) \Leftrightarrow \exists I$ quelconque tel que pour tout $i \in I$, $\exists K_i$ fini telle que

$$w = \cup_{i\in I}(\cap_{j\in K_i} f_j^{-1}(w_j)) \text{ avec } w_j \in \mathcal{T}_i.$$

b) On a

$$\underbrace{(F,\mathcal{T}) \to^{f} (E,\mathcal{T}(\sum)) \to^{f_i} (F_i,\mathcal{T}_i)}_{\to f_i\circ f}$$

Montrons que f est continue ssi $(f_i \circ f)_i$ sont continues
Puisque $\forall i \in I$, f_i est continue donc si on suppose que f est continue, alors $f_i \circ f$ est continue.
Réciproquement, supposons $\forall i \in I$, $f_i \circ f$ est continue
soit $w \in \mathcal{T}(\sum)$,

$$w = \cup_{k\in K}(\cap_{j\in J_k} f_j^{-1}(w_j)) \text{ avec } w_j \in \mathcal{T}_i \text{ et } J_k \text{ fini } \forall k \in K,$$

on a

$$\begin{aligned} f^{-1}(w) &= \cup_{k\in K}(\cap_{j\in J_k} f^{-1} \circ f_j^{-1}(w_j)) \\ &= \cup_{k\in K}(\cap_{j\in J_k} \underbrace{(f_j \circ f)^{-1}(w_j)}_{\in \mathcal{T}}) \end{aligned}$$

d'où

$$\forall w \in \mathcal{T}(\sum), f^{-1}(w) \in \mathcal{T}$$

f est donc continue.
c) La topologie produit est un exemple de topologie initiale

$$P_i : \prod_i E_i \to E_i$$

2) $(F_i,\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques.
Si $\mathcal{T}$ est une topologie sur E qui rend continue les applications f_i, alors $A \in \mathcal{T}$, $f_i^{-1}(A) \in \mathcal{T}_i$ $\forall i \in I$
soit

$$\mathcal{A} = \{A \in P(E)/\ f_i^{-1}(A) \in \mathcal{T}_i \forall i \in I\}$$

$\mathcal{A}$ est une topologie qui rend continue les f_i, en plus $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ répond à la question.
La topologie quotient est un exemple de topologie finale.

Exercice 6 : $(X,\mathcal{T})$ espace topologique régulier
Soit $a \in A$, alors $a \notin B$,
puisque X est régulier, alors $\exists O_a \in \mathcal{V}(a) \cap \mathcal{T}$ et $\exists w_a \in \mathcal{V}(B) \cap \mathcal{T}$ tel que

$$O_a \cap w_a = \emptyset,$$

donc

$$\begin{cases} A \subset \cup_{a\in A} O_a \\ A \text{ compact} \end{cases} \Rightarrow \exists a_1, a_2, ..., a_n \in A \text{ tel que } A \subset \cup_{i=1}^n O_{a_i},$$

l'ouvert $V = \cap_{i=1}^n w_{a_i} \in \mathcal{V}(B)$, et l'ouvert $W = \cup_{i=1}^n O_{a_i} \in \mathcal{V}(A)$ avec

$$V \cap W = \emptyset$$

donc A et B sont topologiquement disjoints.
La topologie quotient est un exemple de topologie finale.

Exercice 7 :
Supposons $k = \emptyset$, alors

$$K_0 = \cup_{n\geq 1}(K_0 \backslash K_n)$$

L'espace topologique K_0 est compact et $K_0 \backslash K_n$ est un ouvert de K_0, donc il existe $n_1, n_2, .., n_p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\begin{aligned} K_0 &= \cup_{i=1}^{n}(K_0 \backslash K_{n_i}) \\ &= K_0 \backslash K_{n_p} \\ &\Rightarrow K_{n_p} = \emptyset, \end{aligned}$$

ce qui est absurde.