Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences et Techniques
Errachidia
Département de Mathématiques.

Année Universitaire 2022/2023
Filière : LST Mathématiques
Appliquées S6
Module M 616

Analyse Fonctionnelle

Série N°2

Exercice 1 *Soit E un espace vectoriel complexe.*

Montrer que :

— *a) Si $f \in L(E, \mathbb{C})$ et $U = Re(f)$ alors $f(x) = U(x) - iU(ix)$ $\forall x \in E$.*

— *b) Si $U \in L(E, \mathbb{R})$ et $f(x) = U(x) - iU(ix)$ alors $f \in L(E, \mathbb{C})$*

et si de plus E est normé et $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ alors $\| f \| = \| U \|$.

Exercice 2 *Soient E, F deux e.v.n et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

Montrer que : $\| f \| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \in B_F} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \in S} \| f(x) \| = \sup\limits_{x \in B_F} \| f(x) \|$.

B_F étant la boule unité fermé de E et $S = \{x \in E | \; \| x \| = 1\}$.

Exercice 3 *Soient E, F deux espaces vectoriels normés, f une application de E dans F.*

Montrer que :

i) $\overline{f(rB)} = \bigcap\limits_{\epsilon > 0} (f(rB) + \epsilon B')$

ii) $\overline{f(B)} - f(b) = \overline{f(B) - f(b)}$

où B, B' sont respectivement les boules unités dans E et F, et $b \in E$.

Exercice 4 *Soit E un espace vectoriel normé sur Δ ($\Delta = \mathbb{R}$ ou $\Delta = \mathbb{C}$)*

1) Notons $B = B(a, r)$ et $S = \{x \in E | \|x - a\| = r\}$. Montrer que

a) $\overline{B} = B^f$

b) $Int(B^f) = B$

c) $Fr(B) = Fr(B^f) = S$.

$\forall x \in F$

2) Soit $U \in L(E, \Delta)$

$U(x) \neq$

a) Montrer que si U est non nulle alors U est surjective.

b) Montrer que U est continue si et seulement si $\operatorname{Ker} U$ est fermé dans E.

Exercice 5 *On considère l'ensemble X des suites de nombres réels convergentes vers 0.*

1) Montrer que X est un espace de Banach pour $x \longrightarrow \sup\limits_{n \geq 1} |x_n| = \| x \|$

2) si $a = (a_n)$ est une suite telle que $\sum |a_n| < \infty$, montrer que la relation $f(x) = \sum a_n x_n$ définit une application linéaire continue de X dans $\mathbb{R}$, ayant pour norme $\sum |a_n|$.

3) Montrer que toute application linéaire continue de X dans $\mathbb{R}$ est de type défini dans 2).

Exercice 6 *Soit X un espace normé sur $\mathbb{K} = (\mathbb{R}\, ou\, \mathbb{C})$.*

M sous espace fermé de X et $x_0 \in X$, $x_0 \notin M$.

Montrer qu'il existe une forme linéaire continue sur X telle que :

$\| U \| = 1$ et $U(x) = 0\, \forall x \in M$, et $U(x_0) = d(x_0, M)$.

En déduire que si X est un espace vectoriel normé et M un sous-espace vectoriel de X et $x_0 \in X$, alors i) et ii) sont équivalentes.

i) $x_0 \in \overline{M}$

ii) $\forall U \in X' = \mathcal{L}_C(X, \mathbb{K}) : U(x) = 0\ \forall x \in M \implies U(x_0) = 0.$

Exercice 7 *a) Soit X l'espace de Banach $C([a,b], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| f \| = \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$.*
Soit T l'application de X dans lui même définie par

$$(Tf)(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b]$$

Montrer que T est continue pour la norme $\| T \|$.

b) Soient E, F, H trois espaces normés. Une application f de $E \times F$ dans H est dite séparément continue si, pour tout x_0 dans E, $y \longrightarrow f(x_0, y)$ est linéaire continue et si, pour tout y_0 dans F, $x \longrightarrow f(x, y_0)$ est linéaire continue.

Montrer que si E ou F est complet, toute application bilinéaire séparément continue de $E \times F$ dans H est continue.

TD2 : Exercice 1

- Soit E un espace vectorielle complexe :

Montrer que :

- a) Si $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{C})$ et $U = Re(f)$ alors $f(x) = U(x) - iU(ix)$ $\forall x \in E$.
- b) Si $U \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ et $f(x) = U(x) - iU(ix)$ alors $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{C})$

et si de plus E est normé et $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{C})$ alors, $\|f\| = \|U\|$.

Solution :

Soit E un espace vectorielle Complexe.

a)- on Si $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{C})$ (f linéair et $U = Re(f)$, $f : E \to \mathbb{C}$.

- Montrons que $f(x) = U(x) - iU(ix)$ $\forall x \in E$.

on a : $f(x) = Re(f)(x) + i\, Im(f)(x)$

$$= U(x) + i\, Im(f)(x)$$

$\Rightarrow$ $f(ix) = U(ix) + i\, Im(f)(ix) = if(x) = iU(x) - Im(f)(x)$.

$\Rightarrow$ $-Im(f)(x) = U(ix)$

$\Rightarrow$ $Im(f)(x) = -U(ix)$.

Ainsi on a : $f(x) = U(x) - iU(ix)$

- b)- Montrons que Si $U \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ et $f(x) = U(x) - iU(ix)$ alors $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{C})$.

- on. $f(x+y) = U(x+y) - iU(i(x+y)) = U(x) + U(y) - iU(ix) - iU(iy)$.

$$= U(x) - iU(ix) + U(y) - iU(iy)$$

$$= f(x) + f(y).$$

- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$f((\alpha + i\beta)x) = (\alpha + i\beta) f(x)$. ?

on $f((\alpha+i\beta)x) = U((\alpha+i\beta)x) - iU(i(\alpha+\beta i)x)$.

$$= \alpha U(x) + \beta U(ix) - \alpha i U(xi) + \beta U(x i).$$

$$= (\alpha + \beta i) U(x) - i(\alpha + \beta i) U(ix).$$

$$= (\alpha + \beta i)(U(x) - iU(ix))$$

$$= (\alpha + \beta i) f(x).$$

Ainsi f est lineaire.

• Si de plus E est normé et $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{C})$ alors $\|f\| = \|U\|$. (f continue).

on a : $\|f(x)\| = \sqrt{U^2(x) + U^2(ix)} \geq \sqrt{U^2(x)} = \|U(x)\|_{\mathbb{R}}$.

$\Rightarrow \|f(x)\| \geq \|U(x)\|$.

Soit $x \in E$ tel que : $f(x) \neq 0$ pour $\alpha = \dfrac{\|f(x)\|}{f(x)}$.

on a : $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \|f(x)\|$.

$\Rightarrow f(\alpha x) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(\alpha x) = U(\alpha x)$

$\|f$

$\Rightarrow |f(\alpha x)| = |U(\alpha x)| \Rightarrow \|f(x)\| \leq \|U(x)\| \leq \|U\| \cdot \|x\|$. ($U$ lineair Continue).

D'où $\|f\| \leq \|U\|$, D'où l'égalité

Exercice 2 :

Soit E, F deux e.v.n et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ ~~alors~~

Montrer que : $\|f\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \in B_F} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \in S} \|f(x)\| = \sup\limits_{x \in B_F} \|f(x)\|$

B_F étant la boule unité fermé de E et $S = \{x \in E \ / \ \|x\| = 1\}$.

Solution :

• On a $\|f\| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \neq 0} \left\| f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \sup\limits_{x \in S} \|f(x)\|$.

$$\leq \sup_{x \in B_F} \|f(x)\| \leq \sup_{\substack{x \in B_F \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq \|f\|$$

d'où le resultat :

• On a aussi $\|f\| = \inf \{M > 0 \ / \ \|f(x)\| < M\|x\|\} = \inf A$

on $\|f\| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} \Rightarrow \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq \|f\|$. $x \in E$ $x \neq 0$.

$\Rightarrow \|f\| \leq A \Rightarrow \inf A \leq \|f\|$.

$M \in A \Rightarrow \|f(x)\| \leq M\|x\|$. $\Rightarrow \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq M$

$\Rightarrow \sup\limits_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \|f\| \leq M$. $\forall M \in A$.

$\Rightarrow \|f\| \leq \inf A$. Car. $\|f\|$ est un minorant

Exercice 3:

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, f est une application de E dans F.

. Montrer que :

i) $\overline{f(rB)} = \bigcap_{\varepsilon>0} (f(rB) + \varepsilon B')$.

ii)- $\overline{f(B)} - f(b) = \overline{f(B) - f(b)}$

où B, B' sont respectivement les boules unités dans E et F et $b \in E$

Solution

i)- Montrons que $\overline{f(rB)} = \bigcap_{\varepsilon>0} (f(rB) + \varepsilon B')$.

Soit $y \in \bigcap_{\varepsilon>0} (f(rB) + \varepsilon B')$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0.\quad y \in (f(rB) + \varepsilon B')$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0.\quad \exists x \in B,\ x' \in B'$ tq $y \in f(rx) + \varepsilon x')$

on a: $\|y - f(rx)\| = \|\varepsilon x'\| < \varepsilon$

$\Rightarrow f(rx) \in B(y, \varepsilon) \cap f(rB)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0.\quad B(y, \varepsilon) \cap f(rB) \neq \phi \Longrightarrow y \in \overline{f(rB)}$

.($\Longleftarrow$)

Soit $y \in \overline{f(rB)} \Rightarrow \forall \varepsilon>0.\quad B(y, \varepsilon) \cap f(rB) \neq \phi.$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0,\quad \exists y' \in B(y, \varepsilon)$ et $y' = f(r.x)$ où $x \in B$.

on a: $\|y - y'\| < \varepsilon \qquad (y - y' \in B(0, \varepsilon) = \varepsilon B').$

et $y = y - y' + y'$

Donc $\forall \varepsilon>0$, on a: $y \in f(rB) + \varepsilon B'$

$\Rightarrow y \in \bigcap_{\varepsilon>0} (f(rB) + \varepsilon B')$

d'où

$$\overline{f(rB)} = \bigcap_{\varepsilon>0} (f(rB) + \varepsilon B')$$

ii) :

$$\overline{f(B)} - f(b) = \overline{f(B) - f(b)}.$$

E : e.v.n.

$t_b : E \longrightarrow E$ $\quad t_b$ est Continue

$x \longrightarrow x+b$

$t_{-b} : E \longrightarrow E$ $\quad t_{-b}$ est continue

$x \longrightarrow x-b$

$t_{-b} \circ t_b = t_b \circ t_{-b} = Id_E$

t_b est Continue donne

$t_b(\overline{A}) \subseteq \overline{t_b(A)}$

$\Rightarrow b+\overline{A} \subseteq \overline{b+A}$

on a : $t_{-b}\left(\overline{t_b(A)}\right) \subseteq \overline{t_{-b}\left(t_b(A)\right)}$ $\quad$ (t_{-b} Cont

$\Rightarrow t_{-b}\left(\overline{t_b(A)}\right) \subseteq \overline{A}$

Par conséquent.

$\Rightarrow t_b\left(t_{-b}\left(\overline{t_b(A)}\right)\right) \subseteq t_b(\overline{A})$.

$$\overline{f(B)} - f(b) = \overline{f(B) - f(b)}$$

$\Rightarrow \overline{t_b(A)} \subseteq \overline{A}+b$

$\Rightarrow \overline{b+A} \subseteq \overline{A}+b$

$\Rightarrow \overline{A}+b = \overline{A+b}$.

Exercice 4 :

E, e.v.n.

$B = B(a,r) = \{x \in E \,/\, \|x-a\| < r\}$

$B^f = \{x \in E \,/\, \|x-a\| \leq r\}$

(a). $\overline{B} = B^f$

on a : $B \subset B^f \Rightarrow \overline{B} \subset B^f$.

$B^f \subset \overline{B}$.

Soit $x \in B^f$

Pour $x_n = (1-t_n)x + t_n a$ $\quad$ ou : $0 \leq t_n < 1$

et $t_n \to 0$.

$x_n \to x$.

on a : $\|x_n - a\| = |1-t_n| \, \|x-a\|$.

$\|x_n - a\| = (1-t_n)x + t_n a - a$

$= \| 1-t_n \| \, \|x-a\|$.

$\Rightarrow \|x_n - a\| < r$

$x_n \in B(a,r)$.

et $x_n \to x$

$\Rightarrow x \in \overline{B}$

d'ou $B^f = \overline{B}$.

(b). $\text{Int}(B^f) = B$.

$B \subseteq B^f$ et B ouvert

$\Rightarrow B \subseteq \text{int}(B^f) \subseteq B^f = B \cup S$

Soit $x \in B^f$ tq : $\|x-a\| = r$ $(x \in S)$.

Soit $\varepsilon > 0$, Pour $y = x + \frac{\varepsilon}{2} \frac{(x-a)}{\|x-a\|}$

on a : $\|y-x\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow y \in B(x,\varepsilon)$.

.(suit) (Jum).

or: $\|y-a\| = \| x-a+\frac{\varepsilon}{2}\frac{(x-a)}{\|x-a\|}\| = \|(x-a)(1+\frac{\varepsilon}{2r})\| = r+\frac{\varepsilon}{2} > r.$

$\Rightarrow y \notin B^f$.

d'où: $B(x,\varepsilon) \not\subset B^f$

d'où $x \notin \mathrm{int}(B^f)$.

Ainsi $\mathrm{Int}(B^f) = B$.

(c)- $F_r(B) = \overline{B} \setminus \mathring{B} = \overline{B} \setminus B = B^f \setminus B = S$

$F_r(B^f) = \overline{B^f} \setminus \mathrm{int}(B^f) = B^f \setminus B = S$.

(2)-

$u \in L(E, \Delta)$.

(a)- Si u est non nulle alors u est surjective.

Si $\Delta = \mathbb{R}$

on a: $\mathrm{Im}(u)$ est une ~~espa~~ ev. de $\mathbb{R}$. $(\mathrm{Im}(u) = u(E))$.

$u(x), u(x') = \mathrm{Im}(u) = \{u(x) / x \in E\}$.

$u(x) + u(x') = u(x+x') \in \mathrm{Im}(u) = u(E)$.

et $\lambda u(x) = u(\lambda x) \in \mathrm{Im}(E)$.

$1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}(u)) \leqslant \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(u)) = 1$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}$.

$\Rightarrow u$ est surjective

u est non nulle

$\exists x_0$ tq $u(x_0) \neq 0$.

$\Rightarrow u(x_0) = \lambda \neq 0$

Soit λ', existe x tq $u(x) = \lambda' \neq 0$. $\lambda \neq 0$.

Pour $y = \frac{x_0}{\lambda}\lambda'$

$\Rightarrow u(y) = \lambda'$

si $\lambda = 0$ on a: $U(0) = 0$.

d'ou: U est surjective

b) -

si U est Continue :

on a: $Ker(U) = U^{-1}(\{0\}) = \{x \in E / U(x) = 0\}$

d'ou. $Ker(U)$ est un fermé ($\{0\}$ est fermé).

si $Ker(U) = H$ est un fermé, U est elle Continue ?

si U est nulle $\Rightarrow U$ est Continue

$Ker(U) = E$ est un fermé.

. On Suppose que U est non nulle ?

alors U est surjective

~~D'ou: ∃~~ Soit $u \in E$ on:

$U(u) = \lambda$ ou. $\lambda \in \Delta$

$\Rightarrow U(u) = \lambda . 1$

$\exists x_0 \in E$, $U(x_0) = 1$

$\Rightarrow U(x) = \lambda U(x_0)$

$\Rightarrow U(x - \lambda x_0) = 0$.

D'ou: $x - \lambda x_0 \in Ker(U) = H$. et $x = x - \lambda x_0 + \lambda x_0$

$\Rightarrow x \in H \oplus \mathbb{K} x_0$

$H \oplus \mathbb{K} x_0 \subseteq E$

$E = H \oplus \mathbb{K} x_0$

$(H \cap \mathbb{K} x_0 = \{0\})$.

$h \in H \cap \mathbb{K} x_0$

$U(h) = 0$.

$h = k x_0 \Rightarrow U(H) = k$

$h = 0$.

$x = x' + \lambda x_0 \,/\, \{x' \in H,\ \lambda x_0 \in \mathbb{K} x_0\}$.

on a: $x_0 \notin H$ et H est un fermé

$\Rightarrow d(x_0, H) > 0$.

$\Rightarrow \exists \alpha > 0$, tq: $d(x_0, H) > \alpha$ et $\alpha > 0$.

$\Rightarrow \forall y \in H : \|x_0 - y\| > \alpha$

$\Rightarrow \forall y \in H$, tq: $\lambda \neq 0$

$\|\lambda\|\|x_0 - y\| \geq \alpha|\lambda|$

$\Rightarrow \|\lambda x_0 - \lambda y\| \geq \alpha\|\lambda\|$.

$\Rightarrow \forall \lambda \neq 0 \ \forall u \in H$ on a:

$\|\lambda x_0 + u\| \geq \alpha|\lambda|$.

$E = H + \mathbb{K}x_0$

$\Rightarrow \forall z \in E$ on: $z = x' + \lambda x_0$ $\left(U(z) = \lambda 1 + \overset{0}{\overbrace{U(x')}}\right)$.

$\|z\| \geq \alpha\ \|U(z)\|$.

$\Rightarrow \exists \alpha > 0,\ \|U(z)\| \leq \frac{1}{\alpha}\|z\|$.

$\Rightarrow$ U est Continue

Exercice 6.

Soit $(x^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une Suit de Cauchy de X.

Alors: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall p, q \geq n_0\ \|x^p - x^q\| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p q \geq n_0 \qquad \sup_{n\geq 0} |x_n^p - x_n^q| < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad \sim \quad \sim \quad \sim \quad \forall n \qquad |x_n^p - x_n^q| < \varepsilon \qquad (*)$.

D'où : $(x_n^p)_p$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ Complet donc Soit : $l_n = \lim_{p\to\infty} x_n^p$

Dans $*$) on fait $q \longrightarrow +\infty$ $\|x^p - l\|$ $\sup |x_n^p - l_n| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0\ \forall p \geq n_0\ \forall n,\ q \quad |x_n^p - l_n|\ \varepsilon$.

est ce que : $l = (l_n)_n \in X$?

on a: $\lim_{n\to+\infty} x_n^p \qquad \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \ |x_n^p| < \varepsilon$

~~on~~ ou Bien $p \geq n_0$ on a:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 / \forall n \geq n_1$,

$|l_n| \leq |l_n - x_n^p| + |x_n^p| < 2\varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} l_n = 0$; d'où X est Complet.

Ex 6.

M s.e.v fermé de X.

$x_0 \notin M$.

. Montrons que il existe une forme continue sur X tel que :

$\|u\|=1$ et $u(x)=0$ $\forall x\in M$ et $u(x_0)=d(x_0,M)$.

on a : $M + \mathbb{K}x_0 = M \oplus \mathbb{K}x_0$.

Si $z \in M\oplus \mathbb{K}x_0$.

on a : $z = x + \lambda x_0$ ou $\lambda \in \mathbb{K}$

Soit $u : M\oplus\mathbb{K}x_0 \longrightarrow \mathbb{K}$

$$z \longmapsto u(z) = \lambda\, d(x_0, M).$$

Si $z, z' \in M\oplus\mathbb{K}x_0$

$z = x + \lambda x_0$

$z' = x' + \lambda' x_0$

$$u(z+z') = u(x+x'+(\lambda+\lambda')x_0)$$
$$= (\lambda'+\lambda)\, d(x_0,M) = \lambda d(x_0,M) + \lambda' d(x_0,M).$$
$$= u(z) + u(z')$$

de même $u(\alpha z) = \alpha u(z)$.

on a :

$$u(x_0) = u(0 + 1x_0) = d(x_0, M).$$

$\mathrm{Ker}(u) = \{z\in M\oplus\mathbb{K}x_0 \,/\, u(z) = \lambda d(x_0,M) = 0\}$

$\mathrm{Ker}(u) = \{z\in M\oplus \mathbb{K}x_0 \,/\, z = x+\lambda x_0$ et $\lambda = 0.\}$

$= \{z\in M\oplus\mathbb{K}x_0 \,/\, z = x$ et $x\in M\}$

$= M$

$\mathrm{Ker}(u) = M$ qui est un fermé donc.

u est continue (Ex 4).

On a : $d(x_0, M) \leq \|x_0 - x\|$ $\forall x\in M$

$|\lambda d(x_0,M)| \leq \|\lambda x_0 - \lambda x\|$. $\forall x\in M$.

$\Rightarrow |\lambda d(x_0,M)| \leq \|\lambda x_0 + y + y - \lambda x\|$ / $u(x_0) = d(x_0,M)$

$\boxed{z = x + \lambda x_0}$

$\Rightarrow |\lambda d(x_0,M)| \leq \|\lambda x_0 + y\|$ $y\in M$.

$\Rightarrow |u(z)| \leq \|z\|$ $(z = \lambda x_0 + y)$.

$\Rightarrow \|u\| \leq 1$.

On a. $u(x_0) = u(x_0 - x)$ $\forall x\in M$.

$\Rightarrow |u(x_0)| = |u(x_0 - x)| \leq \|u\|\|x_0 - x\|$. $\forall x\in M$

$\Rightarrow |u(x_0)| \leq \|u\| . \inf_{x\in M} \|x_0 - x\|$.

$\Rightarrow |u(x_0)| \leq \|u\|\, d(x_0, M)$

$\Rightarrow \dfrac{|u(x_0)|}{d(x_0,M)} \leq \|u\|$.

$\Rightarrow 1 \leq \|u\|$.

d'où $\|u\| = 1$.

D'après le théorème de Hahn Banach.

$\exists\, u' \in \mathcal{L}_c(X, \mathbb{K})$.

tell que : $u'/_{M\oplus\mathbb{K}x_0} = u$.

et $\|u'\| = \|u\| = 1$.

on a $u'(x_0) = u(x_0) = d(x_0, M)$.

$u'(x) = u(x) = 0$. Si $x \in M$

(i) $\to$ (ii) ($x_0 \in \overline{M}$ est ce que : $U(x_0)=0$?).

Soit $U \in \mathcal{L}_c(X, \mathbb{K}) / U(x)=0 \quad \forall x \in M$

on $x_0 \in \overline{M} \Rightarrow \exists (x_n) \subset M$ tq $x_n \to x_0$

Or U est continue $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = U(x_0)$

$\Rightarrow 0 = U(x_0)$ ($x_n \in M$, $U/_M = 0$).

(ii) $\to$ (i) ? ($x_0 \in \overline{M}$). ?

Si non c'est à dire : $x_0 \notin \overline{M}$

$\exists \ U \in \mathcal{L}_c(X,\mathbb{K})$ $\|U\|=1$, $U(x_0)=d(x_0, \overline{M})$.

et $\forall x \in \overline{M}$ on a: $U(x)=0$.

D'où $\forall x\in M$, $U(x)=0$ et $U(x_0)=d(x_0,\overline{M}) \neq 0$.

on a: " non (ii) "

Ainsi on a le resultat.

Exercice 7

$X = C([a,b], \mathbb{R})$.

$\|f\| = \sup\limits_{u\in[a,b]} |f(u)|$, $T: X \longrightarrow X$

$f \mapsto T(f)(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

• on a T est linéaire.

$|T(f)(u)| = \left|\int_a^u f(t)\,dt\right| \leq \sup\limits_{a\le t\le b}|f(t)| \int_a^u dt$.

$\Rightarrow |T(f)(u)| \leq \|f\|(u-a)$

$\Rightarrow |T(f)(u)| \leq \|f\|(b-a)$

$\Rightarrow \|T(f)\| \leq \|f\|(b-a)$.

$\Rightarrow \|T\| \leq (b-a)$.

• Pour $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto 1$.

on a: $T(f)(u) = \int_a^x dt = (x-a)$

$\Rightarrow \|T(f)\| = \sup\limits_{a\le x\le b} (x-a) = b-a$

or. $\|T(f)\| \leq \|T\|$

car. $\|T\| = \sup\limits_{\|f\|=1} \|T(f)\| = \sup\limits_{\|f\|\le 1}\|T(f)\|$.

d'où $(b-a) \leq \|T\| \leq (b-a)$

•

• On suppose que E est un Banach

Soit $y \in B^f(0,1)$

et $g_y: E \to H$

$x \mapsto g_y(x) = f(x,y)$.

on a:

$\|g_y(x)\| = \|f(x,y)\| = \|f_x(y)\| \leq \|f_x\|\|y\|$

$\leq \|f_x\|$

• $g_y \in \mathcal{L}_c(E,H)$

$y\in B^f(0,1)$

$\forall x \in E$ on a:

$\|g_y(x)\| \leq \|f_x\|$.

D'après le théorème de " Banach Steinhauss "

$\exists C>0 / \forall y\in B^f(0,1) : \|g_y\| \leq C$

• On a: $|f(x,y)| = \|x\|\|y\| \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right|$.

$= \|x\|\|y\| \left| f_{y/\|y\|}\left(x/\|x\|\right)\right|$.

$\leq C\|x\|\|y\|$.

$\Rightarrow \|f(x,y)\| \leq C\|x\|\|y\|$.

Même on a: $\forall (x,y) \in E\times F$.

$\|f(x,y)\| \leq C \|x\|\|y\|$.

Montrons que f est continue

on a : $|f(x_n y_n) - f(x,y)| =$

$= \| f(x_n, y_n) - f(x_n, y) + f(x_n, y) - f(x y) |$

$\Rightarrow \| f(x_n, y_n) - f(x y) \| \leq \| f(x_n y_n - f(x_n, y) \|$

$+ \| f(x_n, y) - f(x y) \|.$

$\Rightarrow \| f(x_n, y_n) - f(x y) \| \leq \| f(x_n, y_n - y) \|$

$+ \| f(x_n - x, y) \|.$

$\leq C \|x_0\| \|y_n - y\| + C \|x_n - x\| \|y\|.$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = f(x,y)$ d'où f est Continue

Soit (x_n, y_n) une Suite de $E \times F$

$(x_n, y_n) \to (x,y) \in E \times F$. Mq $f(x_n y_n) \to f(x,y)$

Exercice 1. TD 3

on a : $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ω,

(φ : défini positive)

$\|\lambda x\| = \sqrt{\varphi(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2 \varphi(x,x)}$

$= |\lambda| \sqrt{\varphi(x,x)} = \lambda \|x\|.$

- Pour $x, y \in E$, est ce que

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. ?

on a : $\|x+y\|^2 = \varphi(x+y, x+y) =$

$= \varphi(x,x) + 2 Re(\varphi(x,y)) + \varphi(y,y).$

D'aprè l'inégalité de Cauchy Schwatz.

$|\langle \varphi(x,y) \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$

or. $Re(\varphi(x,y)) \leq |\varphi(x,y)|.$

D'où $\Rightarrow Re(\varphi(x,y)) \leq \|x\| \|y\|.$

D'où

$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$

$\Rightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$

$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Donc Il s'agit bien d'un norme.

Si H est un Hilbert. (the, Répe sentater de Riez).

$f \in \mathcal{L}_c(H, H)$.

$\exists\, y \in H$ tq $f = \varphi_y$

càd : $f(x) = \langle x\, y \rangle$

$\|f(x)\| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$

$\Rightarrow \|f\| \leq \|y\|.$

Si $\frac{y}{\|y\|} = y_0$

$\|f(y_0)\| \leq \|f\|$

$\Rightarrow \frac{\langle y, y \rangle}{\|y\|} \leq \|f\|$

$\Rightarrow \|y\| \leq \|f\|$

$\Rightarrow \|f\| = \|y\|.$

Exercice 2 :

H est un Hilbert

M est un sev

on a : $f \in \mathcal{L}_c(M, \mathbb{K})$.

D'aprè le théorème de Hahn Banach.

il existe $\tilde{f} \in \mathcal{L}_c(H, \mathbb{K})$ tq : $\begin{cases} \tilde{f}/_M = f. \\ \|\tilde{f}\| = \|f\|. \end{cases}$

Soit $h = \tilde{f}/_{\bar{M}}$

$h \in \mathcal{L}_c(\bar{M}, \mathbb{K})$.

D'après le théorème de (Reper sentator de Riez)

il exist $a \in \bar{M}$ tq

$h(x) = \langle x, a \rangle$

et $\|h\| = \|a\|.$

Si $x \in M$

on a : $h(x) = \tilde{f}(x) = f(x) = \langle u, a\rangle$

$\Rightarrow \|f\| \leqslant \|a\| = \|h\|$.

. on a : $\|\tilde{f}\| = \sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ x\in H}} |\tilde{f}(x)| \geqslant \sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ x\in \overline{H}}} \|\tilde{f}(x)\| = \|h\|$.

$\Rightarrow \|\tilde{f}\| \geqslant \|h\| \geqslant \|f\| = \|\tilde{f}\|$.

$\Rightarrow \|f\| = \|\tilde{f}\| = \|h\|$.

on a : $\tilde{f} \in \mathcal{L}_c(H, \mathbb{K})$.

D'après le thm de R. de Riez

on a. l'existence de $b \in H$ tq $\tilde{f}(x) = \langle x, b\rangle$

et $\Rightarrow$ $\|\tilde{f}\| = \|b\|$.

. on a : si $u \in \overline{M}$

on a : $\tilde{f}(x) = h(x) = \langle x, a\rangle = \langle x, b\rangle$

si $\langle x, a-b\rangle = 0$

Pour $x = b$

$\Rightarrow \langle b, a-b\rangle = 0 \Rightarrow \|b\|^2 = \langle b, a\rangle$

on a : $\langle b-a, b-a\rangle = \|b\|^2 - 2\langle a, b\rangle + \|a\|^2 = 0$

$\Rightarrow a-b = 0 \Rightarrow a = b$.

. Si g est un autre prolongement de f.

on $g/_M = \tilde{f}/_M \quad (= f)$.

$\Rightarrow g/_{\overline{M}} = \tilde{f}/_{\overline{M}} = h$.

D'après le théorème de R. de Riez on a.

l'existence de b tq

$\forall x \in \overline{H} \quad g/_{H'}(x) = \langle x, b'\rangle = \langle x, b\rangle$

$\Rightarrow \forall x \in \overline{H} \quad \langle x, b'-b\rangle = 0$.

Pour $x = b$ on, $\langle b, b'-b\rangle = 0$.

$\Rightarrow \|b\|^2 = \langle b, b'\rangle$

$\langle b-b', b-b'\rangle = 0 \Rightarrow b = b'$.

Si $x \in H$: $g(x) = \langle x, b'\rangle = \langle x, b\rangle = \tilde{f}/_M$

. Soit $x \in M^\perp$ est-ce-que : $\tilde{f}(x) = 0$.

ainsi $\tilde{f}(x) = \langle x, b\rangle$ où $b \in \overline{M}$

Alors il existe $b_n \in M$ tq $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

$\Rightarrow$

$\tilde{f}(x) = \langle \underset{M^\perp}{x}, b\rangle = \langle x, \lim_{n\to\infty} \underset{M}{b_n}\rangle = \varphi_x(\lim b_n)$.

$= \lim_{n\to\infty} \langle x_p, b_n\rangle = 0. \quad / = \lim \varphi_x(b_n)$.

$\Rightarrow \tilde{f}(x) = 0$.

$\left(\begin{array}{l}\varphi_x : H \to \mathbb{K} \\ \quad y \mapsto \langle x, y\rangle\end{array} ; |\varphi_x(y)| = |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|\right)$.

<u>Exercice 3</u> : $x^n \in \ell^2(\mathbb{N})$

Soit $(x^n)_m$ une suite de Cauchy de $\ell^2(\mathbb{N})$

$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \; \forall p, q \geqslant m_0 \Rightarrow \|x^p - x^q\| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \; \forall p, q \geqslant m_0$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n^p - x_n^q\|^2 < \varepsilon$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m_0, \forall p, q > m_0, \forall n$:

$\|x_n^p - x_n^q\| < \varepsilon$.

$x^p = (x_n^p)_n$

$x^q = (x_n^q)_n$

$\Rightarrow \forall n. \; (x_n^p)_p$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ complète

donc converge vers y_n

$x^p - x^q = (x_n^p - x_n^q)_n$

Alors $\forall \varepsilon > 0, \forall p, q > n_0$

on a : $\sum_{n=1}^{N} \|x_n^p - x_n^q\|^2 < \varepsilon$.

Pour $q \to +\infty$ d'après la continuité de module

on a :

$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \quad \forall p \geqslant m_0$

on a : $\sum_{n=0}^{N} \|x_n^p - y_n\|^2 < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \; \forall p \geq m_0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n^p - y_n\|^2 \leq \varepsilon.$$

Pour $y = (y_n)_n$.

on a : $x^p - y \in \ell^2$

$$\|x^p - y\| = \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n^p - y_n\|^2 < \varepsilon.$$

D'où $y \in \ell^2$.

et $\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 / \forall p \geq m_0$

$$\|x^p - y\| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \lim_{p \to +\infty} x^p = y.$$

d'où $\ell^2(\mathbb{N})$ est un ~~Hilbertient~~

Hilbertien .