

Travaux dirigés : Séries Entières
Série 2

Exercice 1

1. Etudier la convergence des séries entières suivantes :

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\ln(n)} x^n$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} x^n$$

2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \pi^{\sqrt{n^2+7n}} x^{7n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \pi^{E(n\pi)} x^n$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\beta)}{n} x^n$$

$$(4) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}} x^n$$

Exercice 2

En utilisant les séries entières, calculer la somme de la série numérique suivante :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n + n3^n}{(n-1)n5^n}$$

Exercice 3

Soit $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge.
2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$
4. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} dt, \quad \forall x \in]-1, 1[$$

Exercice 4

On considère la série complexe de rayon de convergence R et de somme

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$$

où les a_n sont définis par

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

1. Montrer que R est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$
2. Montrer que pour tout $z \in D(0, R)$

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$

3. En déduire la valeur de R , ainsi que l'expression de a_n en fonction de n

Exercice 5

On se propose dans cet exercice de calculer $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n)!}$. Pour cela, on introduit

3. En déduire la valeur de R , ainsi que l'expression de a_n en fonction de n

Exercice 5

On se propose dans cet exercice de calculer $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n)!}$. Pour cela, on introduit

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n)!} x^{3n}.$$

On note $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

1. Calculer $1 + j^k + j^{2k}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.
2. Donner le développement en série entière de $e^x + e^{jx} + e^{j^2x}$.
3. En déduire $S(x)$
4. Puis la valeur de la somme $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n)!}$.



$$e^{j^2x}$$

Série 2

Exo 1

1) L'étude de la CV des séries entières suivantes :

$$1 - \sum n^{lu(n)} x^n$$

Calculons tout d'abord le rayon de convergence R de cette série

Prendons $a_n = n^{lu(n)}$ et appliquons le critère de D'Alembert

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{|a_n|} &= (n^{lu(n)})^{1/n} \\ &= n^{\frac{lu(n)}{n}} \\ &= e^{\frac{lu(n)}{n}} \\ &= e^{\left(\frac{lu(n)}{\sqrt{n}}\right)^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1\end{aligned}$$

$$R = \frac{1}{e} = \frac{1}{n} = 1$$

Donc la série converge sur $] -1, 1[$ et diverge pour $|x| > 1$

Pour $|x| = 1$ c'est-à-dire $x = 1$ ou $x = -1$

Dans ces deux cas le terme général ne tend pas vers 0

- 1 -

Série 2

2)

Ce qui montre que la série diverge pour $x=1$ et pour $x=-1$

4/ la série CVssi $x \in]-1,1[$.

$$2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} x^n$$

On sait qu'une série et sa série dérivée partagent le même rayon de convergence, donc

$\sum \frac{\sin(n)}{n^2} x^n$, $\sum \frac{\sin(n+1)}{n+1} x^n$ et $\sum \frac{n+1}{n+2} \sin(n+2) x^n$ ont le même rayon de convergence

$$\text{or } \left| \frac{n+1}{n+2} \sin(n+2) \right| \sim |\sin(n+2)|$$

Donc la série $\sum \sin(n+2) x^n$ partage le même rayon de convergence avec les trois séries précédentes
Donc il suffit de calculer le

Série 2

1)

Rayon de convergence de la série
 $\sum \sin(n+2)x^n$

on a $(\sin(n+2))_n$ est bornée donc $R \geq 1$

Si on remplace x par 1, on obtient

$\sum \sin(n+2)$ qui est divergente

puisque $(\sin(n+2))_n$ ne tend pas

vers 0, ~~car~~ on conclut que

$R \leq 1$. D'où $R = 1$

et par suite la série converge

sur $] -1, 1[$ et diverge pour $|x| > 1$

Reste à voir pour $|x| = 1$ ie

$x = 1$ ou $x = -1$ Dans ce cas

la série converge

✓ la série converge si
 $x \in [-1, 1]$

Série 2

EX01

2 Détermination du rayon de Convergence

$$1 - \sum \pi^{\sqrt{n^2+7n}} x^n$$

Prenons $a_n = \pi^{\sqrt{n^2+7n}}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\pi^{\sqrt{n^2+7n}} \right)^{1/n} = \pi^{\frac{\sqrt{n^2+7n}}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi$$

$$R' = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\pi}$$

$$R = \sqrt[n]{R'} = \sqrt[n]{\frac{1}{\pi}}$$

$$2 \sum \pi^{E(n\pi)} x^n$$

Prenons $a_n = \pi^{E(n\pi)}$

$$\text{On a } n\pi - 1 \leq E(n\pi) \leq n\pi$$

$$\Rightarrow \pi - \frac{1}{n} \leq \frac{E(n\pi)}{n} \leq \pi$$

$$\Rightarrow \pi^{\pi - \frac{1}{n}} \leq \pi^{\frac{E(n\pi)}{n}} \leq \pi^\pi$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^{\frac{E(n\pi)}{n}} = \pi^\pi$$

$$R = \frac{1}{\rho} = \pi^{-\pi}$$

Série 2

EX01

2)

$$3. \sum_n \frac{\cos(n\beta)}{n} x^n$$

On sait qu'une série et sa série dérivée ont le même rayon de convergence R .

Donc les deux séries $\sum_n \frac{\cos(n\beta)}{n} x^n$ et

$\sum_n \cos((n+1)\beta) x^n$ ont le même rayon

de convergence or $\sum_n \cos((n+1)\beta) x^n$ de convergence de la série $\sum_n \cos((n+1)\beta) x^n$

vaut 2 en effet:

$(\cos((n+1)\beta))_n$ est bornée donc

$R \geq 1$ et si on remplace n

par $n+1$ on obtient $\sum_n \cos((n+1)\beta)$

qui est divergente puisque

$(\cos((n+1)\beta))_n$ ne tend pas vers 0

$$\therefore R = 1$$

Série 2

Exo 1

2)

$$4- \sum n^{(-1)^{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}} x^n$$

on a

$$\frac{1}{n} \leq n^{(-1)^{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}} \leq n$$

Or les rayons de convergence des séries $\sum \frac{x^n}{n}$ et $\sum nx^n$ valent 1

D'où $R = 1$

- 6 -

Série 2

EX02

Calculer la somme suivante:

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n + n 3^n}{(n-1)n 5^n}$$

On a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n + n 3^n}{(n-1)n 5^n} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-1)n} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n \right) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} \left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n \right) \end{aligned}$$

On a les rayons de convergence des séries entières suivantes $\sum \frac{x^n}{n-1}$ et $\sum \frac{x^n}{n}$ valent 1, donc les séries numériques $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} \left(\frac{2}{5}\right)^n$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ sont convergentes. Posons $S_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} \left(\frac{2}{5}\right)^n$, $S_2 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ et $S_3 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n$. Alors $S = S_1 - S_2 + S_3$.

Série 2

EX02

Définissons les fonctions suivantes:

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} x^n, \quad \forall x \in]-1, 1[$$

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \forall x \in]-1, 1[$$

Alors $S_1 = f\left(\frac{2}{5}\right)$, $S_2 = g\left(\frac{2}{5}\right)$

et $S_3 = f\left(\frac{3}{5}\right)$. D'où

$$S = f\left(\frac{2}{5}\right) - g\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right).$$

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} \\ &= x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-x)^n}{n} \\ &= -x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-x)^n}{n} \\ &= -x \ln(1-x) \end{aligned}$$

Série 2

EX02

On a aussi

$$\begin{aligned}g(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\&= -x + \left(x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) \\&= -x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\&= -x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-x)^n}{n} \\&= -x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-x)^n}{n} \\&= -x - \ln(1-x)\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}S &= f\left(\frac{2}{5}\right) - g\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) \\&= -\frac{2}{5} \ln\left(1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{2}{5} + \ln\left(1 - \frac{2}{5}\right) - \frac{3}{5} \ln\left(1 - \frac{3}{5}\right) \\&= \underbrace{-\frac{2}{5} \ln\left(\frac{3}{5}\right) + \ln\left(\frac{3}{5}\right)}_{\frac{3}{5} \ln\left(\frac{3}{5}\right)} - \frac{3}{5} \ln\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{2}{5} \\&= \frac{3}{5} \ln\left(\frac{3}{5}\right) - \frac{3}{5} \ln\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{2}{5} \\&= \frac{3}{5} \left(\ln\left(\frac{3}{5}\right) - \ln\left(\frac{2}{5}\right) \right) + \frac{2}{5} \\S &= \frac{3}{5} \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{5}\end{aligned}$$

9

Serie 2

EX03

$$\text{On a } a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt > 0$$

1) Montrer la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ CV

Tout d'abord on a $a_n > 0$, donc la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ est ~~alternee~~ ^{série} Pour montrer que cette ~~série~~ suite est convergente, il suffit de démontrer que la suite $(a_n)_n$ décroît vers 0.

$$\begin{aligned} \text{On a } a_{n+1} - a_n &= \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} dt - \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \\ &= \int_0^1 \left(\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \right) dt \\ &= \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n}_{\neq 0} \underbrace{\left(\frac{1+t^2}{2} - 1\right)}_{\neq 0} dt \end{aligned}$$

d'où $a_{n+1} - a_n < 0$ et la suite est décroissante.

Série 2

EX03

Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

On a

$$0 \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq t^2 \leq t$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{t^2+1}{2} \leq \frac{1+t}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(\frac{t^2+1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1+t}{2}\right)^n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt &\leq \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n dt \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &\leq \left(\frac{2}{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

✓ La série $\sum (-1)^n a_n$ converge

2) Mais la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge

on soit que $(1-t)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1+t^2}{2} \geq t$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \geq t^n \Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \geq \int_0^1 t^n dt$$

11

Série 2

Ex 03

D'où $a_n \geq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} > 0$

or $\sum \frac{1}{n+1}$ ~~est~~ diverge

on conclut que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est divergente.

3) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$

D'après la première question, on a $R \geq 1$ et d'après la deuxième question $R \leq 1$. D'où

$$R = 1.$$

4) Mq $\sum a_n x^n = \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} dt, \forall x \in]-1, 1[.$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n dt \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n x^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} x \right)^n dt \end{aligned}$$

Soit $(f_n)_n$ la suite de $f \stackrel{\text{ct}_s}{=} \text{définie}$
par $f_n :]-1, 1[\xrightarrow{\text{12}} \mathbb{R}$
 $\xrightarrow{\text{12}} \left(\frac{1+t^2}{2} x \right)^n$

Série 2

EX03

$\sum f_n \subset V$ normalement

$$\text{On a } |f_n(t)| \leq \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n |x|^n \\ \leq |x|^n \quad (\text{ne dépend pas de } t)$$

or $\sum |x|^n \subset V$ (car $|x| < 1$)

Donc $\sum f_n$ converge normalement
Puis elle converge uniformément
La chose qui nous permet d'intégrer
l'intégrale et $\sum$.

D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+t^2}{2} x \right)^n \right) dt \\ = \int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{1+t^2}{2} x} dt \\ = \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} dt$$

CQFD

Série 2

Exo 4

Δ Mq R est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$

Par récurrence montrons que

$$|a_n| \leq 4^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

on a: $|a_0| = 1 \leq 4^0$

$$|a_1| = 3 \leq 4^1$$

Supposons que la proposition de récurrence est vraie à l'ordre n et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. on a:

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &= |3a_n - 2a_{n-1}| \\ &\leq 3|a_n| + 2|a_{n-1}| \\ &\leq 3 \cdot 4^n + 2 \cdot 4^{n-1} \\ &\leq 3 \cdot 4^n + 4^n \\ &\leq 4^{n+1} \end{aligned}$$

4/c $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq 4^n$

Serie 2

Ex 04

Considérons maintenant la série entière $\sum 4^n z^n$, son rayon vaut $\frac{1}{4}$ et on a $|a_n| \leq 4^n$ d'où

$$R \geq \frac{1}{4}.$$

2) Montrer pour tout $z \in D(0, R)$ on a:

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$

On a pour tout $z \in D(0, R)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

$$= a_0 + a_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$$

$$= 1 + 3z + \sum_{n=2}^{+\infty} (3a_{n-1} - 2a_{n-2}) z^n$$

$$= 1 + 3z + \sum_{n=2}^{+\infty} (3a_{n-1} z^n - 2a_{n-2} z^n)$$

Puisque les deux séries $\sum_{n=2}^{+\infty} 3a_{n-1} z^n$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} (-2a_{n-2}) z^n$ sont convergentes alors

Série 2

Exo 4

$$\begin{aligned}
 f(z) &= 1 + 3z + 3z \sum_{n=2}^{+\infty} c_{n-1} z^{n-1} - 2z^2 \sum_{n=2}^{+\infty} c_{n-2} z^{n-2} \\
 &= 1 + 3z + 3z \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n - 2z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \\
 &\quad (\text{glissement d'indice})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\cancel{= 1 + 3z} \\
 &= 1 + 3z \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n \right) - 2z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \\
 &= 1 + 3z f(z) - 2z^2 f(z)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1 - 3z + 2z^2) f(z) = 1$$

$$\forall z \in D(0, R), \text{ on a } 1 - 3z + 2z^2 \neq 0$$

$$(\text{sinon on obtient } 0 = 0 \cdot f(z) = 1)$$

$$\text{on conclut que } f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$

3) Dédution

$$\begin{aligned}
 \text{on a: } 2z^2 - 3z + 1 &= 2z(z-1) - (z-1) \\
 &= (2z-1)(z-1) \\
 &= (1-2z)(1-z)
 \end{aligned}$$

Serie 2

EX04

Donc

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(1-2z)(1-z)} \\ &= \frac{\alpha}{1-2z} + \frac{\beta}{1-z} \\ &= \frac{\alpha - \alpha z + \beta - 2\beta z}{(1-2z)(1-z)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ (\alpha + \beta) + \beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta = -1 \text{ et } \alpha = 2$$

$$\text{et } f(z) = \frac{2}{1-2z} - \frac{1}{1-z}$$

$$\text{Pour } |z| < 1, \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

→ série de rayon de convergence
égal à 1

$$\text{Pour } |2z| < 1 \text{ i.e. } |z| < \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{1-2z} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n \text{ de rayon de convergence égal à } \frac{1}{2}$$

17

Série 2

Ex 04

On obtient

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n+1} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \text{ sous la forme}$$

de la somme de deux séries entières
dont leurs rayons sont différents

$$\text{et donc } R = \inf\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{et } f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2^{n+1} - 1) z^n$$

$$\text{et } a_n = 2^{n+1} - 1$$

Vérification

$$a_0 = 2^1 - 1 = 1$$

$$a_1 = 2^2 - 1 = 3$$

Série 2

EX05

1

NB. On peut vérifier facilement que le rayon de convergence de la série $\sum \frac{1}{(3n)!} z^{3n}$ vaut $+\infty$

On a $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$

Calculons $1 + j^k + j^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$

on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists q \in \mathbb{N} \neq 0$

$k = 3q + r$ avec $0 \leq r \leq 2$

et $r \in \mathbb{N}$,

Les cas possibles sont

- $r = 0$

- $r = 1$

- $r = 2$

si $r = 0$, $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j^{3q} + j^{6q}$
 $= 1 + (j^3)^q + (j^6)^q$
 $= 3$

si $r = 1$, $1 + j^k + j^{2k} = 1 + (j^{3q})j^r + (j^{6q})j^{2r}$
 $= 1 + j + j^2$
 $= 0$

si $r = 2$, $1 + j^k + j^{2k} = 1 + (j^{3q})j^2 + (j^{6q})j^4$
 $= 0$

15

Exos

Série 2

2)

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{jx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^n}{n!} x^n$$

$$e^{j^2 x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{2n}}{n!} x^n$$

Et comme les trois séries ont le même rayon de convergence $R = +\infty$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned} e^x + e^{jx} + e^{j^2 x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + j^n + j^{2n}}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(3n)!} x^{3n} \\ &= 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} x^{3n} \\ &= 3 S(x) \end{aligned}$$

3) $S(x) = \frac{1}{3} (e^x + e^{jx} + e^{j^2 x})$

4) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = S(1) = \frac{1}{3} (e + e^j + e^{j^2})$

Fin

20