Université Sultan Moulay Slimane
Faculté des Sciences et Techniques de Beni-Mellal
Département de Mathématiques

A. ABBASSI

Topologie et Analyse Fonctionnelle
Travaux Dirigés N°4
Première version:
Novembre, 2020

FST Beni-Mellal.

Université Sultan Moulay Slimane
Faculté des Sciences et Techniques de Beni Mellal

Année universitaire 2020/2021
LST Génie Mathématique (S5)

Travaux Dirigés N°4
Module Topologie et Analyse Fonctionnelle

Exercice 1 : Soit E un espace localement compact et $F \subset E$.
1- Montrer que F est fermé ssi $F \cap K$ est fermé pour tout compact K de E.
2- Montrer que l'intersection de deux sous-espaces localement compacts est un sous-espace localement compact.

Exercice 2 : Soit X un espace topologique compact et $P : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ la surjection canonique. Montrer que $X/\mathcal{R}$ est séparé ssi P est fermée.

Exercice 3 : Soit X un espace séparé, A et B deux compacts disjoints de X. Montrer que A et B possèdent deux voisinages disjoints.

Exercice 4 : (Libre) *Applications "Parfaites"*
Soit X et Y deux espaces topologiques et $p : X \longrightarrow Y$ une application.
1- Montrer que si p est fermée alors, pour tout $S \subset Y$ et pour tout U contenant $p^{-1}(S)$, il existe un ouvert V contenant S tel que $p^{-1}(V) \subset U$.
2- Montrer que si p est fermée, continue et surjective alors Y est normal si X est normal.
3- Si en plus chaque fibre $p^{-1}(y)$ ($y \in Y$. Une fibre est l'image réciproque d'un point) et compacte. Montrer, alors que Y est séparé (resp. régulier) si X est séparé (resp. régulier).
Une application qui vérifie ces conditions est dite parfaite.

Exercice 5 : Soient X un esp. top. séparé, $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et $f : X \longrightarrow \prod_{i\in I} Y_i$ une application surjective.
Montrer que si les composantes de f sont parfaites alors il en est de même pour f.

Exercice 6 : *Compactifié d'Alexandroff*
Soient $(E, \mathcal{O})$ un espace localement compact et $w \notin E$. Soit $E' = E \cup \{w\}$. On considère $\mathcal{O}' \subset \mathcal{P}(E')$, telle que:

$$\mathcal{O}' = \{\{w\} \cup C_E^K,\, K \text{ compact de } E\} \cup \mathcal{O}.$$

1- Montrer que:
a- $\mathcal{O}'$ définit une topologie sur E', et que $\mathcal{O}$ est la topologie induite par $\mathcal{O}'$ sur E.
b- $(E', \mathcal{O}')$ est séparé et compact.
E' est appelé le compactifié d'Alexandroff de E.
2- Soient E_1' et E_2' deux compactifiés d'Alexandroff de E. Montrer que E_1' et E_2' sont isomorphes.

Exercice 7 : (Libre) *Espace dénombrable à l'infini*

Soit E un espace localement compact. Soit $\tilde{E} = E \cup \{w\}$ le compactifié d'Alexandroff de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) E est réunion d'une famille dénombrable de compacts.

(ii) Il existe une suite $(K_n)_{n\geq 0}$ de compacts tels que pour tout $n \geq 0$ on ait $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ et $E = \bigcup_{n\geq 0} K_n$.

(iii) Dans $\tilde{E}$ le point w admet une base dénombrable de voisinages.

Un espace qui vérifie ces conditions est dit dénombrable à l'infini.

Solutions série d'exercices

Exercice 1 :

1) Si F est fermé alors pour tout compact K, $F \cap K$ est aussi fermé

Réciproquement, soit $x \in C_E^F$, x admet un voisinage compact V_x car E est localement compact. $F \cap V_x$ est un fermé de E et $F \cap V_x \subset V_x$ qui est compact, donc $F \cap V_x$ est également compact, or $x \notin F \cap V_x$, donc puisque $\{x\}$ et $F \cap V_x$ sont disjoints, alors ils sont topologiquement disjoints. L'espace E est localement compact, donc il est régulier, ie $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ tq $V \cap (F \cap V_x) = \emptyset$

$$\Rightarrow F \cap (\underbrace{V \cap V_x}_{\in \mathcal{V}(x)}) = \emptyset,$$

par suite $x \notin \bar{F}$

2) Utilisez la définition.

Exercice 2 :

Soit F un fermé de X alors F est compact car X est compact.

La surjection P est continue et $X/\mathcal{R}$ séparé, donc $P(F)$ est un compact de $X/\mathcal{R}$, par suite $P(F)$ est un fermé de $X/\mathcal{R}$

donc P est une application fermée.

Réciproquement, supposons que P est fermée, et montrons que $X/\mathcal{R}$ est séparé:

Soit $P(x)$ et $P(y) \in X/\mathcal{R}$, avec $P(x) \neq P(y)$.

Donc $S_1 = \{P(x)\}$ et $S_2 = \{P(y)\}$ sont fermées dans $X/\mathcal{R}$ car P fermée et $\{x\}$ et $\{y\}$ fermés dans X.

La continuité de l'application P entraîne que $P^{-1}(S_1)$ et $P^{-1}(S_2)$ sont fermés de X compact, donc $P^{-1}(S_1)$ et $P^{-1}(S_2)$ sont compacts.

Or $P^{-1}(S_1) \cap P^{-1}(S_2) = \emptyset$, donc (voir exercice 3) il existe deux ouverts disjoints U_1 et U_2 tels que

$$P^{-1}(S_i) \subset U_i, \ i = 1, 2$$

donc (voir exercice 4) il existe deux ouverts V_1 et V_2 tels que

$$\begin{cases} S_i \subset V_i, \ i = 1, 2 \\ P^{-1}(V_i) \subset U_i, \ i = 1, 2 \end{cases}$$

D'où

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

Exercice 3 :

A et B sont deux compacts disjoints

1er cas: $A = \{x\}$

pour tout $y \in B, \ x \neq y$.

Comme X est séparé, alors $\exists V_y$ ouvert $\in \mathcal{V}(x), \ \exists V'_y$ ouvert $\in \mathcal{V}(y)$ tel que

$$V_y \cap V'_y = \emptyset.$$

Par suite

$$B \subset \cup_{y \in B} V'_y.$$

Or B est compact, alors $\exists y_1, y_2..., y_n$ tel que

$$B \subset \cup_{i=1}^{n} V'_{y_i}.$$

Soit

$$V = \cap_{i=1}^{n} V_{y_i} \text{ et } V' = \cup_{i=1}^{n} V'_{y_i}$$

V est un ouvert $\in \mathcal{V}(x)$ et V' est un ouvert $\in \mathcal{V}(B)$ et on a $V \cap V' = \emptyset$.
<u>2ème cas</u>: A compact quelconque et B compact
Soit $x \in A$, donc $x \notin B$, d'après ce qui précède: $\exists V_x$ ouvert $\in \mathcal{V}(x)$ et V'_x est un ouvert $\in \mathcal{V}(B)$ et on a $V_x \cap V'_x = \emptyset$.
On a

$$A \subset \cup_{x \in A} V_x.$$

Or A est compact, alors $\exists x_1, x_2..., x_m$ tel que

$$A \subset \underbrace{\cup_{i=1}^{m} V_{x_i}}_{V},$$

et soit

$$V' = \cap_{i=1}^{m} V'_{x_i}$$

donc V ouvert $\in \mathcal{V}(A)$ et V' est un ouvert $\in \mathcal{V}(B)$ et on a $V \cap V' = \emptyset$.

<u>**Exercice 5**</u> : Soient X un esp. top. séparé, $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et $f : X \longrightarrow \prod_{i\in I} Y_i$ une application surjective.
Montrer que si les composantes de f sont parfaites alors il en est de même pour f.

Soit $y = (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Y_i$, on a

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= \{x \in X/\ f(x) = y\} \\ &= \{x \in X/\ f_i(x) = y_i,\ i \in I\} \\ &= \cap_{i\in I} f_i^{-1}(y_i) \end{aligned}$$

et $\cap_{i\in I} f_i^{-1}(y_i)$ est compact car f_i est parfaite,
donc $f^{-1}(y)$ est compact.
Montrons que f est fermé, ie montrons que pour tout fermé F on a

$$\overline{f(F)} \subset f(F)$$

par contraposée,
Soit $y \in \prod_{i\in I} Y_i$ tel que $y \notin f(F)$, montrons que

$$y \notin \overline{f(F)}.$$

Le compact $K = f^{-1}(y)$ vérifie

$$K \cap F = \emptyset$$

or

$$K = \cap_{i\in I} K_i \text{ où } K_i = f_i^{-1}(y_i),$$

soit $i_0 \in I$ tel que $k_i = K_i \cap K_{i_0} \cap F \subset K_{i_0}$

K_{i_0} compact donc il existe J fini dans I tq

$$\cap_{j\in J} k_j = \emptyset$$

ie

$$(\cap_{j\in J} K_j) \cap F \cap K_{i_0} = \emptyset$$

où encore

$$\cap_{j\in J_0} K_j \cap F = \emptyset \text{ où } J_0 = J \cup \{i_0\}$$

$\cap_{j\in J_0} K_j \subset C_X^F = w$ ouvert.
Il faut montrer que $\forall i \in J_0,\ \exists U_j$ ouvert contenant K_j tel que $\cap U_j \subset w$.

Exercice 6 :
1) a) $*$ L'ensemble vide et l'ensemble E' sont des éléments de $\mathcal{O}'$
$**$ Soit $(A_i)_{i\in I},\ I$ quelconque, une suite d'éléments de $\mathcal{O}'$
il existe une suite de compacts $(K_i)_{i\in I}$ telle que

$$\begin{aligned} \forall i &\in I,\ A_i = \{w\} \cup C_E^{K_i} \\ &\Rightarrow \cup_{i\in I} A_i = \{w\} \cup C_E^{\cap_{i\in I} K_i} \end{aligned}$$

$\cap_{i\in I} K_i$ est un fermé dans K_i compact, donc $\cap_{i\in I} K_i$ est compact et par suite $\cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{O}'$.
$***$ Soit $(A_i)_{i=1}^n$, un suite finie d'éléments de $\mathcal{O}'$

$$\cap_{i=1}^n A_i = \{w\} \cup C_E^{\overbrace{\cup_{i=1}^n K_i}^{compact}} \in \mathcal{O}'.$$

On en déduit que $\mathcal{O}'$est une topologie sur E'.
Il reste à montrer que $\mathcal{O}$ est la topologie induite par $\mathcal{O}'$ sur E.
Soit $O \in \mathcal{O}'$, on a

$$O \cap E = \left\{ \begin{array}{c} O \text{ si } O \in \mathcal{O} \\ (\{w\} \cup C_E^K) \cap E = \underbrace{C_E^K}_{\in \mathcal{O}} \quad \text{sinon} \end{array} \right.$$

dans les deux cas, on a $O \cap E \in \mathcal{O}$.
Inversement, si $O \in \mathcal{O}$ alors $O \in \mathcal{O}'$.
b) Montrons que E' est séparé
Soit $x, y \in E'$ avec $x \neq y$
il suffit de prendre $x \in E$ et $y = w$ car $(E, \mathcal{O})$ est séparé, $x \in E$ localement compact donc $\exists K$ compact $\underline{\in \mathcal{V}(x)}$
or $\{w\} \in C_E^K$ qui est ouvert, donc

$$\exists V \in \mathcal{V}(x), \exists V' \in \mathcal{V}(w) tq V \cap V' = \emptyset.$$

Il reste à montrer que $(E', \mathcal{O}')$ est compact.
Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E', on a $w \in E'$, alors

$$\exists i_0 \in I /\ w \in O_{i_0}$$

$O_{i_0} \in \mathcal{O}' \Rightarrow \exists K$ compact de E tel que $C_E^K \subset O_{i_0}$

$$\Rightarrow K \subset \cup_{i\in I} O_i$$

K étant compact, donc il existe J fini tq, $K \subset \cup_{j\in J} O_j$, par suite

$$E' \subset O_{i_0} \cup (\cup_{j\in J} O_j).$$

2) considérer l'application

$$\begin{aligned} h : E_1 &\longrightarrow E_2 \\ x \longmapsto h(x) &= \begin{cases} x & \text{si } x \in E \\ w_2 & \text{si } x = w_1 \end{cases} \end{aligned}$$

h est bijective continue et ouverte, h est donc un homéomorphisme de E_1 dans E_2.