Université My Ismail **Année Univer. 2019-2020**
F. S. T. Errachidia **Parcours MIP. S2 Analy2**
Départ. de Maths **Resp. Mustapha Laayouni**

Série n^{o}1

Exercice1: Calculer les intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_{-1}^{1} 2^x dx,\ I_2 = \int_{0}^{2\pi} \cos(nx)\, dx\ (n \in \mathbb{Z})\ ,\ I_3 = \int_{0}^{2\pi} \cos^2 x dx,$$

$$I_4 = \int_{2}^{4} \frac{\ln(x)}{x} dx\ ,\ I_5 = \int_{2}^{4} \frac{1}{x\ln(x)} dx,\ I_6 = \int_{2}^{3} \frac{1}{x^2-1} dx,$$

$$I_7 = \int_{0}^{1} \frac{x^3}{x^2-5x+6} dx\ ,\ I_8 = \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+1} dx,\ I_9 = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^4-1} dx.$$

Exercice2: (Théorème de Heine): Montrer que toute fonction réelle continue sur un intervalle fermé borné $[a;b]$ est uniformément continue sur $[a;b]$.

Exercice3 Soit f une fonction en escalier sur $[a;b]$. Montrer que

$$\left|\int_{a}^{b} f(x)\, dx\right| \leqslant \int_{a}^{b} |f(x)|dx$$

Exercice4: Montrer à l'aide de la définition que si f est intégrable sur $[a;b]$ alors $|f|$ est aussi intégrable

Exercice5: Soit f la fonction sur l'intervalle $[0;1]$ qui est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer à l'aide de la définition que f n'est pas intégrable.

Exercice6: Soit f une fonction réelle monotone définie sur l'intervalle $[a;b]$. Montrer (i) que f est bornée.
(ii) à l'aide de la définition, que f est intégrable au sens de Riemann.
(iii) Donner un encadrement de son intégrale.
(iv) Application: $f; [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = ax$ (où $a \in \mathbb{R}_+^*$).

Université My Ismail **Année Univer. 2019-2020**
F. S. T. Errachidia **Parcours MIP. S2 Analy2**
Départ. de Maths **Resp. Mustapha Laayouni**

Série n^{o}1

Exercice1: Calculer les intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_{-1}^{1} 2^x dx,\ I_2 = \int_0^{2\pi} \cos(nx)\, dx\ (n \in \mathbb{Z})\ ,\ I_3 = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx,$$

$$I_4 = \int_2^4 \frac{\ln(x)}{x} dx\ ,\ I_5 = \int_2^4 \frac{1}{x\ln(x)} dx,\ I_6 = \int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx,$$

$$I_7 = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2-5x+6} dx\ ,\ I_8 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx,\ I_9 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^4-1} dx.$$

Correction: Calculons les intégrales suivantes;

$I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} 2^x dx,$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^{1} 2^x dx \\ &= \left[\frac{1}{\ln(2)} e^{x\ln(2)}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{\ln(2)}\left(2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2\ln(2)} \end{aligned}$$

$I_2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nx)\, dx$

Si $n = 0$ alors $I_2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} dx = 2\pi$

Si $n \neq 0$ alors $I_2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nx)\, dx = \left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{2\pi} = 0$

$$I_3=\int_0^{2\pi}\cos^2 x dx=\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2x)+1}{2}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2x)+x\right]_0^{2\pi}=\pi$$

$$I_4=\int_2^4\frac{\ln(x)}{x}dx=\frac{1}{2}\left[\ln^2(x)\right]_2^4=\frac{3}{2}\ln^2(2)$$

$$I_5=\int_2^4\frac{1}{x\ln(x)}dx=\int_2^4\frac{\ln'(x)}{\ln(x)}dx=\left[\ln(\ln x)\right]_2^4=\ln(\ln 2)$$

$$I_6=\int_2^3\frac{1}{x^2-1}dx=\int_2^3\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]_2^3=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$I_7=\int_0^1\frac{x^3}{x^2-5x+6}dx=\int_0^1\left(x+5+\frac{19x-30}{(x-2)(x-3)}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(x+5+\frac{-8}{x-2}+\frac{27}{x-3}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+5x-8\ln|x-2|+27\ln|x-3|\right]_0^1$$

$$I_8=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\left[\arctan(x)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

$$I_9=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^4-1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{\frac{-1}{4}}{x+1}+\frac{\frac{-1}{2}}{x^2+1}\right]dx=\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan(x)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

Exercice2: (Théorème de Heine): Montrer que toute fonction réelle continue sur un intervalle fermé borné $[a;b]$ est uniformément continue sur $[a;b]$.

Correction: Si f est continue, montrons qu'elle est uniformément continue, c'est-à-dire

$$\forall\varepsilon>0\exists\eta_\varepsilon>0 \text{ tel que } |x-y|<\eta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Raisonnons par absurde, $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \eta > 0$ on peut trouver x_η, y_η dans $[a, b]$ tels que $|x_\eta - y\eta| < \eta$ et $|f(x_\eta) - f(y_\eta)| \geqslant \varepsilon_0$. Ceci étant vrai pour tout $\eta > 0$ en particulier pour les $\dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$. Il existe donc des suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ dans $[a, b]$ telles que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0 \ (\star)$$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ qui converge dans $[a, b]$ vers c. Alors $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers c. Puisque

$$|y_{\varphi(n)} - c| \leqslant |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - c| < \frac{1}{\varphi(n)} + |x_{\varphi(n)} - c| \to 0 \text{ si } n \to +\infty$$

Écrivons $(\star)$ pour $\varphi(n)$, on aura: $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geqslant \varepsilon_0$, ce qui mène à la contradiction avec lacontinuité de f en c si on fait tendre n vers l'infini.

Exercice3 Soit f une fonction en escalier sur $[a; b]$. Montrer que

$$|\int_a^b f(x)\, dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

Soit $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision associée ā f sur $[a; b]$. Donc

$$f(t) = c_i \in \mathbb{R},\ \forall t \in]x_i, x_{i+1}[,\ i = 0, 1, 2, ..., n-1$$

et

$$|f|(t) = |c_i| \in \mathbb{R},\ \forall t \in]x_i, x_{i+1}[,\ i = 0, 1, 2, ..., n-1$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| &= \left|\sum_{i=0}^{i=n-1} c_i (x_{i+1} - x_i)\right| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{i=n-1} |c_i (x_{i+1} - x_i)| \\
&= \sum_{i=0}^{i=n-1} |c_i| (x_{i+1} - x_i) \\
&= \int_a^b |f|(x)\, dx
\end{aligned}$$

Exercice4: Montrer à l'aide de la définition que si f est inyégrable sur $[a;b]$ alors $|f|$ est aussi intégrable

Coreection: Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$ on pose

$$f_-(x) = \max\{-f(x), 0\} \text{ et } f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

Il est clair que ces deux fonctions sont positives et que

$$f = f_+ - f_- \text{ et } |f| = f_+ + f_-$$

Comme f est intégrable alors il existe des fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ vérifiant $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ et dont les intégrales convergent vers celle de f. On vérifie alors facilement que $(\varphi_n)_+ \leqslant f_+ \leqslant (\psi_n)_+$ et que $(\psi_n)_+ - (\varphi_n)_- \leqslant (\varphi_n)_+$. Donc f_+ est intégrable sur $[a,b]$. Par la même méthode, f_- est intégrable sur $[a,b]$ D'où $|f| = f_+ + f_-$ est intégrable sur $[a,b]$.

L'inégalité des intégrales découle de 2) de la proposition2.2. appliquée à

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f|$$

Exercice5: Soit f la fonction sur l'intervalle $[0;1]$ qui est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer à l'aide de la définition que f n'est pas intégrable.

Correction; Soit f la fonction sur l'intervalle $[0;1]$ qui est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Soient $\varphi \in E_-(f)$ et $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision associé à φ, donc

$$\varphi \leqslant f \text{ et } \varphi(t) = c_i, \ \forall t \in]x_i, x_{i+1}[$$

Or pour $i = 0, 1, 2, ..., n-1$, $\mathbb{Q} \cap]x_i, x_{i+1}[\neq \emptyset$, donc si a est dans cette intersection non vide alors on aura

$$c_i = \varphi(a) \leqslant f(a) = 0$$

Puisque tous les $x_{i+1} - x_i$ sont positifs, donc

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i \left(x_{i+1} - x_i\right) \leqslant 0$$

Donc $i_0^1 (f) \leqslant 0$

De même si $\psi \in E_+(f)$ et $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision associé à ψ, alors

$$f \leqslant \psi \text{ et } \psi(t) = d_i,\ \forall t \in]x_i, x_{i+1}[$$

$\forall i \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap]x_i, x_{i+1}[\neq \emptyset$, Soit un élément de cette intersection non vide, il vérifie donc

$$1 = f(b) \leqslant \psi(b) = d_i \Rightarrow d_i \left(x_{i+1} - x_i\right) \geqslant \left(x_{i+1} - x_i\right)$$

donc

$$\int_a^b \psi(t)dt = \sum_{i=0}^{i=n-1} d_i \left(x_{i+1} - x_i\right) \geqslant \sum_{i=0}^{i=n-1} \left(x_{i+1} - x_i\right) = x_n - x_0 = 1$$

Ainsi $I_0^1 (f) \geqslant 1$.

Conclusion: $i_0^1 (f) \leqslant 0 < 1 \leqslant I_0^1 (f) \Rightarrow i_0^1 (f) \neq I_0^1 (f)$ f n'est donc pas Riemann intégrable sur $[0, 1]$

Exercice6: Soit f une fonction réelle monotone définie sur l'intervalle $[a; b]$. Montrer
(i) que f est bornée.
(ii) à l'aide de la définition, que f est intégrable au sens de Riemann.
(iii) Donner un encadrement de son intégrale.
(iv) Application: $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = ax$ (où $a \in \mathbb{R}_+^*$).

Correction:supposons que $f; [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée est croissante (sinon on considérera $-f$ qui sera croissante).

(i)$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(v)$, $\forall x \in [a, b]$

(ii) Pour tout $n \geqslant 1$ considérons la subdivision

$$S_n = \left\{x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, ..., x_i = a = i\frac{b-a}{n}, ..., x_n = b\right\}$$

qui permet de construire les fonctions en escalier

$$\varphi_n(t) = f(x_i),\ \forall t \in]x_i, x_{i+1}[,\ i = 0, 1, 2, ..., n-1$$

et

$$\psi_n(t) = f(x_{i+1}),\ \forall t \in]x_i, x_{i+1}[,\ i = 0, 1, 2, ..., n-1$$

On a évidement $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ et

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t)dt &= \sum_{i=0}^{i=n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))(x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{i=n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \qquad (0.1) \end{aligned}$$

(3.2) implique que $\int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t)dt = 0$ Ce qui montre que f est intégrable sur $[a, b]$.

(iii) $f(a)(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant f(b)(b-a)$

(iv) Montrons à l'aide du théoème caractéristique (qu'on peut cosidérer comme définition), que la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que:
$f(x) = ax$ pour un certain $a \in \mathbb{R}_+^*$ est intégrable sur $[0, 1]$.

Pour tou $n \geqslant 1$, on consdère la subdivision de $[0, 1]$ telle que

$$S_n = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, ..., x_k = \frac{k}{n}, ...x_n = 1 \right\}$$

qui va être associée aux fonctions en escalier définies par

$$\varphi_n(t) = ax_i,\ \psi_n(t) = ax_{i+1}, \forall t \in]x_i, x_{i+1}[,\ i = 0, 1, ..., n-1$$

$$\varphi_n(x_i) = 0, \psi_n(x_i) = a,\ i = 0, 1, ..., n-1$$

Puisque f es strictement croissante, donc

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi_n(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1} ax_i\left(x_{i+1}-x_i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a\frac{i}{n}\frac{1}{n} \\
&= \frac{a}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i \\
&= \frac{a}{n^2}\frac{n\left(n-1\right)}{2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \psi_n(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1} ax_{i+1}\left(x_{i+1}-x_i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a\frac{i+1}{n}\frac{1}{n} \\
&= \frac{a}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i+1 \\
&= \frac{a}{n^2}\frac{n\left(n+1\right)}{2}
\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 \varphi_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 \psi_n(t)dt = \frac{a}{2}$$

Ainsi f est intégrable sur $[0,1]$ et son intégrale vaut $\displaystyle\int_0^1 (at)dt = \frac{a}{2}$

Si des étudiants ont des questions sur cette correction, prière de me rédiger le problème via Whatsapp au N 0694583317. Je vous enverrai (in chaa allah) les réponses par Whatsapp. Bon courage.