Université Moulay Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques

A. U. 2019/2020
LST Maths Appl
Module M147

Travaux dirigés : Suites et séries de fonctions
Série 1

Exercice 1
Soit $f_n(x) = x^n(1-x)$, $x \in [0,1]$, $n \geq 1$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in N}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer sans intégration $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n(1-x)dx$.

Exercice 2
Soit la suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}$$

1. Etudier la convergence uniforme de f_n sur $[0,1]$.
2. Vérifier que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$$

Exercice 3
Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}dx.$$

I=[0,1]

Exercice 4

Soit $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \to \frac{\ln(x+n)}{n^2}$, $n \geq 1$.

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq1} f_n$.
   On note $S = \sum_{n\geq1} f_n$.
2. Montrer que S est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$ et exprimer pour tout $x \in [0,+\infty[$ $S'(x)$ et $S''(x)$ sous forme de sommes de séries. les 3 conditions
3. En déduir que S est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et que S est concave sur $[0,+\infty[$.

Exercice 5
Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$. Déterminer l'ensemble D_f.

Exercice 6
Soit $f_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq0} f_n(x)$.

Scanned with CamScanner

2. Soit $S(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$, calculer $S(x)$.
3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice (Facultatif)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} (1-\frac{x}{n})^n & si\ x \in [0,n[\\ 0 & sinon \end{cases}$. On note que f_n est continue en n.

1. Construire les graphes de f_1, f_2, f_3 et f_4.
2. Vérifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers $f :\to e^{-x}$ sur $[0, +\infty]$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geq 0$, on pose $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$
   (a) Montrer que la fonction g_n est positive sur $[0, +\infty[$.
   (b) Monter que pour $n \geq 2$ la fonction g_n est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Dans les questions c et d, on prend $n \geq 2$
   (c) Montrer que la fonction g_n admet sur $[0, +\infty[$ un maximum atteint en un certain réel x_n de $]0, n[$.
   (d) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout x de $[0, +\infty[$, $0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{ne}$.
   (e) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0, +\infty[$

Scanned with CamScanner

Serie 1

Exercice 1

1) Mq $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

On a $\forall n \geq 1$

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^n(1-x)$$

Calculons tout d'abord la limite simple de cette suite

- Si $x=0$, $f_n(0)=0$ et $(f_n(0))_n$ est une suite c^{te} donc

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$$

- Si $x=1$, $f_n(1)=0$, et $(f_n(1))_n$ est une suite c^{te}, donc

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(1) = 0$$

Scanned with CamScanner

Série 1

Exo 1

si $x \in]0,1[$, alors

$0 \leq |f_n(x)| = x^n(1-x) \leq x^n$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$

Conclusion

$(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

Etudions maintenant la convergence uniforme de cette suite

on a f_n est de classe C^∞ et $[0,1]$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$ alors pour chaque $n \geq 1$, f_n atteint ses bornes.

Calculons $\sup\limits_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)|$

Ou f est la limite simple qui est nulle (1)

Scanned with CamScanner

Exo1

$f_n(x) - f(x) = f_n(x) = x^n(1-x) = x^n - x^{n+1}$

$f_n'(x) = n x^{n-1} - (n+1)x^n = (n+1)x^{n-1}\left(\frac{n}{n+1} - x\right)$

$f_n'(x) = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = \frac{n}{n+1}$

Il est claire que f_n atteint sa borne supérieure en $x_n = \frac{n}{n+1}$

donc $0 \leq \|f_n - f\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$

$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$

$\leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{cv} 0$

D'où $(f_n)_n$ converge unif vers la fonction nulle sur [0,1]

2) calculer sans intégration

$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 x^n(1-x)\,dx$

D'après la 1ère question on a

$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x)\right)dx =$

Scanned with CamScanner

Exo2

1) Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $[0,1]$ avec $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow \frac{nx}{1+n^2x^4}$$

Toujours on commence par la CV simple car si une suite de f^{ctes} converge unif, alors elle conv simplement vers la même limite.

- si $x=0$, $f_n(0)=0 \quad \forall n \geq 1$

donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$

- si $x \in]0,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{1+n^2x^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{n^2x^4}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nx^3} = 0$$

Donc $(f_n)_n$ converge simplement

Scanned with CamScanner

EXO2

vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
si $(f_n)_n$ converge unif, alors
elle converge vers la f^{ct} nulle.

~~Dt~~ca

Prenons $x_n = \frac{1}{n}$, $(x_n)_n$ est une
suite de pts de $[0,1]$ et verifie
$f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{1+n^2(\frac{1}{n})^4} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$ qui ne
tend pas vers 0. Alors
$(f_n)_n$ ne converge pas sur $[0,1]$.

2) verifier que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx$$

on a $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{nx}{1+(nx^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2n}{1+}$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Arctg}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$$

et $\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx = 0$ CQFD

Scanned with CamScanner

Série 1

EX 03

Determiner $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{n e^x}{n+x}\,dx$

Posons $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $n \geq 1$

$x \longrightarrow \frac{n e^x}{n+x}$

Determinons $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$

En général on ne peut pas intervertir l'intégrale et la limite mais on sait (d'après le cours) si $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ et comme les f_n sont intégrable sur $[0,1]$, alors on peut permetter l'intégrale et la limite

- Soit $x \in [0,1]$, alors

$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n e^x}{n+x} = e^x$

Donc $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f définie

Scanned with CamScanner

Serie 1

EXO3

par $f(x) = e^x \quad \forall x \in [0,1]$

- Etudions la CV uniforme

on a $0 \leq |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{ne^x}{n+x} - e^x\right|$

$$= \left|\frac{ne^x - ne^x - xe^x}{n+x}\right|$$

$$= \frac{xe^x}{n+x}$$

$$\leq \frac{e^n}{x+n}$$

$$\leq \frac{e}{x+n}$$

$$\leq \frac{e}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

alors (f_n) CV unif vers f sur $[0,1]$ et on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x)\right) dx$$

$$= \int_0^1 e^x\,dx = e - 1$$

Scanned with CamScanner

Série 1

EX04

1) Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ où $f_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow \frac{\ln(x+n)}{n^2}$$

On a $\forall x \geq 0$, $x+n \geq 1$ et $\ln(x+n) \geq 0$

Soit $x \in [0, +\infty[$, ~~alors~~ alors

$\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$ on a

$$n \leq x+n \leq 2n$$

et $\ln$ est une f^{ct} croissante, alors

$$\ln(n) \leq \ln(n+x) \leq \ln(2n) = \ln(2) + \ln(n)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{\ln(n)}{n^2} \leq \frac{\ln(n+x)}{n^2} \leq \frac{\ln(2)}{n^2} + \frac{\ln(n)}{n^2}$$

or $\sum_{n\geq N} \frac{\ln(2)}{n^2}$ et $\sum_{n\geq N} \frac{\ln(n)}{n^2}$ sont

convergente, ce qui montre

que $\sum_{n\geq N} \frac{\ln(n+x)}{n^2}$ est convergente

D'où $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n+x)}{n^2}$ est convergente

(car si on change un nombre fini.....)

Scanned with CamScanner

2) Mq S est de classe C^2 (série 1)

on a - f_n est classe C^2 $\forall n \geq 1$

et $f_n'(x) = \frac{1}{(n+x)n^2}$

$f_n''(x) = -\frac{1}{n^2(n+x)^2}$

- $0 \leq |f_n''(x)| \leq \frac{1}{n^2(1+x)^2}$

$\leq \frac{1}{n^2}$

et $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente

Donc $\sum f_n''$ converge normalement

Puis elle converge unif localement

- $\sum f_n'(1)$ et $\sum f_n(1)$ sont CV

c/c $\sum f_n$ CV unif localement sur $]0, +\infty[$ vers une f^{ct} qui est de classe C^2 donc S est de classe C^2 et on peut deriver terme à terme

Scanned with CamScanner

Série 1

2)

$$S'(x) = \sum_{n\geq 1} f_n'(x)$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2(n+x)} > 0$$

$$S''(x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2(n+x)^2} < 0$$

3) Déduction

- On a $S'(x) > 0 \Rightarrow S$ est croissante
- On a $S''(x) < 0 \Rightarrow S$ est concave

EX 05

Déterminer D_f où ~~$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(1+2x)^n}$~~

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$$

- Si $|x| \geq 1 \Rightarrow x^{n^2}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ ce qui entraîne que $\sum x^{n^2}$ ne converge pas. Donc $D_f \subset]-1,1[$

Scanned with CamScanner

EXO5 Inversement

soit $x \in]-1,1[$, alors on a

$$x^{n^2} = \underbrace{x^n . x^n . x^n . \ldots . x^n}_{n\text{-fois}}$$

Donc

$$0 \leq |x^{n^2}| = |x|^n . |x|^n . \ldots . |x|^n$$

$$\leq |x|^n . \underbrace{1 . 1 . \ldots . 1}_{(n-1)\text{-fois}}$$

$$\leq |x|^n$$

or $\sum |x|^n$ cv (série géométrique, avec $|x| < 1$

Donc $\sum x^{n^2}$ cv absolument et par suite elle est convergente

et $x \in D_f \Rightarrow]-1,1[\subset D_f$

C/c $D_f =]-1,1[$.

Scanned with CamScanner

Série 1

EX06

1) Etudier la CV simple de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ où $f_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n}$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x=0$, $f_n(0)=0$ et $\sum f_n(0)$ CV
- Si $x \neq 0$, alors

$\sum_{n\geq 0} \frac{x}{(1+x)^n}$ CV ssi $\sum \frac{1}{(1+x)^n}$ CV

ssi $\left|\frac{1}{1+x}\right| < 1$

ssi $|1+x| > 1$

ssi $1+x > 1$ ou $1+x < -1$

ssi $x > 0$ ou $x < -2$

ssi $x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$.

C/C $\sum \frac{x}{(1+x)^n}$ CV ssi $x \in]-\infty, -2[\cup [0, +\infty[$

càd la série converge simplement sur $]-\infty, -2[\cup [0, +\infty[$.

2) calculer $S(x)$

Scanned with CamScanner

EXO6

On a $S(0)=0$ et $\forall x \in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^n}$$

$$=x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$$

$$=x\frac{1}{1-\frac{1}{1+x}}$$

$$=x\frac{1}{\frac{x}{1+x}}$$

$$=x\frac{1+x}{x}$$

$$=1+x$$

Donc $S(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ 1+x & \text{si } x\in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[\end{cases}$

3) Mq la serie ne converge pas unif sur $[0,+\infty[$

Comme les f_n sont cont sur $[0,+\infty[$ alors si on a de plus la CV unif

Scanned with CamScanner

Exo6

Alors S est cont sur $[0,+\infty[$

et on obtient

$$0 = S(0) = \lim_{x \to 0^+} S(x) = \lim_{x \to 0^+} (1+x) = 1$$

Contradiction

C/C La série ne converge pas

unif sur $[0,+\infty[$.

Fin

Scanned with CamScanner