



Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques de
Mohammedia
Année Universitaire : 2016-2017

جامعة الحسن الثاني بطنجة
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

U 7

19/5

نماذج امتحانات

EXEMPLE EXAMENS

AL GEBRE 1

CORRIGER

MIP – S2

FSTM COPIE CENTRE

U 5

University of Toronto
Faculty of Science
Department of Chemistry
Chemistry 101



Al GEBRE 1

EXEMPLE EXAMENS

AL GEBRE 1

CORRIGER

MIP - 25

CHIFFRE 15

EXAMEN D'ALGEBRE I

Exercice 1 : (4 pts)

On considère les polynômes suivants

$$A(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$$

$$B(X) = X^3 - 2X^2 - 2X - 3$$

- 1/ Calculer le P.G.C.D de A et B. (1,5)
- 2/ Factoriser A et B en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. (1)
- 3/ Trouver deux polynômes U et V tels que $D = AU + BV$. (1,5)

Exercice 2 (6 pts)

Soit P le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + 2z + t = 0 \end{cases}$$

- 1/ Justifier sans calcul que P est de dimension 2. (1)
Puis déterminer une base (u_1, u_2) de P.
Soit $v_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $v_2 = (1, 0, 1, 0)$. On note $V = \text{Vect}(\{v_1, v_2\})$
- 2/ Montrer que (v_1, v_2) est une base de V. (0,5)
- 3/ Déterminer $P + V$. En déduire une base de $P + V$. (1,5)
- 4/ En déduire que P et V ne sont pas supplémentaires. Donner une base de $P \cap V$. (1)

Soit $v_3 = (1, 1, 0, 0)$. On note $W = \text{Vect}(\{v_1, v_3\})$.

- 5/ P et W sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ (0,5)
- 6/ Soit $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer $v \in P$ et $w \in W$ tels que $u = v + w$.
Préciser v et w. (1,5)

Exercice 3 : (5,5 pts)

Soit $A = (X^2+1)(X^3+1)$

1/ Factoriser A en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. (0,5)

2 / Justifier sans calcul l'existence de deux polynômes U et V tels que : (0,5)

$$(X^2+1)U + (X^3+1)V = 1 \quad (1^*).$$

3/ Donner la forme de la décomposition en éléments simples de la fraction (0,5)

$$F(X) = \frac{1}{(X^2+1)(X^3+1)} \text{ dans } \mathbb{R}(X).$$

4/ Décomposer F(X) dans $\mathbb{R}(X)$. (2)

5/ A l'aide de la décomposition de F(X) dans $\mathbb{R}(X)$, déterminer explicitement un couple (U, V) satisfaisant (1^*) . (1,5)

6/ Peut-on déterminer un polynôme $\mathcal{B}(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que X^2+1 divise $\mathcal{B}(X)+2$ et X^3+1 divise $\mathcal{B}(X)+1$. (1)

Exercice 4 : (4,5 pts)

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère les applications linéaires f et g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par

$$- \quad f(x, y, z) = (x + z, 2y - z, x)$$

$$- \quad g(e_1) = e_1 + e_3, \quad g(e_2) = 2e_2 - e_3, \quad g(e_3) = e_1.$$

1-A-t-on $f = g$? (0,5)

2-Donner l'image de β par l'application linéaire $h = 2f - g$. (0,5)

3-Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner les coordonnées de $h(x, y, z)$ dans la base β . (1)

4-Donner les matrices de M_f et M_g de f et g dans la base β . (1)

5-En utilisant les trois questions précédentes, donner, par trois méthodes différentes la matrice M_h de h dans la base β . (1,5)

EXAMEN D'ALGÈBRE I

EXERCICE 1.

1/ $A = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, $B = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

On a: $A \wedge B = x^2 + x + 1$

2/ On effectue la division euclidienne de A par $x^2 + x + 1$
On obtient $A = (x^2 + x + 1)(x^2 + 1)$, $x^2 + x + 1$ est irréductible
dans $\mathbb{R}[x]$ car $\Delta = -3 < 0$

De même $B(x) = (x^2 + x + 1)(x - 3)$

3) En utilisant les divisions euclidiennes, on déduit
que $A \wedge B = (x^2 + x + 1)(x - 3)$

Enfin, pour $D = x^2 + x + 1$, on a $11 = \frac{1}{10} A + B = \frac{1}{10} x - \frac{3}{10}$

EXERCICE 2.

1° $\dim \mathbb{R} = (\dim \mathbb{R}^4) - \text{nombre d'équations}$

Cartésiennes indépendantes qui
caractérisent $\mathbb{P}$

①

Exercice 2

$$1/ \dim P = \dim \mathbb{R}^4 - \text{nombre d'équations cartésiennes indépendantes qui caractérisent } P.$$

$$= 4 - 2 = 2$$

Soit $U = (x, y, z, t) \in P$, dnc

$$y = -2z - t, \text{ puis } x = -y - z - t = 2z + t - z - t = z$$

$$\text{dnc } u = (x, y, z, t) = (z, -2z - t, z, t)$$

$$= z(\underbrace{(1, -2, 1, 0)}_{u_1}) + \underbrace{(0, -1, 0, 1)}_{u_2}$$

$$\text{dnc } P = \text{Vect}(\{u_1, u_2\})$$

Comme les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires

dnc forment un système libre, par suite une

base de P

2°/ $V = \text{Vect}(\{v_1, v_2\})$. Comme v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, dnc libre et par suite une base de V

$$3°/ P + V = \text{Vect}(\{u_1, u_2\}) + \text{Vect}(\{v_1, v_2\})$$

$$= \text{Vect}(\{u_1, u_2, v_1, v_2\})$$

Verifions si (u_1, u_2, v_1, v_2) est un système libre:

(2)

Sont α, β, γ et θ tels que $\alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma V_1 + \theta V_2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma + \theta = 0 & L_1 \Rightarrow \boxed{\theta = -\alpha - \gamma} \\ -2\alpha - \beta + \gamma = 0 & L_2 \Rightarrow \boxed{\beta = \gamma - 2\alpha} \\ \alpha + \gamma + \theta = 0 & L_3 \Rightarrow \boxed{\theta = -\alpha - \gamma} \\ \beta + \gamma = 0 & L_4 \Rightarrow \boxed{\beta = -\gamma} \end{cases}$$

On remplace α, β, θ par leurs valeurs, on obtient

$$\gamma U_1 - \gamma U_2 + \gamma V_1 - 2\gamma V_2 = 0, \quad \forall \gamma$$

en particulier $\gamma = 1$, on a: $U_1 - U_2 + V_1 - 2V_2 = 0$ (*)

$$\text{donc } P = \text{Vect}\{U_1, U_2, \cancel{V_1}, V_2\} = \text{Vect}\{U_1, U_2, V_2\}$$

Comme V_2 ne vérifie pas l'équation cartésienne de P
donc le système U_1, U_2, V_2 est libre, donc une base de P

4/ Comme $P + V \neq \mathbb{R}^4$, par suite P et V ne sont pas supplémentaires.

$$\text{À partir de (*)}, \text{ on a: } \underbrace{-U_1 + U_2}_{\in P} = \underbrace{-2V_2 + V_1}_{\in V} = a \in P \cap V$$

$$\text{et comme } \dim(P \cap V) = \dim P + \dim V - \dim(P + V) \\ = 4 - 3 = 1$$

Par suite $\{a\}$ est une base de $P \cap V$

$$\textcircled{3} \quad a = (-1, 1, -1, 1)$$

$$s/ \quad P = \text{Vect} \{u_1, u_2\}, \quad W = \text{Vect} \{v_1, v_3\}$$

$$\beta_P = \{u_1, u_2\} \quad \text{et} \quad \beta_W = \{v_1, v_3\}$$

Vérifions que $\beta_P \cup \beta_W = \{u_1, u_2, v_1, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$
c-à-d libre maximal de $\mathbb{R}^4$

Sont $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ tels que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma v_1 + \theta v_3 = 0$

$$\alpha(1, -2, 1, 0) + \beta(0, -1, 0, 1) + \gamma(1, 1, 1, 1) + \theta(1, 1, 0, 0) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma + \theta = 0 & L_1 \text{ avec } L_3 \Rightarrow \theta = 0 \\ -2\alpha - \beta + \gamma + \theta = 0 & L_2 \\ \alpha + \gamma = 0 & L_3 \Rightarrow \alpha = -\gamma \\ \beta + \gamma = 0 & L_4 \Rightarrow \beta = -\gamma \end{cases}$$

$$L_2 \Rightarrow -2\gamma + \gamma + \gamma - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

donc P et W sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$

6/ Comme $\mathbb{R}^4 = P \oplus W$, soit $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, on a

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = v + w$, avec $v \in P$ et $w \in W$ (l'existence)

on doit exprimer v et w en fonction de x_1, x_2, x_3, x_4

$$\text{On a: } (x_1, x_2, x_3, x_4) = \underbrace{\alpha u_1 + \beta u_2}_v + \underbrace{\gamma v_1 + \theta v_3}_w$$

on doit exprimer $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ en fct
de x_1, x_2, x_3 , et x_4

④

Exercice 3.

$$1/ A = (X^2+1)(X+1)(X^2-X+1)$$

$$\text{On pose } B = (X^2+1), C = (X+1)(X^2-X+1) = X^3+1$$

Sont les factorisations de B et C en facteurs irr. de $\mathbb{R}[X]$

Comme il n'y a pas de facteurs communs, donc

sont premiers entre eux, il existe U et V

$$\text{tels que } (X^2+1)U + (X^3+1)V = 1 \text{ (d'après Gauss)}$$

3) La forme de la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ est:

$$F(X) = \frac{a}{X+1} + \frac{AX+B}{X^2+1} + \frac{CX+D}{X^2-X+1} = \frac{1}{(X+1)(X^2+1)(X^2-X+1)}$$

4/ La décomposition de $F(X)$ est.

$$F(X) = \frac{\frac{1}{6}}{(X+1)} + \frac{\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}}{X^2+1} + \frac{-\frac{2}{3}X + \frac{1}{3}}{X^2-X+1}$$

Calcul de a. On pose $G(X) = (X+1)F(X)$

$$G(-1) = \frac{1}{(1^2+1)(1^2-1+1)} = \frac{1}{6}$$

calcul de A et B, on pose $H(X) = (X^2+1)F(X)$

$$H(i) = \frac{1}{(i+1)(i^2-i+1)} = \frac{1}{-i(i+1)} = \frac{1}{1-i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$= Ai + B \Rightarrow A = \frac{1}{2} \text{ et } B = \frac{1}{2}$$

⑤

calcul de C et D

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{2}{3}$$

valeur remarquable $F(0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + D = 1$

$$\text{donc } D = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

✓ Vérification $F(1) = \frac{1}{4} = \frac{1/6}{2} + \frac{1/2 + 1/2}{2} + \frac{-2/3 + 1/3}{1}$
 $= \frac{1}{12} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

S/

$$\text{On a } F(x) = \frac{AX+B}{x^2+1} + \frac{(Cx+D)(x+1) + a(x^2-x+1)}{(x^3+1)}$$

En multipliant par $(x^3+1)(x^2+1)$ la fraction $F(x)$

$$\text{On a : } (x^3+1)(AX+B) + (x^2+1)[(Cx+D)(x+1) + a(x^2-x+1)]$$

Application numérique

$$X = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2} \text{ et } U = \left(-\frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right)(x+1) + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

⑥

$$6/ \text{ On a: } B(x) + 2 = (x^2 + 1) Q_1 \quad (1)$$

$$B(x) + 1 = (x^3 + 1) Q_2 \quad (2)$$

$$\text{dmc } ① - ② \quad 1 = (x^2 + 1) Q_1 - (x^3 + 1) Q_2$$

$$\text{On pose } Q_1 = 1 \text{ et } -Q_2 = Y \Rightarrow Q_2 = -Y$$

$$\text{Par suite } B(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)(x^3 + 1) - 1$$

$$\text{Exercice 4} \quad \text{Vérification: } \begin{aligned} B(x) + 1 &= (x^3 + 1) \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) \\ B(x) + 2 &= (x^3 + 1) \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) + 1, B(i) = \end{aligned}$$

$$1^\circ / \text{ on a: } f(e_1) = (1, 0, 1), f(e_2) = (0, 2, 0)$$

$$f(e_3) = (1, -1, 0)$$

$$\text{Comme } f(e_2) \neq g(e_2), \text{ donc } f \neq g$$

$$2^\circ / \text{ calculer } h(e_1), h(e_2), h(e_3)$$

$$\text{On a: } h(e_1) = 2f(e_1) - g(e_1) = 2(1, 0, 1) - (1, 0, 1) = (1, 0, 1)$$

$$h(e_2) = 2f(e_2) - g(e_2) = 2(0, 2, 0) - (0, 2, -1) = (0, 2, 1)$$

$$h(e_3) = 2f(e_3) - g(e_3) = 2(1, -1, 0) - (1, 0, 0) = (1, -2, 0)$$

$$3/ h(x, y, z) = x h(e_1) + y h(e_2) + z h(e_3)$$

$$= x(1, 0, 1) + y(0, 2, 1) + z(1, -2, 0)$$

$$= (x + z, 2y - 2z, x + y)$$

⑦

Exercices suite

4/ Par définition

$$M_f = M_f(B, B) = \begin{pmatrix} f(e_1)/B & f(e_2)/B & f(e_3)/B \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De même pour g, on a

$$M_g = M_g(B, B) = \begin{pmatrix} g(e_1)/B & g(e_2)/B & g(e_3)/B \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

5/ $M_h = M_h(B, B)$

1^{ère} Méthode: $M_h = M_f - 2M_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2^{ème} Méthode $M_h \cdot M_h(B, B) = \begin{pmatrix} h(e_1)/B & h(e_2)/B & h(e_3)/B \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3^{ème} Méthode:

L'écriture fonctionnelle $h(x, y, z) = (x + z, 2y - 2z, x - y)$

à l'écriture matricielle.

$$\underbrace{M_h}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ 2y - 2z \\ x - y \end{pmatrix}, \text{ c-à-d}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ 2y - 2z \\ x - y \end{pmatrix}$$

EXAMEN D'ALGEBRE

Exercice 1 : (6 pts)

Soient dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs

$$U = (1, -1, 0, 2) \quad , \quad V = (0, -9, -9, 6)$$

$$W_1 = (1, 2, 3, 0) \quad , \quad W_2 = (0, -1, 2, -2) \quad W_3 = (3, 7, 7, 2)$$

On considère $F = \text{Vect}(\{W_1, W_2, W_3\})$ et $G = \text{Vect}(\{U, V\})$

a- Trouver la dimension des sous-espaces F et G .

1,5

(On déterminera une base de chacun de ces sous espaces)

b- Déterminer une base de $F + G$ et $F \cap G$

1,5

c- Est-ce que le sous espace engendré par le vecteur $W_1(1, 2, 3, 1)$ est un supplémentaire de $F+G$?

1

d- En déduire un supplémentaire de $F \cap G$.

1

e- Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant F .

1

Exercice 2 : (6 pts)

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$$

Soit $B_4 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1/ Déterminer $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ et $f(e_4)$.

0,5

2/ On pose $F = \text{Vect}(\{f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\})$.

Justifier sans calcul que $\dim F \leq 3$ et que f n'est pas injective.

1,5

Déterminer une base de F .

3/ En déduire la dimension de l'image de f et que f est surjective.

1

4/ Déterminer la dimension de $\text{Ker} f$. En déduire une base de $\text{Ker} f$.

1

5/ Soit $B' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ la base de $\mathbb{R}^4$, avec u_1, u_2, u_3 , et u_4 étant des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 1, 0), u_3 = (1, 1, 0, 0) \text{ et } u_4 = (1, 0, 0, 0)$$

On considère l'application linéaire $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, définie par :

$$g(u_1) = (4, 3, 0), g(u_2) = (3, 2, 1), g(u_3) = (2, 3, 0), \text{ et } g(u_4) = (1, 2, 1).$$

Justifier l'existence de g . En déduire que $\text{Im}g = \text{Im}f$.

1

6 / Déterminer $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

1

Exercice 3 : (4pts)

I - On considère les deux polynômes suivants :

$$A(X) = 1 - 2X + X^3 + X^4 \text{ et } B(X) = 1 + X + X^2$$

Soit F la fraction
$$F(X) = \frac{1 - 2X + X^3 + X^4}{X^3(1 + X + X^2)}$$

a) Donner la forme de la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

1

b) Diviser suivant les puissances croissantes $A(X)$ par $B(X)$ jusqu'à l'ordre 2.

1

c) En déduire la décomposition en éléments simples de $F(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$.

2

Exercice 4 : (4 pts)

1/ Factoriser en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants:

a) $X^6 + 9X^3 + 8$

1

b) $X^6 + 1$

1

c) $X^4 + X^2 - 6$

1

d) $(X^2 - 4X + 1)^2 + (3X - 5)^2$

1

a/ On pose $F = \text{Vect}(\{w_1, w_2, w_3\})$.

On remarque que $w_3 = 3w_1 - w_2$, donc

$F = \text{Vect}(\{w_1, w_2, w_3\}) = \text{Vect}(\{w_1, w_2\})$. Comme w_1 et w_2 ne sont pas colinéaires, donc forment un système libre, par suite $\{w_1, w_2\}$ est une base de F et $\dim F = 2$.

On pose $G = \text{Vect}(\{u, v\})$. On remarque que u et v ne sont pas colinéaires, et par suite $\{u, v\}$ est une base de G et $\dim G = 2$.

$$\begin{aligned} \text{b/ On a } F + G &= \text{Vect}(\{w_1, w_2\}) + \text{Vect}(\{u, v\}) \\ &= \text{Vect}(\{w_1, w_2, u, v\}) \end{aligned}$$

On remarque que $v = -3w_1 + 3u$, on peut le supprimer sans changer l'espace $F + G$, donc

$$F + G = \text{Vect}(\{w_1, w_2, u\})$$

Montrons que le système est libre. En effet, nous

$$\alpha, \beta \text{ et } \gamma \text{ tels que } \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma u = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 & L_1 \Leftrightarrow \alpha = -\gamma \\ 2\alpha - \beta - \gamma = 0 & L_2 \Leftrightarrow \alpha = \beta \\ 3\alpha + 2\beta = 0 & L_3 \\ -2\beta + 2\gamma = 0 & L_4 \end{cases}$$

On remplace $\alpha = \beta$ dans $L_3 \Leftrightarrow 5\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Par suite $\alpha = \beta = \gamma = 0$ Donc le système est libre.
D'où $\dim F + G = 3$

d/ Montrons que $(F+G) \oplus \text{Vect}\{w\} = \mathbb{R}^4$

Il suffit de montrer que $\{w, w_1, w_2, u, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$

C-à-d système libre maximal car $\dim \mathbb{R}^4 = 4$

En effet, soient $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ tels que $\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma u + \theta w = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma + \theta = 0 & L_1 \\ 2\alpha - \beta - \gamma + 2\theta = 0 & L_2 \\ 3\alpha + 2\beta + 3\theta = 0 & L_3 \\ -2\beta + 2\gamma + \theta = 0 & L_4 \end{cases}$$

$L_4 \Leftrightarrow \theta = 2\beta - 2\gamma$, on remplace θ dans L_1, L_2 et L_3

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma = 0 & L_1 \\ 2\alpha + 3\beta - 5\gamma = 0 & L_2 \\ 3\alpha + 8\beta - 6\gamma = 0 & L_3 \end{cases} \quad , \quad \begin{aligned} L_1 + L_2 - L_3 &\Leftrightarrow -5\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ L_1 &\Leftrightarrow \alpha = \gamma \\ L_2 &\Leftrightarrow -3\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \end{aligned}$$

2/ donc le système est libre

On remarque $\dim F \cap G = -\dim(F+G) + \dim F + \dim G$
 $= -3 + 2 + 2 = 1$

Comme $3x_1 = v - 3u \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}v - u$

Par suite $w_1 \in G$, d'où $w_1 \in F \cap G$.

On a $\{w_1\}$ est un système libre et $\dim F \cap G = 1$,
 donc libre maximal donc c'est une base de $F \cap G$.

On a $(F+G) \oplus \text{Vect}\{w_1\} = \mathbb{R}^4$

$\text{Vect}\{x_1, x_2, u\} \oplus \text{Vect}\{w_1\} = \mathbb{R}^4$

On déduit que $\text{Vect}\{x_1\} + \text{Vect}\{w_2, u\} + \text{Vect}\{w_1\} = \mathbb{R}^4$
 $\text{Vect}\{w_1\} + \text{Vect}\{w_2, u, w_1\} = \mathbb{R}^4$

De plus $\{w_1, w_2, u, w_1\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$

donc la somme est directe, et, par suite

$\text{Vect}\{w_2, u, w_1\}$ est un supplémentaire de $F \cap G$

dans $\mathbb{R}^4$

d/ Comme $\dim F = 2$, on va déterminer

$(\dim \mathbb{R}^4 - \dim F) = 2$ équations cartésiennes de

type $ax + by + cz + dt$, avec $(a, b, c, d) \in F$.

En effet: soit $U = (x, y, z, t) \in F = \text{Vect}(\{w_1, w_2\})$

il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z, t) = \alpha w_1 + \beta w_2$

$$\begin{cases} x = \alpha & L_1 \\ y = 2\alpha - \beta & L_2 \\ z = 3\alpha + 2\beta & L_3 \\ t = -2\beta & L_4 \end{cases}$$

On prend L_1 et L_4 , on a $\alpha = x$ et $\beta = -\frac{t}{2}$

On remplace α et β par leur valeur dans L_2 et L_3 , on obtient $y = 2x - (-\frac{t}{2})$ et $z = 3x + 2(-\frac{t}{2})$

$$\Rightarrow F: \begin{cases} 4x - 2y + t = 0 \\ 3x - z - t = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vérification } w_1 = (1, 2, 3, 0) : \begin{cases} 4(1) - 2(2) + 0 = 0 \\ 3(1) - 3 - 0 = 0 \end{cases}$$

$$w_2 = (0, -1, 2, -2) : \begin{cases} 4(0) - 2(-1) - 2 = 0 \\ 3(0) - 2 - (-2) = 0 \end{cases}$$

4/

Exercice 2

1/ On a: $f(e_1) = (1, 2, 1)$, $f(e_2) = (1, 1, -1)$, $f(e_3) = (1, -1, 1)$
 $f(e_4) = (1, 1, -1)$

2°/ $F = \text{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\} = \text{Vect}\{(1, 2, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)\}$

On a: $F \subseteq \mathbb{R}^3$, et par suite $\dim F \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Comme $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f = 4$

Or $\text{Im} f = F$, donc $\dim \text{Ker} f \neq 0 \Rightarrow \text{Ker} f \neq \{0\}$
 par suite f n'est pas injective.

De plus $f(e_2) = f(e_4)$, on a $F = \text{Vect}\{(\underbrace{1, 2, 1}_u), (\underbrace{1, 1, -1}_v), (\underbrace{1, -1, 1}_w)\}$

Vérifions que le système est libre, En effet soient α, β, γ tels q

$$\alpha(1, 2, 1) + \beta(1, 1, -1) + \gamma(1, -1, 1) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & L_1 \\ 2\alpha + \beta - \gamma = 0 & L_2 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 & L_3 \end{cases}$$

On a: $L_2 + L_3 \Leftrightarrow 3\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

$L_1 + L_2 \Leftrightarrow 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$

Enfin $L_1 \Leftrightarrow \gamma = 0$. Par suite $\{u, v, w\}$ est une base de F .

3/ On remarque $f = \text{Im}f$, et comme $\dim \text{Im}f = 3$ et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, on déduit alors que $\text{Im}f = \mathbb{R}^3$ donc f est surjective.

4/ On a $\dim \text{Ker}f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Im}f = 1$.

Or on a: $f(e_2) = f(e_4) \Rightarrow f(e_2 - e_4) = 0$
donc $(0, 1, 0, -1) \in \text{Ker}f$ et comme $\dim \text{Ker}f = 1$
 $\Rightarrow \{(0, 1, 0, -1)\}$ est une base de $\text{Ker}f$.

5/ Comme $\beta' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$,
donc la donnée des images d'une base par

une application linéaire g , entraîne que g est bien définie. On a: $\text{Im}g = \text{Vect}\{g(u_1), g(u_2), g(u_3), g(u_4)\}$
et que $\text{Im}f = \text{Vect}\{f(u_1), f(u_2), f(u_3), f(u_4)\}$.

On remarque $f(u_1) = g(u_1)$, $f(u_2) = g(u_2)$, $f(u_3) = g(u_3)$
et $f(u_4) = g(u_4) \Rightarrow \text{Im}f = \text{Im}g$.

6/ Comme f et g coïncident sur une base.

donc $f = g$ et par suite $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

6/

$$a) \text{ On a: } F = \frac{1 - 2X + X^2 + X^4}{X^3(1 + X + X^2)} = \frac{P}{Q}.$$

On remarque: $d^0 P < d^0 Q \Rightarrow$ la partie entière $E = 0$.

$$P \wedge Q = 1$$

• $Q = X^3(1 + X + X^2)$, et la factorisation en ~~polynôme~~ ^{polynôme} irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
Donc la décomposition de F dans $\mathbb{R}(X)$ est de la forme:

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X^3} + \frac{AX+B}{X^2+X+1}, \quad a, b, c, A, B \in \mathbb{R}.$$

b/ la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 2 donne: $A(X) = B(X)(1 - 3X + 2X^2) + X^3(2 - X)$

c) On remplace $A(X)$ par sa valeur dans F .

$$\text{On a: } F = \frac{A(X)}{X^3 B(X)} = \frac{1 - 3X + 2X^2}{X^3} + \frac{2 - X}{X^2 + X + 1}$$

$$\text{donc } F(X) = \frac{2}{X} + \frac{-3}{X^2} + \frac{1}{X^3} + \frac{-X+2}{X^2+X+1}$$

Vérifions par deux valeurs remarquables:

$$F(1) = 2 - 3 + 1 + \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

$$F(-1) = -2 - 3 - 1 + \frac{1+2}{1-1+1} = -6 + 3 = -3$$

7/

Exercice 4

a/ $X^6 + 9X^3 + 8 = Y^2 + 9Y + 8$ avec $Y = X^3$

$$= (Y+1)(Y+8) = (X^3+1)(X^3+8)$$

$$= (X^3 - (-1)^3)(X^3 - (-2)^3) = (X+1)(X^2 - X + 1)(X+2)(X^2 - 2X + 1)$$

$\Delta_1 < 0$ $\Delta_2 < 0$

est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

b) $X^6 - 1 = (X^2)^3 - 1^3 = (X^2+1)(X^4 - X^2 + 1)$ identité remarquable $a^3 - b^3$

$$= (X^2+1)(X^4 + X^2 + 1 - 3X^2)$$

$$= (X^2+1)(X^4 - 2X^2 + 1)$$

$$= (X^2+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$$

$\Delta < 0$ $\Delta < 0$

est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

c) $X^4 + X^2 - 6 = Y^2 + Y - 6$, avec $Y = X^2$

$$= (Y-2)(Y+3) = (X^2-2)(X^2+3)$$

$$= (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X^2+3)$$

$\Delta < 0$

est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

g/

$$d/ \quad P(x) = (x^2 - 4x + 1)^2 + (3x - 5)^2$$

Remarque: Si d est une racine réelle de $P(x)$, alors

$$P(d) = 0 \Rightarrow (d^2 - 4d + 1)^2 = -(3d - 5)^2$$

donc $3d - 5 = 0$ et $d^2 - 4d + 1 = 0$ impossible
 $\Rightarrow d = \frac{5}{3}$ et $(\frac{5}{3})^2 - 4(\frac{5}{3}) + 1 \neq 0$ absurde.

Donc $P(x)$ se factorise en produit de deux polynômes irréductibles de degré 2.

1^{re} Méthode Directe:

$$P(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

Par identification on obtient $a = -2$, $b = 2$, $c = -6$ et $d = 13$.

2^{de} Méthode: Comme $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

une racine de P alors $\bar{z}$ est aussi racine de P .

Comme $\deg P = 4$, donc P admet 4 racines dans $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} (*) \quad P(x) &= (x - z_1)(x - \bar{z}_1)(x - z_2)(x - \bar{z}_2) \\ &= (x^2 - 2\operatorname{Re}(z_1)x + z_1\bar{z}_1)(x^2 - 2\operatorname{Re}(z_2)x + z_2\bar{z}_2) \end{aligned}$$

Pour cela, il suffit de déterminer deux racines complexes de P , et on remplace dans (*).

10/

En effet : on fait appel à l'identité remarquable :

$$\begin{aligned} A(X) &= (X^2 - 4X + 1)^2 + (3X - 5)^2 = (X^2 - 4X + 1)^2 - [i(3X - 5)]^2 \\ &= (X^2 - 4X + 1 - i(3X - 5))(X^2 - 4X + 1 + i(3X - 5)) \\ &= \underbrace{(X^2 - (4 + 3i)X + 1 + 5i)}_{Q_1} \underbrace{(X^2 - (4 - 3i)X + 1 - 5i)}_{Q_2} \end{aligned}$$

Q_1 et Q_2 sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$.

Cherchons les racines de Q_1 .

$$\Delta_{Q_1} = (4 + 3i)^2 - 4(1 + 5i) = 3 + 4i = (2 + i)^2$$

Les racines de Q_1 sont : $z_1 = \frac{4 + 3i - 2 - i}{2} = 1 + i$ et $z_2 = \frac{4 + 3i + 2 + i}{2} = 3 + 2i$

Comme z_1 et z_2 sont racines de Q_1 , elles sont racines de $P(X)$, d'où P se écrit :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X^2 - 2\operatorname{Re}(z_1)X + z_1\bar{z}_1)(X^2 - 2\operatorname{Re}(z_2)X + z_2\bar{z}_2) \\ &= (X^2 - 2X + 2)(X^2 - 6X + 13) \end{aligned}$$

11/

EXAMEN D'ALGEBRE I

Exercice 1 : (4.5 pts)

- 1- Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x + y - 2z + t = 0\}$
 - a- Montrer que E est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$. (0.5)
 - b- Déterminer une base de E et sa dimension. (0.5)
- 2- Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par :
 $F = \text{Vect}\{u, v, w\}$, avec
 $u = (0, -6, -1, 4)$; $v = (3, 3, 1, 5)$; $w = (2, 0, 1, -2)$.
 Déterminer une base et la dimension de F (1)
- 3- Déterminer une base de $E + F$. En déduire une base de $E \cap F$. (1.5)
- 4- Définir des supplémentaires des sous-espaces E et F dans $\mathbb{R}^4$. (1)

Exercice 2 : (7.5 pts)

Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $\beta_1 = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.

Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est défini par :

$$f(1, 0, 0) = (3, 2, 4)$$

$$f(0, 1, 0) = (1, 2, 2)$$

$$f(0, 0, 1) = (-1, -1, -1).$$

- 1/ Déterminer $f(x, y, z)$. (0.5)
- 2/ Déterminer $\text{Ker} f$ et $\text{Im} f$. (0.5)
- 3/ f est-il injectif ? (0.25)
- 4/ Considérons $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (x, y, z)\}$ Montrer que P est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 avec $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de P,
 $v_1 = (1, 0, 2)$ et $v_2 = (0, 1, 1)$. (1)
- 5/ soit $H = \text{Vect}\{v_3\}$, avec $v_3 = (1, 1, 2)$. Montrer que $f(v_3) = 2v_3$. (0.25)
- 6/ Montrer que $\beta_2 = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. (0.25)
- 7/ P et H sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. (0.25)

8/ Soit g l'endomorphisme défini par : $g = f \circ f \circ f$.

(1)

Montrer que $g(v_1) = v_1$, $g(v_2) = v_2$ et $g(v_3) = 2^3 v_3$

9/ soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(1)

Déterminer les coordonnées de u dans la base $\beta_2 = (v_1, v_2, v_3)$ en fonction de x, y et z

10/ En déduire $g(x, y, z)$.

(1.5)

Exercice 3 : (5.5 pts)

On considère le polynôme $A(X)$ défini par

$$A(X) = X^6 + 2X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1$$

1- Montrer que -1 est une racine de $A(X)$.

(1)

Quel est son ordre ?

2- Montrer que i est une racine de $A(X)$

(1)

Quel est son ordre ?

3- En déduire la factorisation de $A(X)$ en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

et $\mathbb{C}[X]$.

(1)

4- On considère la fraction $F(X) = \frac{X^6}{A(X)}$

a- Donner la forme de la décomposition de $F(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$.

(0.5)

b- Décomposer la fraction $F(X)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

(2)

Exercice 4 : (2.5 pts)

1/ Factoriser le polynôme $A(X) = X^3 + X^2 + X + 1$

(1)

Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

2/ Déterminer **uniquement** le reste de la division euclidienne de

(1.5)

$B(X) = X^{12} + X^{10} + X^8$ par $A(X)$.

Exercice 1:

①

a/ Soit $(x, y, z, t) \in E$, donc $t = -2x - y + 2z$

$$\begin{aligned} \text{donc } (x, y, z, t) &= (x, y, z, -2x - y + 2z) \\ &= x \underbrace{(1, 0, 0, -2)}_{V_1} + y \underbrace{(0, 1, 0, -1)}_{V_2} + z \underbrace{(0, 0, 1, 2)}_{V_3} \end{aligned}$$

$$\text{donc } E = \text{Vect}(\{V_1, V_2, V_3\}),$$

comme E est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs V_1, V_2 et V_3 , on déduit que E est un s.v. de $\mathbb{R}^4$

Vérifions que le système (V_1, V_2, V_3) est libre.

$$\begin{aligned} \text{Soient } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ tels que } \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 &= 0 \\ \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 & \quad (\text{CALCUL SIMPLE}) \end{aligned}$$

donc (V_1, V_2, V_3) est libre maximal car

donc (V_1, V_2, V_3) est une base de E .

$$b/ F = \text{Vect}(\{U, V, W\})$$

$$\text{soient } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ tels que } \alpha_1 U + \alpha_2 V + \alpha_3 W = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 & L_1 \\ -6\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 & L_2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 & L_3 \\ 4\alpha_1 + 5\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 & L_4 \end{array} \right.$$

(2)

$$L_2(\Rightarrow) \boxed{a_2 = 3a_1}$$

$$L_1(\Rightarrow) 2a_3 = -3a_2 = -3(3a_1) = -9a_1$$

$$\boxed{a_3 = -\frac{9}{2}a_1}$$

$$L_3(\Rightarrow) (-a_1) + (3a_2) + \left(-\frac{9}{2}\right)a_1 = 0$$

$$\left(2 - \frac{9}{2}\right)a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = a_3 = 0$$

Donc $\dim F = 3$ et (u, v, w) est une base de F

$$30/ \quad E + F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} + \text{Vect}\{u, v, w\}$$

$$= \text{Vect}\{\underbrace{v_1, v_2, v_3, u, v, w}_{\text{}}\}$$

Comme $E + F \subseteq \mathbb{R}^4$, donc $\dim E + F \leq 4$

Vérifions que (v_1, v_2, v_3, u) est un système libre

donc Libre maximal, donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$

$$\text{Car } \dim \mathbb{R}^4 = 4 \Rightarrow \mathbb{R}^4 = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, u\}$$

$$\text{et par suite } E + F = \mathbb{R}^4$$

comme $\dim \mathbb{R}^4$ est finie, on

$$\underbrace{\dim E + F}_{4} = \underbrace{\dim E}_{3} + \underbrace{\dim F}_{3} - \dim E \cap F$$

$$\Rightarrow \dim E \cap F = 2$$

$$E: 2x + y - 2z + t = 0 \quad (\square) \quad (3)$$

Comme $u = (0, -6, -1, 4)$ vérifie $(\square)$

$$\text{Car } 2 \times 0 - 6 - 2 + 4 = 0$$

et $w = (2, 0, 1, -2)$ vérifie $(\square)$

$$\text{Car } 2 \times 2 + 0 - 2 \times 1 - 2 = 0$$

donc $u, w \in E$, par suite

$$\text{Vect}\{u, w\} \subset E \cap F$$

$$\text{or dim Vect}\{u, w\} = \text{dim}(E \cap F)$$

$$\Rightarrow E \cap F = \text{Vect}\{u, w\}$$

car $\{u, w\}$ est une base de $E \cap F$

$$4) \text{ On a } E = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$$

On va compléter (v_1, v_2, v_3) en une base de $\mathbb{R}^4$

On choisit un vecteur parmi la base canonique

Montrons que (v_1, v_2, v_3, e_2) est libre maximal
donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$, un supplémentaire de

$$G = \text{Vect}\{e_2\}$$

De même pour F .

Exercice 3

(4)

$$A(1) = \cancel{1} - \cancel{2} + \cancel{3} - \cancel{4} + \cancel{3} - \cancel{2} + \cancel{1} = 0$$

$$A'(x) = 6x^5 + 10x^4 + \cancel{12x^3} + 12x^2 + 6x + 2$$

$$A'(-1) = -6 + 10 - \cancel{12} + \cancel{12} - 6 + 2 = -6 + 10 - 12 + 12 - 6 + 2$$

$$A'(-1) = 0$$

$$A''(x) = 30x^4 + 40x^3 + 36x^2 + 24x + 6$$

$$A''(-1) = 30 - 40 + 36 - 24 + 6$$

$$= 72 - 64 \neq 0$$

donc 1 est une racine d'ordre 2

$$2^\circ / A(i) = (1)^6 + 2(i)^5 + 3(i)^4 + 4(i)^3 + 3(i)^2 + 2i + 1$$

$$= -1 + \cancel{2i} + \cancel{3} - \cancel{4i} - \cancel{3} + \cancel{2i} + 1$$

$$= 0$$

$$A'(i) = 6(i)^5 + 10(i)^4 + 12(i)^3 + 12(i)^2 + 6i + 2$$

$$= + \cancel{6i} + 10 - \cancel{12i} - 12 + \cancel{6i} + 2 = 0$$

$$A''(i) = 30(i)^4 + 4(i)^3 + 36i^2 + 24i + 2$$

$$= 30 - 40i - 36 + 24i + 2$$

$$= -16i - 4 \neq 0$$

Donc i est une racine d'ordre 2

3°/ Comme $A(x) \in \mathbb{R}[x]$, à coefficients dans $\mathbb{R}$ et comme i est une racine de $A(x)$ d'ordre 2, alors $\bar{i} = -i$ est une racine de $A(x)$ de même ordre que i ("voir cours")

Pour suite $A(x) = (x-i)^2 (x+i)^2 (x+1)^2$

$$= (x^2+1)^2 (x+1)^2$$

La factorisation de $A(x)$ ds $\mathbb{R}[x]$ est: $A(x) = (x^2+1)^2 (x+1)^2$ car x^2+1 est irréductible ds $\mathbb{R}[x]$.

4/ On pose $F(x) = \frac{x^6}{A(x)} = \frac{P}{Q} = \frac{(P-Q) + Q}{Q}$

$$= 1 - \frac{2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2 (x+1)^2}$$

On pose $F_1(x) = \frac{2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2 (x+1)^2}$

Pour décomposer $F(x)$ ds $\mathbb{R}(x)$, il suffit de

décomposer $F_1(x)$ ds $\mathbb{R}(x)$,

En effet:

(6)

$$\frac{2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2 (x + 1)^2}$$

$$(x^2 + 1)^2 (x + 1)^2$$

$$= \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)^2} + \frac{C(x + 1)}{(x^2 + 1)} + \frac{2}{(x + 1)} + \frac{D}{(x + 1)^2}$$

Calcul de B

$$B = \frac{(-2)(+3) - 4 + 3(-2) + 1}{(1+1)^2} = \boxed{\frac{-1}{4}}$$

On utilise une valeur remarquable 0 et on utilise d'infini

$$F(0) = 1 = \boxed{B + D + 2 - \frac{1}{4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = C + 2 = 2 \Rightarrow \boxed{C = 2 - 2}$$

Calcul de A et B

$$Ai + B = \frac{2(i)^5 + 3(i)^4 + 4(i)^3 + 3(i)^2 + 2(i) + 1}{(i+1)^2}$$

$$= \frac{2i + 3 - 4i + 3 + 2i + 1}{-1 + 2i + 1} = \frac{1}{2i} = \frac{1}{2}i$$

$$A = \frac{1}{2} \text{ et } B = 0$$

$$F(x) = \frac{x^6}{(x^2+1)^2(x+1)^2} = \frac{P}{Q} = \frac{(P_1+P_2)+Q}{Q}$$

(7)

$$= 1 + \frac{P-Q}{Q} = 1 - F_1$$

Donc

$$\begin{cases} D+d = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \\ C+d = 2 \end{cases} \quad \text{Car } B=0$$

On utilise une autre valeur remarquable : 1

$$F(1) = \frac{-1/2}{4} + \frac{C+D}{2} + \frac{2}{2} + \frac{-1/4}{4}$$

$$-\frac{1}{8} + \frac{C+D}{2} + \frac{2}{2} - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$-\frac{2}{16} + \frac{8C+8D}{16} + \frac{8d}{16} - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$8C + 8D + 8d = 18$$

$$4C + 4D + 4d = 9$$

$$4(C+d) + 4d = 9$$

$$4 \times 2 + 4d = 9$$

$$d = 1$$

$$d = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1$$

Finalelement la decomposition de F_1 en e part s ple et: ⑧ ⑦

$$F_1(x) = \frac{\frac{1}{2}x}{(x^2+1)^2} + \frac{x+\frac{1}{4}}{(x^2+1)} + \frac{1}{(x+1)} + \frac{-\frac{1}{4}}{(x+1)^2}$$

$$F(x) = 1 + \frac{\frac{1}{2}x}{(x^2+1)^2} - \frac{x+\frac{1}{4}}{(x^2+1)} - \frac{1}{(x+1)} + \frac{\frac{1}{4}}{(x+1)^2}$$

Exercice 2
1/ On pose $(x, y, z) = x e_1 + y e_2 + z e_3$, (9)

On applique f , on obtient :

$$f(x, y, z) = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3),$$

$$\text{donc : } f(x, y, z) = x(3, 2, 4) + y(1, 2, 2) + z(-1, 1, -1)$$

$$f(x, y, z) = (3x + y - z, 2x + 2y - z, 4x + 2y - z)$$

$$2/ \text{ soit } (x, y, z) \in \ker f \Leftrightarrow f(x, y, z) = 0$$

$$\text{donc } \begin{cases} 3x + y - z = 0 & L_1 \\ 2x + 2y - z = 0 & L_2 \\ 4x + 2y - z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\text{On a : } L_1 - L_2 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$L_3 - L_2 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$$

On remplace dans L_1 , on obtient $z = 0$

$$\text{D'où } \ker f = \{0\} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective}$$

Car $\dim E = \dim F$ (dans ce cas $E = F = \mathbb{R}^3$)

$$\text{Par suite } \text{Im} f = \mathbb{R}^3$$

3/ f est bijective

$$4/ \text{ Soit } (x, y, z) \in P \Leftrightarrow f(x, y, z) = (x, y, z)$$

$$\begin{cases} 3x + y - z = x \\ 2x + 2y - z = y \quad (\Rightarrow) \quad 2x + y - z = 0 \\ 4x + 2y - z = z \end{cases}$$

donc $\boxed{z = 2x + y}$

P a pour équation cartésienne: $z = 2x + y$

donc $(x, y, z) = (x, y, 2x + y) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 1)$

et par suite $P = \text{Vect}\left\{\underbrace{(1, 0, 2)}_{V_1}, \underbrace{(0, 1, 1)}_{V_2}\right\}$

et donc un sous-espace de $\mathbb{R}^3$

Comme v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, donc un système libre et $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de P

so/ on a $f(v_3) = f(1, 1, 2) = (2, 2, 4) = 2(1, 1, 2) = 2v_3$

so/ il suffit de montrer que (v_1, v_2, v_3) est un système libre maximal car $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

En effet, soient a_1, a_2, a_3 tels que: $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} 2a_1 + a_3 = 0 & L_1 \quad (\Rightarrow) \quad a_1 = -\frac{1}{2}a_3 \\ a_2 + a_3 = 0 & L_2 \quad (\Rightarrow) \quad a_2 = -a_3 \\ 2a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 & L_3 \end{cases}$$

On remplace a_1 et a_2 dans L_3 , on a: $-2a_3 - a_3 + 2a_3 = 0$
 $(\Rightarrow) -a_3 = 0 \quad \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$

7/ on a $P = \text{Vect} \{v_1, v_2\}$ avec $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de P et $\beta_H = (v_3)$ est une base de $H = \text{Vect} \{v_3\}$.
 Puisque $\beta \cup \beta_H = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$,
 on déduit que P et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

8/ on a: $g(v_1) = f \circ f \circ f(v_1) = f^2(f(v_1)) = f^2(v_1)$
 $= f(f(v_1)) = f(v_1) = v_1$

De même $g(v_2) = v_2$

On a: $g(v_3) = f^2(f(v_3)) = f^2(2v_3) = 2f^2(v_3)$
 $= 2f(f(v_3)) = 2f(2v_3) = 2^2f(v_3) = 2^3v_3$

9/ On pose $u = (x, y, z) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = x & L_1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = y & L_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = z & L_3 \end{cases}$$

$L_3 \text{ et } L_1 \Leftrightarrow 2(\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_2 = z \Leftrightarrow 2x + \alpha_2 = z$

$$\boxed{\alpha_2 = -2x + z}$$

$L_2 \Leftrightarrow \alpha_3 = y - \alpha_2 = \boxed{2x + y - z = \alpha_3}$

$L_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = x - \alpha_3 = \boxed{-x - y + z = \alpha_1}$

10/ On a: $(x, y, z) = d_1 V_1 + d_2 V_2 + d_3 V_3$

On applique g , on obtient:

$$g(x, y, z) = d_1 g(V_1) + d_2 g(V_2) + d_3 g(V_3)$$

$$= d_1 V_1 + d_2 V_2 + d_3 2^3 V_3$$

et on remplace d_1, d_2 et d_3 par leurs valeurs

trouvées par on a:

$$g(x, y, z) = (-x - y + 3)V_1 + (-2x + 3)V_2 + 2^3(2x + y - 3)V_3$$

$$= (-x - y + 3)(1, 0, 2) + (-2x + 3)(0, 1, 1) + 2^3(2x + y - 3)(1, 1, 2)$$

$$= ((-1 + 2^4)x + (-1 + 2^3)y + (1 - 2^3)3)$$

$$((-2 + 2^4)x + (2^3)y + (1 - 2^3)3)$$

$$(-4 + 4 \cdot 2^3)x + (-2 + 2 \cdot 2^3)y + (3 - 2^3)3)$$

$$g(x, y, z) = ((-1 + 2^4)x + (-1 + 2^3)y + (1 - 2^3)3, (-2 + 2^4)x + 2^3y + (1 - 2^3)3, (-4 + 4 \cdot 2^3)x + (-2 + 2 \cdot 2^3)y + (3 - 2^3)3)$$

Enfin: $g(x, y, z) = (15x + 7y - 7z, 14x + 8y - 7z, 28x + 14y - 13z)$

1°/ On remarque $A(x)(x-1) = x^4 - 1$

$$\begin{aligned} A(x)(x-1) &= (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) \\ &= (x-1)(x+1)(x+i)(x-i) \end{aligned}$$

Donc les racines de $x^4 - 1$ sont : 1, -1, i et $-i$

On déduit alors que les racines de $A(x)$ sont 1, i et $-i$. Donc $A(x) = (x+1)(x-i)(x+i) = (x+1)(x^2+1)$

2°/ La division euclidienne de $B(x)$ par $A(x)$ est :

$$(*) \quad B(x) = A(x)Q(x) + R(x), \text{ avec } \deg R(x) \leq 2$$

donc $R(x)$ s'écrit $R(x) = ax^2 + bx + c$

On remplace x par -1, i et $-i$, on obtient :

$$S \begin{cases} \cdot B(-1) = R(-1) + \overbrace{A(-1)}^0 Q(-1) \\ \cdot B(i) = R(i) + A(i)Q(i) \\ \cdot B(-i) = R(-i) + A(-i)Q(i) \end{cases}$$

$$S \Rightarrow \begin{cases} 3 = a - b + c & L_1 \\ 1 = a(i)^2 + bi + c = -a + bi + c & L_2 \\ 1 = -a - bi + c & L_3 \end{cases}$$

$$\text{on a : } L_2 \Leftrightarrow L_3 \Rightarrow 0 = 2bi \Rightarrow b = 0$$

$$L_1 + L_3 \Rightarrow 4 = 2c \Rightarrow c = 2$$

$$L_1 \Rightarrow a = 1$$

Donc

$$\boxed{R(x) = x^2 + 2}$$

Examen de Rattrapage

Exercice 1 :

Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

1. À l'aide de divisions euclidiennes successives :

$$F = \frac{4X^6 - 2X^5 + 11X^4 - X^3 + 11X^2 + 2X + 3}{X(X^2 + 1)^3}$$

2. À l'aide d'une division selon les puissances croissantes :

$$G = \frac{4X^4 - 10X^3 + 8X^2 - 4X + 1}{X^3(X - 1)^2}$$

Exercice 2 :

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que :

$$f(e_1) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3), f(e_2) = \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3) \text{ et } f(e_3) = \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3)$$

Soient $E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = -u\}$ et $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$

1. Montrer que E_{-1} et E_1 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ appartiennent à E_{-1} et que $e_1 + e_2 + e_3$ appartient à E_1 .
3. Que peut-on en déduire sur les dimensions de E_{-1} et de E_1 ?
4. Déterminer $E_{-1} \cap E_1$.
5. A-t-on $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$?
6. Calculer $f^2 = f \circ f$ et en déduire que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Correction de l'examen de rattrapage

Correction exercice 1

$$1. F = \frac{4X^6 - 2X^5 + 11X^4 - X^3 + 11X^2 + 2X + 3}{X(X^2+1)^3}$$

(a) La décomposition en éléments simples de F est de la forme $F = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{(X^2+1)^3} + \frac{dX+e}{(X^2+1)^2} + \frac{fX+g}{X^2+1}$. Il est difficile d'obtenir les coefficients par substitution.

(b) On va ici se contenter de trouver a : on multiplie F par X , puis on remplace X par 0, on obtient $a = 3$.

(c) On fait la soustraction $F_1 = F - \frac{a}{X}$. On sait que la fraction F_1 doit se simplifier par X . On trouve $F_1 = \frac{X^5 - 2X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X + 2}{(X^2+1)^3}$.

(d) La fin de la décomposition se fait par divisions euclidiennes successives. Tout d'abord la division du numérateur $X^5 - 2X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X + 2$ par $X^2 + 1$:

$$X^5 - 2X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X + 2 = (X^2 + 1)(X^3 - 2X^2 + X + 1) + X + 1$$

puis on recommence en divisant le quotient obtenu par $X^2 + 1$, pour obtenir

$$X^5 - 2X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X + 2 = (X^2 + 1)((X^2 + 1)(X - 2) + 3) + X + 1$$

On divise cette identité par $(X^2 + 1)^3$:

$$F_1 = \frac{(X^2+1)((X^2+1)(X-2)+3)+X+1}{(X^2+1)^3} = \frac{X+1}{(X^2+1)^3} + \frac{3}{(X^2+1)^2} + \frac{X-2}{X^2+1}$$

Ainsi

$$F = \frac{3}{X} + \frac{X+1}{(X^2+1)^3} + \frac{3}{(X^2+1)^2} + \frac{X-2}{X^2+1}$$

Remarque : cette méthode des divisions successives est très pratique quand la fraction à décomposer a un dénominateur simple, c'est à dire comportant un dénominateur du type Q^n où Q est du premier degré, ou du second degré sans racine réelle.

$$2. G = \frac{4X^4 - 10X^3 + 8X^2 - 4X + 1}{X^3(X-1)^2}$$

La décomposition en éléments simples de G est de la forme $\frac{a}{X^3} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X} + \frac{d}{X-1} + \frac{e}{X-1}$. La méthode la plus efficace pour déterminer les coefficients est d'effectuer une division suivant les puissances croissantes, ici à l'ordre 2 (de sorte que le reste soit divisible par X^3 comme le dénominateur). On calcule la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 2 du numérateur $1 - 4X + 8X^2 - 10X^3 + 4X^4$ par $(X-1)^2$, ou plutôt par $1 - 2X + X^2$:

$$1 - 4X + 8X^2 - 10X^3 + 4X^4 = (1 - 2X + X^2)(1 - 2X + 3X^2) + (-2X^3 + X^4)$$

Remarquer que le reste $-2X^3 + X^4$ est divisible par X^3 .

En divisant les deux membres de cette identité par $X^3(X-1)^2$, on obtient a, b et c d'un seul coup :

$$\begin{aligned} G &= \frac{4X^4 - 10X^3 + 8X^2 - 4X + 1}{X^3(X-1)^2} \\ &= \frac{(X-1)^2(1-2X+3X^2) + (-2X^3+X^4)}{X^3(X-1)^2} \\ &= \frac{1}{X^3} - \frac{2}{X^2} + \frac{3}{X} + \frac{X-2}{(X-1)^2} \end{aligned}$$

Il reste à trouver d et e : par exemple en faisant la division euclidienne de $X-2$ par $X-1$: $X-2 = (X-1) - 1$.

$$G = \frac{1}{X^3} - \frac{2}{X^2} + \frac{3}{X} - \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1}$$

Correction exercice 2.

1. Soient u, u' deux vecteurs de E_{-1} , alors $f(u) = -u$ et $f(u') = -u'$. Soient λ, λ' deux réels.
 $f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u') = \lambda(-u) + \lambda'(-u') = -(\lambda u + \lambda' u')$.
 La première égalité car f est linéaire, la seconde car u et u' sont dans E_{-1} .
 La troisième montre que $\lambda u + \lambda' u' \in E_{-1}$.

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3}$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, la seconde égalité montre que $0_{\mathbb{R}^3} \in E_{-1}$.
 E_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soient u, u' deux vecteurs de E_1 , alors $f(u) = u$ et $f(u') = u'$. Soient λ, λ' deux réels.

$$f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u') = \lambda u + \lambda' u'$$

La première égalité car f est linéaire, la seconde car u et u' sont dans E_1 .

La seconde montre que $\lambda u + \lambda' u' \in E_1$.

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, cela montre aussi que $0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$.

E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2.

$$f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3\right) = -e_1 + e_2 = -(e_1 - e_2)$$

Donc $e_1 - e_2 \in E_{-1}$

$$f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3\right) = -e_1 + e_3 = -(e_1 - e_3)$$

Donc $e_1 - e_3 \in E_{-1}$

$$f(e_1 + e_2 + e_3) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3)$$

$$= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 = e_1 + e_2 + e_3$$

Donc $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$

3. Les vecteurs $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille de E_{-1} , donc la dimension de E_{-1} est supérieur ou égal à 2.

E_1 a un vecteur non nul, donc sa dimension est supérieur ou égal à 1.

4. Soit $u \in E_{-1} \cap E_1$, $f(u) = -u$ et $f(u) = u$ donc $-u = u$, ce qui signifie que le seul vecteur de $E_{-1} \cap E_1$ est le vecteur nul.

$$E_{-1} \cap E_1 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

5.

$$\dim(E_{-1} + E_1) = \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) - \dim(E_{-1} \cap E_1) = \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) \geq 2 + 1 = 3$$

Comme

$$E_{-1} + E_1 \subset \mathbb{R}^3$$

On a

$$\dim(E_{-1} + E_1) \leq 3$$

Finalement

$$\dim(E_{-1} + E_1) = 3$$

Remarque : cela entraîne que $\dim(E_{-1}) = 2$ et $\dim(E_1) = 1$

L'intersection de ces sous-espaces vectoriels étant réduit au vecteur nul on a

$$E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$$

6. On peut calculer $f^2(e_1)$, $f^2(e_2)$ et $f^2(e_3)$ pour s'apercevoir que ces vecteurs valent respectivement e_1 , e_2 et e_3 . Mais c'est long.

Autre méthode

D'après la question précédente $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 + e_2 + e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(Une base de E_{-1} collée à une base de E_1 donne une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$).

Tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ s'écrivent de manière unique comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs, il suffit de montrer que $f^2(e_1 - e_2) = e_1 - e_2$, $f^2(e_1 - e_3) = e_1 - e_3$ et que $f^2(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$.

Là, j'ai fait long, en fait il suffit de montrer les égalités ci-dessous

$$f^2(e_1 - e_2) = f(f(e_1 - e_2)) = f(-(e_1 - e_2)) = -f(e_1 - e_2) = -(-(e_1 - e_2)) = e_1 - e_2$$

Car $e_1 - e_2 \in E_{-1}$

$$f^2(e_1 - e_3) = f(f(e_1 - e_3)) = f(-(e_1 - e_3)) = -f(e_1 - e_3) = -(-(e_1 - e_3)) = e_1 - e_3$$

Car $e_1 - e_3 \in E_{-1}$

$$f^2(e_1 + e_2 + e_3) = f(f(e_1 + e_2 + e_3)) = f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

Car $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$

Par conséquent $f^2 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$

Cela montre que $f^{-1} = f$ et que f est bijective.

Examen D'Algèbre I

Exercice 1 : (5pts)

Dans $\mathbb{R}^4$, définissons $a = (3, 2, 1, 4)$, $b = (1, 1, 1, 3)$, $c = (4, 2, 0, 2)$,
 $d = (-1, 0, 1, 2)$ et $e = (0, 3, 2, 1)$.

- 1/ Le système (a, b, c) est-il libre ?
- 2/ Le système (a, c, d) est-il libre ?
- 3/ Notons $E = \text{Vect}(\{a, b, c, d, e\})$. Déterminer la dimension de E .
- 4/ Notons $F = \text{Vect}(\{a, b, c\})$ et $G = \text{Vect}(\{d, e\})$. Déterminer une base de F puis de G .
- 5/ Déterminer un système générateur de $F + G$. En déduire une base de $F + G$.
- 6/ Quelle est la dimension de $F \cap G$? Déterminer une base de $F \cap G$.
- 7/ Déterminer l'équation cartésienne de F .

Exercice 2 : (4pts)

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
 $f(e_1) = 2e_1 + e_2 + 3e_3$; $f(e_2) = e_2 - 3e_3$; $f(e_3) = -2e_2 + 2e_3$

1/ Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer l'image par f du vecteur u . (calculer $f(u)$)

2/ soient $E = \{u \in \mathbb{R}^3; f(u) = 2u\}$ et

$$F = \{u \in \mathbb{R}^3; f(u) = -u\}.$$

Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

3/ Déterminer une base de E et une base de F .

4/ Est-ce que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

5/ Déterminer un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 (4pts)

On considère les deux polynômes :

$$P(x) = X^5 - X^4 - 2X^3 + 2X^2 + X - 1 \text{ et } Q(X) = X^2 + X + 1$$

1/ Montrer que 1 est racine de $P(X)$. Quel est son ordre ? En déduire la décomposition en facteurs irréductibles de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

2/ Montrer que $P(X)$ et $Q(X)$ sont premiers entre eux par deux méthodes différentes.

3/ Trouver deux polynômes $U(X)$ et $V(X)$ tels que

$$P(X)U(X) + Q(X)V(X) = 1$$

$$PU + QV = 1$$

Exercice 4 : (4pts)

On considère les deux polynômes

$$P(X) = X^4 + 1 \text{ et } Q(X) = X^3 - 1.$$

1/ Décomposer en facteurs irréductibles les polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$. En déduire qu'ils sont premiers entre eux.

2/ Justifier l'existence de deux polynômes U et V tels que $PU + QV = 1$.

(On ne demande pas de calculer U et V)

3/ Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction

$$F = \frac{X^4 + 1}{X^3 - 1}$$

Exercice 5 : (3pts)

✓ Donner la forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la

fraction suivante :

$$F = \frac{X^4 + X + 1}{X(X^2 + 1)^3}$$

~~2/ Décomposer~~ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction F .

EXAMEN D'ALGÈBRE
CORRIGÉ

EXERCICE 1:

1/ Après calcul, on trouve: $-2a + 2b + c = 0$

2/ Après calcul, on trouve $\neq d = a \neq c$

donc les 2 systèmes ne sont pas libres.

3/ $E = \text{Vect}(\{a, b, c, d, e\})$

On a: $b = a - \frac{1}{2}c$

$d = a - c$

donc $E = \text{Vect}(\{a, b, c, d, e\}) = \text{Vect}(\{a, c, e\})$

On vérifie que le système (a, c, e) est libre, et
 $\dim E = 3$

En effet: Soient α, β, γ tels que:

$$\alpha a + \beta c + \gamma e = 0$$

$$\alpha(3, 2, 1, 4) + \beta(4, 2, 0, 2) + \gamma(0, 3, 2, 1) = 0$$

$$L_1 \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha + 4\beta = 0 \\ 2\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} 4\beta = 3(2\gamma) = 6\gamma \\ \boxed{\beta = \frac{3\gamma}{2}} \end{array}$$

$$L_3 \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + 2\gamma = 0 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha = \boxed{-2\gamma}$$

$$L_4 \left\{ \begin{array}{l} 4\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{array} \right.$$

11 On remplace ds L_4 : $4(-2\gamma) + 2(\frac{3\gamma}{2}) + \gamma = -\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$
et par suite $\alpha = \beta = 0$

4/ On a $F = \text{Vect}(\{a, b, c\}) = \text{Vect}(\{a, b\})$

Comme a et b ne sont pas colinéaires donc
forment un système Libre, et par suite $\dim F = 2$
De même $G = \text{Vect}(\{d, e\})$ (d, e) est une base de G
 $\dim G = 2$

5/ $F + G = \text{Vect}(\{a, b, c\}) + \text{Vect}(\{d, e\})$
 $= \text{Vect}(\{a, b, c, d, e\}) = E$
 $= \text{Vect}(\{a, c, e\})$

donc (a, c, e) est un système générateur
de $F + G$. Et comme le système est libre
donc c'est une base de $F + G$.

6/ $\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim (F + G)$
 $= 2 + 2 - 3 = 1$.

Pour trouver une base de $F \cap G$, il suffit
de trouver un vecteur non nul de $F \cap G$ solution
du système: $u = xa + yb = zd + te$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$

cela donne :

$$\begin{cases} 3x + y = -3 & L_1 \\ 2x + y = 3t & L_2 \\ x + y = z + 2t & L_3 \\ 4x + 3y = 2z + t & L_4 \end{cases}$$

2/

On résout le système
$$\begin{cases} 3x + y = -3 & L_1 \\ 2x + y = 3t & L_2 \end{cases}$$

$L_1 - L_2: x = -3 - 3t$

$L_2 \Rightarrow y = 3t - 2x = 3t - 2(-3 - 3t)$
 $y = 3t + 23$

On remplace dans L_3
 $(-3 - 3t) + (3t + 23) = z + 2t$
 $2t = 0 \Rightarrow t = 0$

donc $y = 23$ et $x = -3$, $t = 0$, z est arbitraire

donc $u = -3a + 23b = 3d$
 $= 3(-a + 23b) = 3d$

On prend $z = 1$ $u = \underbrace{-a + 23b}_{\in F} = \underbrace{d}_{\in G} \in F \cap G$

par suite $F \cap G = \text{Vect}\{d\}$

7/ Soit $u = (x, y, z, t) \in F = \text{Vect}\{a, b\}$, $\exists \alpha, \beta$ tels que
 $(x, y, z, t) = \alpha a + \beta b$

$(\Leftrightarrow) \begin{cases} 3\alpha + \beta = x \\ 2\alpha + \beta = y \\ \alpha + \beta = z & L_3 \\ 4\alpha + 3\beta = t & L_4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = x - y} \text{ et } \boxed{\beta = -2x + 3y}$

On remplace α et β dans L_3 et L_4 , donc

$L_3 \Leftrightarrow z = \underbrace{x - y}_{-2} = \underbrace{2x + 3y}_{+3} = -2x + 2y$

$L_4 \Leftrightarrow t = 4x - 4y + 6x + 9y = -2x + 5y$

3/ $F = \begin{cases} z = -2x + 2y \\ t = -2x + 5y \end{cases}$

EXERCICE 2.

1/ Soit $u = (x, y, z)$, on peut écrire u sous la forme suivante :

$$(x, y, z) = x e_1 + y e_2 + z e_3$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } f(x, y, z) &= x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) \\ &= x(2, 1, 3) + y(0, 1, -3) + z(0, -2, 2) \\ &= (2x, x + y - 2z, 3x - 3y + 2z) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(x, y, z) = (2x, x + y - 2z, 3x - 3y + 2z)$$

$$2/ \text{ On a : } E = \{ u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = 2u \}$$

Montrons que E vérifie la caractérisation
concernant un sev de $\mathbb{R}^3$. En effet :

$$\text{Concernant un sev de } \mathbb{R}^3. \text{ En effet : } f(0, 0, 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow (0, 0, 0) \in E$$

$$i/ E \neq \emptyset \quad \text{Car } f(0, 0, 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow (0, 0, 0) \in E$$

$$ii/ \text{ Soient : } u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\text{Vérifions que } \alpha u + \beta v \in E.$$

$$\text{Calculons } f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha(2u) + \beta(2v)$$

$$= 2(\alpha u + \beta v), \text{ ce qui justifie que } \alpha u + \beta v \in E$$

D'une manière analogue, on justifie que F .

$$\text{un sev de } \mathbb{R}^3$$

$$3/ \text{ Soit } u \in E, f(u) = 2u \Leftrightarrow f(x, y, z) = 2(x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2x \\ x + y - 2z = 2y \\ 3x - 3y + 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq 2z = 2x \Rightarrow z = x \\ x = y \end{cases}$$

$$\text{donc } u = x(1, 1, 0), \text{ c-à-d } E = \text{Vect} \{ (1, 1, 0) \}$$

Soit $u = (x, y, z) \in F$, donc

$$f(x, y, z) = - (x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -x \\ x + y + 2z = -y \\ 3x - 3y + 2z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = y \\ z = y \end{cases}$$

$$\text{donc } u = (0, y, y) = y(0, 1, 1)$$

$$\text{donc } F = \text{Vect}\{(0, 1, 1)\}$$

Enfin $\beta_E = \{(\underbrace{1, 1, 0}_a)\}$ est une base de E

$\beta_F = \{(\underbrace{0, 1, 1}_b)\}$ est une base de F

4/ Comme $\dim E + \dim F = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$
donc E et F ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$

5/ Déterminons un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.
Pour cela, on complète a en une base de $\mathbb{R}^3$.
On choisit les candidats parmi la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On complète, par exemple, par (e_1, e_3) .
Vérifions si e_1, e_3 et a forment un système libre

$$\text{Soit } \alpha e_1 + \beta e_3 + \gamma a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 0, 1) + \gamma(1, 1, 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

5/ donc un supp. de E dans $\mathbb{R}^3$ est $G = \text{Vect}\{e_1, e_3\}$

EXERCICE 3

$$A) \quad P(1) = 1^5 - 1^4 - 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 \\ = 0$$

$$\text{Calculons } P'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1$$

$$P'(1) = 5 - 4 - 6 + 4 + 1 = 10 - 10 = 0$$

$$\text{Calculons } P''(x) = 20x^3 - 12x^2 - 12x + 4$$

$$P''(1) = 24 - 24 = 0$$

$$\text{Calculons } P'''(x) = 60x^2 - 24x - 12$$

$$P'''(1) = 60 - 24 - 12 \neq 0$$

donc 1 est un zéro d'ordre 3

$$\text{donc } P(x) = (x-1)^3 Q(x), \text{ comme } d^0 P = 4$$

$$\Rightarrow d^0 Q = 1, \text{ par identification si } Q = ax + b$$

On déduit que $a = 1$ et $b = 1$

$$\text{donc } P(x) = (x-1)^3 (x+1) \quad (*)$$

B) Méthode 1

(x) est la fact en polynômes irr. dans $\mathbb{R}[x]$

$Q(x) = x^2 + x + 1$ est un polynôme irr.

Puisque il n'y pas de facteurs communs donc

$$P \wedge Q = 1 \quad (\text{vrais})$$

$$6) \quad U = \frac{1}{9}x - \frac{1}{9}, \quad V = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{9}$$

EXERCICE 4

1/ On a: $P(x) = x^4 + 1 = x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2$
 $= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = \underbrace{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}_{P_1} \underbrace{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}_{P_2}$

$\Delta_{P_1} = -2 < 0$ donc P_1 est irréductible dans $\mathbb{R}[x]$

$\Delta_{P_2} = -2 < 0$ donc P_2 / / /

Par suite (*) est la factorisation en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$

Dans $\mathbb{C}$: les racines de P_1 sont $z_1 = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$ et $\bar{z}_1$

Dans $\mathbb{C}$ les racines de P_2 sont $z_2 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$ et $\bar{z}_2$

Donc la décomposition de P dans $\mathbb{C}[x]$ est:

$$P = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)(x - z_2)(x - \bar{z}_2)$$

2. Pour $Q(x)$, on peut écrire $Q = (x-1)(x^2 + x + 1)$

est la factorisation dans $\mathbb{R}[x]$ et

$Q = (x-1)(x-1)(x-\bar{1})$ est la factorisation dans $\mathbb{C}[x]$.

Puisque il n'y pas de facteurs communs

dans les 2 factorisations, on déduit que $P \wedge Q = 1$

2/ Comme $P \wedge Q = 1$, donc $\exists (U, V)$ un couple unique de $\mathbb{R}[x]$ tel que $PU + QV = 1$ (ours)

8/1

3/ On a $F = \frac{P}{Q}$
 Comme $\deg P \geq \deg Q$, on doit calculer la
 partie entière
 On effectue la division euclidienne de P par Q

$$P = Q \cdot X + (X+1)$$

$$\text{donc } F = X + \frac{X+1}{(X-1)(X^2+X+1)}$$

Pour décomposer F ds $\mathbb{R}(X)$, il suffit de
 de décomposer F_1 .

La décomposition de F_1 dans $\mathbb{R}(X)$ est :

$$F_1 = \frac{a}{(X-1)} + \frac{AX+B}{(X^2+X+1)}$$

Calcul de a : On pose $H(X) = (X-1)F_1(X)$

$$\text{on a : } H(1) = a = \frac{1+1}{1^2+1+1} = \frac{2}{3}$$

Calcul de A et B

On utilise une valeur remarquable et l'infini

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x F_1(x) = a + A = 0 \Rightarrow A = -a = -\frac{2}{3}$$

$$F_1(0) = -a + B = -1 \Rightarrow B = -1 + a = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

9/ Donc la décomposition de F est :

$$F(X) = X + \frac{2/3}{X-1} + \frac{-2/3 X - 1/3}{X^2+X+1}$$

Ex): $F = \frac{X^4 + X + 1}{X(X^2 + 1)^3} = \frac{P}{Q}$

1°/

• $d^0 P < d^0 Q \Rightarrow E = 0$ (partie entière)

• $Q = X(X^2 + 1)^3$ est la factorisation en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Donc la décomposition en polynômes irréductibles

est: $F(X) = \frac{a}{X} + \frac{a_1 X + b_1}{(X^2 + 1)^1} + \frac{a_2 X + b_2}{(X^2 + 1)^2} + \frac{a_3 X + b_3}{(X^2 + 1)^3}$

2°/ Calcul de a , on pose $H(X) = XF(X)$

$$H(0) = a = 1$$

On pose $G(X) = F(X) - \frac{1}{X} = \frac{-X^5 + X^3 - 3X - 2}{(X^2 + 1)^3}$

G est de type $\frac{P_1}{Q_1^n}$ avec Q_1 est un poly. irr. $d=2$

donc on fait appel à la division euclidienne.

$-X^5 + X^3 - 3X - 2$ par $X^2 + 1$

On trouve $G(X) = \frac{-2X + 1}{(X^2 + 1)^3} + \frac{-X}{X^2 + 1}$

donc $F(X) = \frac{1}{X} + \frac{-2X + 1}{(X^2 + 1)^3} + \frac{-X}{X^2 + 1}$

10/

Examen D'Algèbre

Exercice 1 : (4,5)

Soient $u_1 = (1, -1, 2)$, $u_2 = (1, 1, -1)$ et $u_3 = (-1, -5, 7)$

Soit $E = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$

- 1- Donner une base de E. 1
- 2- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. 0,5
- 3- Donner une base de F. 0,5
- 4- Donner une base de $E \cap F$. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$? 1,5
- 5- Donner un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$. 1

Exercice 2 : (4,5)

Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$f(x) = (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4)$$

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

- 1- Donner une base de $\ker(f)$ et sa dimension. 0,5
- 2 - Donner une base (la plus simple possible) de $\text{Im}(f)$ et sa dimension. 1
- 3- A-t-on $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^4$? 1
- 4- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner une base et sa dimension. 1
- 5 - A-t-on $\ker(f) \oplus E = \mathbb{R}^4$? 1

Exercice 3 : (4)

Soit $P(x) = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$

1- Montrer que $j = e^{-2\pi i}$ est une racine du polynôme $X^2 + X + 1$.

Vérifier que $j^3 = 1$.

0,5

2- Montrer que j est une racine du polynôme P . Quel est son ordre ?

0,5

3- En remarquant que P est un polynôme pair, donner toutes les racines de P , ainsi que l'ordre de multiplicité de chaque racine.

1,5

4- Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

1,5

Exercice 4 : (4)

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions suivantes :

(a-2pts + b - 2 pts)

$$a / F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{X^4 - 1}$$

$$b / G(X) = \frac{X^2}{(X^2 + 2X + 2)^5}$$

Exercice 5 : (3)

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et λ un paramètre réel.

a/ Démontrer que la donnée de $f(e_1) = e_1 + e_2$, $f(e_2) = e_1 - e_2$ et $f(e_3) = e_1 + \lambda e_3$ définit une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. (Question de cours)

1

b/ Déterminer $f(x, y, z)$. Comment choisir λ pour que f soit injective ?
Surjective ?

2

①

CORRECTION DE L'EXAMEN D'ALGÈBRE

Exercice 1 :

1°/ Base de E , avec $E = \text{Vect}(\{u_1, u_2, u_3\})$

Regardons si la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

Sont $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda_1(1, -1, 2) + \lambda_2(1, 1, -1) + \lambda_3(4, -5, 7) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ L_2 & -\lambda_1 + \lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \\ L_3 & 2\lambda_1 - \lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ L_2 + L_1 & 2\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \\ L_3 - 2L_1 & -3\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 3\lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 3\lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = 3\lambda_3 \end{cases}$$

Donc la famille n'est pas libre en prenant $\lambda_3 = 1$,

par conséquent on a : $-2u_1 + 3u_2 + u_3 = 0$

Autrement dit $u_3 = 2u_1 - 3u_2$

Donc $E = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\} = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$.

et comme u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc
 $B_E = \{u_1, u_2\}$ est une base de E

20/3/2018 $U = (x, y, 3) \in F$

(2)

donc $U = (x, y, -x-y) = x \underbrace{(1, 0, -1)}_{v_1} + y \underbrace{(0, 1, -1)}_{v_2}$

Et par suite $F = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$, donc F est un
 sev de $\mathbb{R}^3$, et comme v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires,
 donc forment un système libre et par suite
 $\mathcal{B}_F = \{v_1, v_2\}$ est une base de F

4/ Méthode 1.
 Soit $U \in E \cap F \Leftrightarrow$

$$U = \alpha U_1 + \beta U_2 = \gamma v_1 + \delta v_2$$

$$\Leftrightarrow 2(-1, -1, 2) + \beta(1, 1, -1) - \gamma(1, 0, -1) - \delta(0, 1, -1) = 0$$

$$\begin{cases} L_1 & 2 + \beta - \gamma = 0 \\ L_2 & -2 + \beta - \delta = 0 \\ L_3 & 2\alpha - \beta + \gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow U = 2(-U_1 + 2U_2) = \gamma(v_1 + 3v_2)$$

On a : $\underbrace{-U_1 + 2U_2}_{\in E} = \underbrace{v_1 + 3v_2}_{\in F} = \underbrace{(1, 3, -4)}_w$

donc $E \cap F = \text{Vect}\{w\}$. Comme $E \cap F \neq \{0\}$
 donc E et F ne sont pas supplémentaires

Méthode: 2

(3)

Il suffit de déterminer l'équation cartésienne de E . Soit $U = (x, y, z) \in E \Leftrightarrow U = \alpha(1, 1, 2) + \beta(1, 1, -1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta & L_1 \\ y = -\alpha + \beta & L_2 \\ z = 2\alpha - \beta & L_3 \end{cases} \quad L_1 + L_2 \Leftrightarrow 2\beta = x + y$$

$$L_1 \Leftrightarrow x = \alpha + 2\alpha - \beta = 3\alpha - \beta$$

$$L_2 \Leftrightarrow y = -\alpha + 2\alpha - \beta = \alpha - \beta$$

et L_2 : donc $x + z = 3\alpha$ et $y + z = \alpha$.

d'où $\frac{x+z}{3} = \frac{y+z}{1} \Leftrightarrow x - 3y - 2z = 0$

Si $U = (x, y, z) \in E \cap F \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 2z = 0 & L_1 \\ x + y + z = 0 & L_2 \end{cases}$

$$L_1 - L_2 \Leftrightarrow \boxed{-4y = 3z}$$

On reporte dans L_2 , on a: $x + y - \frac{4y}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x - y}{3} = 0$

$$\boxed{3x = y}, \text{ donc } 3z = -4 \times 3x \Rightarrow \boxed{z = -4x}$$

d'où $U = (x, 3x, -4x) = x(1, 3, -4)$

$$E \cap F = \text{Vect} \left\{ \underbrace{(1, 3, -4)}_{\vec{w}} \right\}, \quad w = -4u_1 + 2u_2 = v_1 + 3v_2$$

5/ On a: $E = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$.

(4)

On complète u_1, u_2 , en une base de $\mathbb{R}^3$
 par exemple, on choisit un candidat parmi
 la base canonique. On vérifie facilement que
 $\{u_1, u_2, e_1\}$ est libre, dnc libre maximal car
 $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, dnc c'est une base. Un supp est $G = \text{Vect}\{e_1\}$.

Exercice 2

1/ Soit $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x) = (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4)$
 Soit $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(X) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ (=) \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{matrix}$$

dnc $X = (0, x_2, x_2, 0)$: $x_2 = (0, 1, 1, 0)$

On a: $\text{Ker } f = \text{Vect}\{u_1\}$, u_1 base de $\text{Ker } f$, dnc $\dim \text{Ker } f = 1$

2/ $\text{Im } f = \text{Vect}\{f(1, 0, 0, 0), f(0, 1, 0, 0), f(0, 0, 1, 0), f(0, 0, 0, 1)\}$
 $= \text{Vect}\{(1, 0, 1, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$
 $= \text{Vect}\left\{\underbrace{(1, 0, 1, 0)}_{v_1}, \underbrace{(-1, 0, 1, 0)}_{v_2}, \underbrace{(0, 0, 0, 1)}_{v_3}\right\}$

Comme $\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Ker } f = 3$
 dnc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est un sys. générateur minimal, dnc est
 une base de $\text{Im } f$.

3°/ On a: $\text{Ker } f = \text{Vect}\{u_1\}$ (5)
 $\text{Im } f = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$

On va montrer que $\{u, v_1, v_2, v_3\}$ est une base.

c-à-d libre maximal, et par suite $\mathbb{R}^4 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$

4/ Soit $U = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$

donc $U = (x_2 + x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4)$

$= x_2 \underbrace{(-1, 1, 0, 0)}_{w_1} + x_3 \underbrace{(1, 0, 1, 0)}_{w_2} + x_4 \underbrace{(-1, 0, 0, 1)}_{w_3}$

donc $E = \text{Vect}\{w_1, w_2, w_3\}$ et par suite

E est un sev de $\mathbb{R}^4$. On vérifie que $\{w_1, w_2, w_3\}$ est une base de E , d'où $\dim E = 3$.

5°/ On a: $\text{Ker } f = \text{Vect}\{(0, 1, 1, 0)\}$

Comme $(0, 1, 1, 0)$ vérifie $0 + 1 - 1 + 0 = 0$

donc $\text{Ker } f \subset E$, on n'a pas

$\text{Ker } f \oplus E = \mathbb{R}^4$.

Ex3 : $P(X) = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$ (6)

1/ On a : $X^3 - 1 = (X^2 + X + 1)(X - 1)$

Comme j est une racine de $X^3 - 1$ et $j \neq 1$

donc j est une racine de $X^2 + X + 1$, et $j^3 = 1$

2/ $P(j) = j^8 + 2j^6 + 3j^4 + 2j^2 + 1$
 $= j^2 + 2 + 3j + 2j^2 + 1 = 3(j^2 + j + 1) = 0$

calculons $P'(X) = 8X^7 + 12X^5 + 12X^3 + 4X + 0$

$P'(j) = 8j + 12j^2 + 12 + 4j$
 $= 12(j^2 + j + 1) = 0$

On calcule $P''(X)$, on vérifie que $P''(j) \neq 0$

donc j est une racine de P d'ordre 2

2/ Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, donc $\bar{j}$ est une racine de P d'ordre 2. Comme $P(-X) = P(X)$, donc $-j$ et $-\bar{j}$ sont aussi racine de P d'ordre 2. Par suite $P(X) = (X-j)^2(X-\bar{j})^2(X+j)^2(X+\bar{j})^2$

4/ La Factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est (7)

$$P(X) = (X-i)^2 (X-\bar{i})^2 (X+1)^2 (X+\bar{1})^2$$

La Factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P(X) = (X^2 + X + 1)^2 (X^2 - X + 1)^2$$

Ex 4 a/ $F(X) = \frac{P}{Q}$, $d^0 P < d^0 Q \Rightarrow$ la partie
entière $E = 0$

$Q = X^4 - 1 = (X^2 + 1)(X-1)(X+1)$ et
la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, en polynômes
irréductibles

Par conséquent la décomposition en e/f

simples de $F(X)$ est :

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{AX+B}{X^2+1}$$

calcul de a : $G(X) = (X-1)F(X) \Rightarrow a = G(1) = \frac{4}{2 \times 2} = 1$

calcul de b : $H(X) = (X+1)F(X) \Rightarrow b = H(-1) = \frac{-8}{(-2) \times 2} = 2$

calcul de A, B , $L(X) = (X^2+1)F(X)$

$$L(i) = \frac{6(i)^3 + 3i^2 + 5}{(i^2-1)(i+1)} = Ai + B$$

$$Ai + B = \frac{-6i - 3 - 5}{i^2 - 1} = \frac{-6i - 8}{-2} = 3i + 4 \quad (8)$$

$$A = 3 \text{ et } B = 4$$

Donc F s'écrit : $F(X) = \frac{4}{X-1} + \frac{2}{X+1} + \frac{3X+4}{X^2+1}$

b/ On $X^2 + 2X + 2$ est irréductible d/s $\mathbb{R}[X]$ car son discriminant est négatif

$$\text{On a : } G(X) = \frac{X^2 + 2X + 2 - 2X - 2}{(X^2 + 2X + 2)^5}$$

$$= \frac{1}{(X^2 + 2X + 2)^4} + \frac{-2X - 2}{(X^2 + 2X + 2)^5}$$

est la décomposition de $G(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$

Exercice 5. a/ Puisque $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ est une base

donc la donnée, des images d'une base, définit

une application linéaire unique.

$$b/ f(x, y, z) = x f(1, 0, 0) + y f(0, 1, 0) + z f(0, 0, 1)$$

$$= x(1, 1, 0) + y(1, -1, 0) + 3(1, 0, 0)$$

$$= (x + y + 3, x - y, 0)$$

$$f \text{ est injective} \iff \text{Ker } f = \{(0, 0, 0)\}$$

Calculons $\text{Ker } f =$

$$(x, y, z) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \\ \lambda z = 0 \end{cases}$$

3: si $\lambda \neq 0 \Rightarrow z = 0$ et par suite

$$x = y = 0$$

si $\lambda = 0$, z peut être arbitraire

donc f est injective $\Leftrightarrow \lambda \neq 0$

Comme $\dim E = \dim F = 3$

f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow \lambda \neq 0$

(9)

(2)

$$x + y + z = 0$$

$$x - y = 0$$

$$y - z = 0$$

das sind 3 Gleichungen

Calculus: $\nabla f = 0$
 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$x = y = z = 0$$

ist das eine Lösung?

class of ∇f (inflection) $\Rightarrow x \neq 0$

Comme das ist für $F = 3$

of inflection $\Rightarrow$ inflection $\Rightarrow$ inflection

$$A(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+x+2} = \frac{1/8}{(x+2)} + \frac{1/4}{(x+2)^2} - \frac{1/8x}{x^2+x+2}$$

Examen D'Algèbre

Exercice 1 : (4 pts)

(4,5)

Soit le polynôme $P = X^4 + 5X^3 + 10X^2 + 12X + 8 = (X+2)^2 (X^2 + X + 2)$

① 1) Démontrer que -2 est racine double du polynôme P .

① 2) Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

① 3) Déduire les racines de P dans $\mathbb{C}[X]$.

② 4) Donner la forme de la décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{P}$ dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$.

: (0,25) x 4 : chaque coefficient

(On ne demande pas de calculer les coefficients de la décomposition)

Exercice 2 : (4 pts)

On considère les polynômes suivants :

$$A = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 + 1)$$

$$B = X^3 - 2X^2 - 2X - 3 = (X^2 + X + 1)(X - 3)$$

① 1/ Calculer le P.G.C.D de A et B .

$$A \wedge B = X^2 + X + 1$$

① 2/ Factoriser A et B en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

$$D = X^2 + X + 1$$

② 3/ Trouver deux polynômes U et V tels que $AU + BV = D$.

Exercice 3 : (6.5 pts)

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + z = 0 \text{ et } y + t = 0\}$.

Soient $U_1 = (1, 1, 1, 1)$, $U_2 = (1, -1, 1, -1)$, $U_3 = (1, 0, 1, 0)$.

Soit $F = \text{Vect}(\{U_1, U_2, U_3\})$.

$$D = 10X^2 + X + 1 \quad \begin{cases} u = 1 \\ v = -(x+3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{10} \\ v = -\frac{1}{10}(x+3) \end{cases}$$

* * * * * $E = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

- 0.1) 1/ Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
- 1) 2/ Donner une base de E et en déduire sa dimension.
- 1) 3/ Déterminer une base de F.
- 1) 4/ Donner une (ou plusieurs) équation(s) qui caractérise(nt) F. $x=3$ et $y \in \mathbb{R}$
- 0.1) 5/ Donner une famille génératrice de E + F. $E + F = \text{Vect} \{u_1, u_2, u_4, u_5\}$
- 1) 6/ A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?
- 1.1) 7/ Donner deux supplémentaires de F dans $\mathbb{R}^4$.

$F = \text{Vect} \{u_1, u_2\}$: $2u_3 = u_1 + u_2$

Exercice 4 : (5 pts)

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

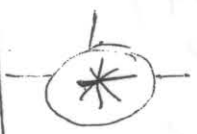
$f(x, y, z) = (x, -3y + 4z, -2y + 3z)$.

- 0.1) 1/ Montrer que f est linéaire.
- 0.1) 2/ Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- 1) 3/ En déduire que l'application f est bijective.

1.1) 3/ Calculer $f \circ f(x, y, z)$. En déduire l'expression de f^{-1} . $P_f f = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$
 $f^{-1} = f$

- 1.1) 4/ Soit g l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :
 $g(1, 1, 1) = (1, 1, 1), g(1, 1, 0) = (1, -3, -2)$ et $g(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

Déterminer $g(x, y, z) = f(x, y, z)$



①.

2

Corrigé de l'Examen M123

Année 2016/2017

Exercice 1:

1/ Montrons que -2 est une racine de P , calculons

$$P(-2) = (-2)^4 + 5(-2)^3 + 10(-2)^2 + 12(-2) + 8.$$

$$= 16 - 40 + 40 - 24 + 8 = 0$$

L'ordre -2 : $P'(x) = 4x^3 + 15x^2 + 20x + 12$

On a: $P'(-2) = 4(-2)^3 + 15(-2)^2 + 20(-2) + 12$
 $= -32 + 60 - 40 + 12 = -72 + 72 = 0$

$$P''(x) = 12x^2 + 30x + 20$$

On a: $P''(-2) = 48 + 30, P''(2) \neq 0$

Donc -2 est une racine double.

2/ Comme -2 est une racine double, on écrit

que $P(x) = (x+2)^2 Q(x)$, avec $d^0 Q = 2$

$$\Rightarrow P(x) = (x+2)^2 (ax^2 + bx + c)$$

Par identification, on a: $P(x) = (x+2)^2 (x^2 + bx + 2)$
 (directe). Sinon on utilise la division euclidienne.

$$P(x) = (x^2 + 4x + 4)(x^2 + bx + 2) \Rightarrow 8 + 4b = 12$$

$$\Rightarrow b = 1. \text{ Donc la factorisation de } P \text{ ds}$$

$$\mathbb{R}[x] \text{ est } P = (x+2)^2 \underbrace{(x^2 + x + 2)}_{\Delta < 0}$$

2) 3°/ La forme de la décomposition ds $\mathbb{R}(x)$

$$\text{et } \frac{1}{P(x)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{Ax+B}{x^2+x+2}$$

Exercice 2 :

$$A = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$$
$$B = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$$

1°/ On a : $A \wedge B = x^2 + x + 1$

2°/ $A = \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\Delta \neq 0} \underbrace{(x^2 + 1)}_{\Delta < 0}$: Factorisation dans $\mathbb{R}[x]$

$$B = (x^2 + x + 1)(x - 3)$$

3°/ $A - (x+3)B = 10x^2 + 10x + 10$

Si On prend $D = x^2 + x + 1$, on a :

$$U = \frac{1}{10} \text{ et } V = -\frac{1}{10}(x+3)$$

Si On prend $D = 10x^2 + x + 1$, on a :

$$U = 1 \text{ et } V = -(x+3)$$

Ex 3:

(3)

1°/ Soit $U = (x, y, z, t) \in E$, on déduit que
 $x = -z$ et $t = -y$

dnc $U = (-z, -y, z, y) = z(-1, 0, 1, 0) + y(0, -1, 0, 1)$

Par suite $E = \text{Vect} \left\{ \underbrace{(-1, 0, 1, 0)}_{u_4}, \underbrace{(0, -1, 0, 1)}_{u_5} \right\}$

dnc E est un sev de $\mathbb{R}^4$.

2°/ Comme u_4 et u_5 ne sont pas colinéaires, ils forment un système libre.

dnc $\{u_4, u_5\}$ est une base de E , et dnc $\dim E = 2$

3°/ Il est clair que $u_1 + u_2 = 2u_3$,

dnc $F = \text{Vect}(\{u_1, u_2, u_3\}) = \text{Vect}(\{u_1, u_2\})$

et par suite $\{u_1, u_2\}$ est une base de F car u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, dnc forment un système libre.

4°/ Soit $U = (x, y, z, t) \in F$, $\exists \alpha, \beta$ tels que

$$U = \alpha u_1 + \beta u_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = \alpha + \beta \\ t = \alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases}$$

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \mid x - z = 0 \text{ et } y - t = 0 \right\}$$

$$50/ E + F = \text{Vect}\{u_1, u_2\} + \text{Vect}\{u_4, u_5\} \\ = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_4, u_5\}$$

④

On déduit que la famille $\{u_1, u_2, u_4, u_5\}$ est génératrice.

6/ Montrons que $E \oplus F = \mathbb{R}^4$
il suffit de montrer que la famille $\{u_1, u_2, u_4, u_5\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, c-à-d un système libre maximal car $\dim \mathbb{R}^4 = 4$.

En effet soit $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ tel que
 $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_4 + \theta u_5 = 0$

$$\alpha (1, 1, 1, 1) + \beta (1, -1, 1, -1) + \gamma (1, 0, 1, 0) + \theta (0, 1, 1, 0) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 & L_1 \\ \alpha - \beta - \theta = 0 & L_2 \\ \alpha + \beta + \gamma + \theta = 0 & L_3 \\ \alpha - \beta = 0 & L_4 \end{cases} \Rightarrow \theta = 0 \text{ (d'après } L_2)$$

$$L_3 - L_1 \Leftrightarrow 2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 & L_1 \\ \alpha - \beta = 0 & L_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

donc $\{u_1, u_2, u_4, u_5\}$ est un système libre maximal, donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

7/ On complète $\{u_1, u_2\}$ en une base de $\mathbb{R}^4$,

On choisit les candidats parmi la base.

canonique. Vérifions si $\{u_1, u_2, e_1, e_4\}$

est libre. En effet Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma e_1 + \delta e_4 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & \Rightarrow \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta + 0 = 0 & \Rightarrow 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Un autre supplémentaire de F ds $\mathbb{R}^4$ et $G = \text{Vect}\{e_1, e_4\}$

Exercice 4 $f: (x, y, z) \mapsto (x, -3y + 4z, -2y + 3z)$

1°/ f Linéaire facile:

2°/ On a: $f(e_1) = (1, 0, 0)$, $f(e_2) = (0, -3, -2)$
 $f(e_3) = (0, 4, 3)$

Montrons que $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$,

c-à-d un système libre maximal de $\mathbb{R}^3$ (car $\dim \mathbb{R}^3 = 3$)
 Soient α, β, γ tels que $\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, -3, -2) + \gamma(0, 4, 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ -3\beta + 4\gamma = 0 \\ -2\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = \gamma = 0 \Rightarrow \{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3$$

Comme $\text{Im } f = \frac{1}{2}e + \{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ 6/

$\Rightarrow$ $\dim \text{Im } f = 3$ et d'après

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$

$\Rightarrow \text{Ker } f = \{0\}$, donc f est injective

3°/ $f \circ f(x, y, z) = f(f(x, y, z))$

$$= f\left(\underbrace{x}, \underbrace{-3y+4z}, \underbrace{-2y+3z}\right)$$

$$= f(x, -3y+4z, -2y+3z)$$

$$= f(x, -3(-3y+4z) + (-2y+3z), -2(-3y+4z) + 3(-2y+3z))$$

$$= f(x, 9y-12z-2y+3z, 6y-8z-6y+9z)$$

$$= f(x, y, z)$$

$$\text{donc } f \circ f(x, y, z) = (x, y, z)$$

$$\text{C-à-d } f \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \bar{f}^{-1} = f$$

4/

Méthode 1

On remarque $\beta' = (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

sachant qu'une application linéaire est bien déterminée, si on connaît les images d'une base ("cours").

On remarque

$$f(1, 1, 1) = g(1, 1, 1) = ($$

$$f(1, 1, 0) = g(1, 1, 0)$$

$$f(1, 0, 0) = g(1, 0, 0)$$

par suite $f = g$, c-a-d

$$g(x, y, z) = (x, -3y + 4z, -2y + 3z)$$

Examen D'Algèbre

Exercice 1 : (5.5 pts)

a) Effectuer les divisions euclidiennes des polynômes suivants :

i) $X^5 + 1$ par $X^2 - X + 1$
 ii) $X^3 + X^2 - 1$ par $X^2 - X + 1$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$ l'équation : $x^2 - x + 1 = 0$.

c) On considère la fraction rationnelle $A(X) = \frac{X^5 + 1}{(X^2 - X + 1)^3}$

i) Donner la forme de la décomposition de $A(X)$ en éléments simples de $\mathbb{R}(X)$.

ii) Calculer la décomposition de $A(X)$ en éléments simples de $\mathbb{R}(X)$.

(On pourra utiliser la question a))

d) En utilisant la question c), décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $B(X) = \frac{X^5 - 1}{(X^2 + X + 1)^3}$

Exercice 2 : (6 pts)

Soient les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u = (-1, 0, 3, -9) \quad v = (3, -4, 3, 7) \quad w = (7, -12, 15, 3)$$

$$a = (1, -1, 0, 4) \quad b = (1, 0, 3, -1).$$

a) Montrer que v appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par a et u .

b) Montrer que w appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u et v .

c) Notons $F = \text{Vect}(\{u, v, w\})$ et $G = \text{Vect}(\{a, b\})$

Déterminer la dimension et une base des sous-espaces suivants :

i) F et G .

ii) $F \cap G$ et $F + G$.

d) Montrer que la droite H et $\mathbb{R}^4$ engendré par le vecteur $t = (1, -1, 1, 1)$ est un supplémentaire de $F + G$.

e) En déduire un supplémentaire de chacun des sous-espaces $F \cap G$, F et G .

f) Donner une interprétation géométrique des résultats trouvés.

Exercice 3 : (5 pts)

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par les deux relations :

$$f(1,1) = (4, 2, 0) \text{ et } f(1, -1) = (2, 0, 6).$$

- 1) **Question du cours :** Justifier que f ne peut pas être surjective.
(Cette question ne nécessite pas de calculs, si on utilise des arguments de dimension).
- 2) Vérifier que les vecteurs $u = (1, 1)$ et $v = (1, -1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
- 3) Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
- 4) Déterminer l'image par f d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$: calculer $f(x, y)$.
- 5) Déterminer le noyau, l'image et le rang de f .
- 6) Quelle est l'image par f de la droite D d'équation $x + y = 0$? Est-ce $f(D)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4 : (3,5 pts)

a) Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $X^2 - 1$ divise $1 + 5X^2 + X^4 - (n-1)X^{n-1} + (n-8)X^n$.

b) Soit n un entier, $n \geq 3$. Montrer que le polynôme

$$P = (1+X)(1-X^n) - 2nX^n(1-X) - n^2X^{n-1}(1-X)^2 \text{ est divisible par } (1-X)^3.$$

$$\begin{array}{r} X^5 + 1 \\ X^5 - X^4 + X^3 \\ \hline X^4 - X^3 + 1 \\ X^4 - X^3 + X^2 \\ \hline -X^2 + 1 \\ -X^2 + X - 1 \\ \hline -X + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} X^2 - X + 1 \\ \hline X^3 + X^2 - 1 \end{array}$$

CORRIGÉ DE ~~(7)~~
L'EXAMEN D'ALGÈBRE
2015/2016

On a:

$$X^5 + 1 = (X^2 - X + 1)(X^3 + X^2 - 1) + (-X + 2)$$

$$\begin{array}{r} X^3 + X^2 - 1 \\ X^3 - X^2 + X \\ \hline 2X^2 - X - 1 \\ 2X^2 - 2X + 2 \\ \hline +X - 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} X^2 - X + 1 \\ \hline X + 2 \end{array}$$

$$X^3 + X^2 - 1 = (X^2 - X + 1)(X + 2) + (X - 3)$$

b) $X^2 - X + 1$ ~~est~~ irréduct. ds $\mathbb{R}[X]$, pas de racine
 $X^2 - X + 1$ ds $\mathbb{C}[X]$, il y a $-j$ et j

c) La forme de la décomp. est:

$$f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+x+1)^1} + \frac{cx+d}{(x^2+x+1)^2} + \frac{ex+f}{(x^2+x+1)^3}$$

①

$$\begin{aligned}
 \text{iii) } A(x) \cdot \frac{x^5 - 1}{(x^2 - x + 1)^3} &= \frac{(x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1) + (-x + 2)}{(x^2 - x + 1)^3} \\
 &= \frac{-x + 2}{(x^2 - x + 1)^3} + \frac{x^3 + x^2 - 1}{(x^2 - x + 1)^2} \\
 &= \frac{-x + 2}{(x^2 - x + 1)^3} + \frac{(x^2 - x + 1)(x + 2) + (x - 3)}{(x^2 - x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

$$A(x) = \frac{-x + 2}{(x^2 - x + 1)^3} + \frac{x - 3}{(x^2 - x + 1)^2} + \frac{x + 2}{(x^2 - x + 1)}$$

On remarque que

$$B(x) = -A(-x)$$

$$\text{donc } B(x) = \frac{-x - 2}{(x^2 + x + 1)^3} + \frac{x + 3}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{x - 2}{(x^2 + x + 1)}$$

Car il y a unicité de la
decomposition en éléments simples

(2)

Exercice :

(3)

a) On pose $v = \alpha a + \beta u$.

$$(+3, -4, 3, +7) = \alpha (-1, -1, 0, 4) + \beta (-1, 0, 3, -9)$$

$$\begin{cases} +3 = \alpha - \beta \\ -4 = -\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 4$$

$$3 = 3\beta \Leftrightarrow \beta = 1$$

$$+7 = 4\alpha - 9\beta \Leftrightarrow 4 \times 4 - 9 = 7 \text{ vérifié}$$

$$\text{donc } \boxed{v = 4a + u}$$

b) On pose $w = \alpha u + \beta v$

$$(7, -12, 15, 3) = \alpha (-1, 0, 3, -9) + \beta (3, -4, 3, 7)$$

$$\begin{cases} 7 = -\alpha + 3\beta \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2} \\ -12 = -4\beta \Leftrightarrow \boxed{\beta = 3} \\ 15 = 3\alpha + 3\beta \\ 3 = -9\alpha + 7\beta = -18 + 21 = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{w = 2u + 3v}$$

$$c) F = \text{Vect}\{u, v, w\} = \text{Vect}\{u, v\}$$

Comme u et v forment un système libre (non colinéaire)
 $\Rightarrow$ base $\Rightarrow \dim F = 2$

De même du $G = 2$ Car $\{a, b\}$ forment une base de G

$$F + G = \text{Vect}\{u, v\} + \text{Vect}\{a, b\} = \text{Vect}\{u, v, a, b\} \\ = \text{Vect}\{u, v, b\}$$

de même $a \in F \cap G$.

(3)

$$a \in F \cap G \Rightarrow \dim F \cap G \geq 1$$

$$\text{et mg: } \dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

$$= 2 + 2 - \dim(F \cap G)$$

$$= 4 - \dim(F \cap G)$$

On a $b \notin \text{Vect}\{u, v\}$. si $b \in \text{Vect}\{u, v\}$

$$b = \alpha u + \beta v \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2 + 3\beta \\ 0 = -4\alpha \\ 3 = 3\alpha + 3\beta \\ -1 = -9\alpha + 7\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \beta = 1/3 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 3 \\ \beta = 3 \end{matrix} \text{ absurde.}$$

donc $\dim F+G = 3$ et $\dim F \cap G = 1$

Comme $a \in F \cap G \Rightarrow \boxed{F \cap G: \text{Vect}\{a\}}$

et soit $H: \text{Vect}\{c\}$. ? $(F+G) \oplus H = \mathbb{R}^4$

il suffit de montrer que:

$\{u, v, b, c\}$ est un système libre maximal de $\mathbb{R}^4$

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ tel que

$$\alpha u + \beta v + \gamma b + \theta c = 0$$

$$\alpha(-1, 0, 3, -9) + \beta(3, -4, 3, 7) + \gamma(1, 2, 3, 1) + \theta(1, -1, 1, 1) = 0$$

$$\begin{cases} -\alpha - 2\beta + 3\gamma + \theta = 0 & (1) \\ -4\beta - \theta = 0 & (2) \\ 3\alpha + 3\beta + 3\gamma + \theta = 0 & (3) \\ -9\alpha + 7\beta + \gamma + \theta = 0 & (4) \end{cases}$$

(4)

$$(2) \quad \boxed{\alpha = -4\beta}$$

(5) ~~5~~

$$(1) \quad -\alpha - \beta + \gamma = 0$$

$$(2) \quad \cancel{+\alpha + \beta + \gamma = \alpha}$$

$$(3) \quad 3\alpha - \beta + 3\gamma = 0$$

$$(4) \quad -9\alpha + 3\beta - \gamma = 0$$

$$3(1) + (3) \Leftrightarrow -4\beta + 6\gamma = 0 \Leftrightarrow \boxed{\gamma = \frac{2}{3}\beta}$$

$$(2) - (1) \quad \cancel{4\alpha} + 2\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}\gamma = \boxed{-\frac{1}{3}\beta}$$

$$(4) \Rightarrow -9\left(-\frac{1}{3}\right)\beta + 7\beta - \frac{2}{3}\beta - 4\beta = 0$$

$$\beta \left[+3 + 7 - \frac{2}{3} - 4 \right] = 0$$

$$\beta \left[10 - \frac{14}{3} \right] = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

On déduit que $(F+G) \oplus H = \mathbb{R}^4 (*)$

On a. $F+G = \text{Vect}\{u, v, b\} = \underbrace{\text{Vect}\{u, v\}}_F \oplus \text{Vect}\{b\}$

On remplace ds (*) $F \oplus \text{Vect}\{b\} \oplus H = \mathbb{R}^4$

$$F \oplus \underbrace{\text{Vect}\{b, c\}}_{F'} = \mathbb{R}^4$$

F' est un supplémentaire de F ds $\mathbb{R}^4$

(5)

$\vec{p}_H = (1, -1, 1, 1)$, désigne le vecteur qui engendre H

De même $F + G = \text{Vect}\{u, v\} + \text{Vect}\{a, b\}$
 $= \text{Vect}\{\cancel{u}, \cancel{v}, a, b\} = \text{Vect}\{u, v, a, b\}$
 $= \text{Vect}\{u, a, b\}$

Car $\mathcal{W} = 4a + u$. base de $F+G$ car de $F+G \sim 3$

donc $F + G = \text{Vect}\{u\} \oplus \text{Vect}\{a, b\}$
 $= \text{Vect}\{u\} \oplus G = G + \text{Vect}\{u\}$

$(F + G) \oplus H = (G \oplus \text{Vect}\{u\}) \oplus H = \mathbb{R}^4$
 $= G \oplus \underbrace{(\text{Vect}\{u, c\})}_{G'}$

G' est un supp de G ds $\mathbb{R}^4$.

On a $(F \oplus G) \oplus H = \mathbb{R}^4$

$= \text{Vect}\{u, a, b\} \oplus H = \mathbb{R}^4$

$= \text{Vect}\{a\} + \text{Vect}\{u, b\} \oplus H = \mathbb{R}^4$

$= \text{Vect}\{a\} \oplus \underbrace{\text{Vect}\{u, b, c\}}_G$

$\downarrow$
 un supp de $F+G$ ds $\mathbb{R}^4$.

(6)

1°/ Question de cours. Expliquez pourquoi

(7)

f ne peut être surjective.

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f$$

$$\Rightarrow \dim \text{Im} f \leq 2 \text{ et } \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

$$\Rightarrow \text{Im} f \neq \mathbb{R}^3 \text{ donc } f \text{ n'est pas surjective}$$

$$2^\circ/ f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\text{avec } f(1,1) = (4,2,0) \text{ et } f(1,-1) = (2,0,6)$$

$$\text{On pose } e_1 = (1,0) \text{ et } e_2 = (0,1)$$

pour trouver $f(e_1)$ et $f(e_2)$ il suffit d'exprimer

e_1 et e_2 en fonction des vecteurs $(1,1)$ et $(1,-1)$.

$$\text{On a: } e_1 = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1)$$

$$\text{donc } f(e_1) = \frac{1}{2} f(1,1) + \frac{1}{2} f(1,-1)$$

$$= \frac{1}{2}(4,2,0) + \frac{1}{2}(2,0,6) = (3,1,3)$$

$$\text{De même } e_2 = (0,1) = \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1)$$

$$f(e_2) = \frac{1}{2} f(1,1) - \frac{1}{2} f(1,-1) = (1,1,-3)$$

$$3^\circ/ f(x,y) = f(xe_1 + ye_2) = xf(e_1) + yf(e_2)$$

$$= (3x+y, x+y, 3x-3y)$$

(7)

$$4/ \text{ soit } (x, y) \in \text{Ker } f$$

$$(x, y) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(x, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow x = y = 0$$

$$\text{Ker } f = \{(0, 0)\}$$

• Comme $\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \text{Ker } f = 2 - 0 = 2$

$$\text{donc } \text{rg}(f) = 2$$

$$\text{et } \text{Im } f = \text{Vect}\{f(e_1), f(e_2)\} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$$

Comme $\{w_1, w_2\}$ forment un système libre
 $\Rightarrow \{w_1, w_2\}$ est une base de $\text{Im } f$

$$\text{soit } (x, y) \in D \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow (x, y) = (x, -x)$$

$$\begin{aligned} f(D) &= \left\{ f(x, y) : (x, y) \in D \right\} \\ &= \left\{ f(x, -x) \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (2x, 0, 6x) \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x(2, 0, 6) \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\{(2, 0, 6)\} \\ &= \text{Vect}\{(1, 0, 3)\} \end{aligned}$$

$f(D)$ est un sev de $\mathbb{R}^3$, de dimension 1

⑧

19

Corrige de l'examen d'Algebre

2015 / 2016

Ex4

On pose $P(x) = (1+x)(1-x^n) - 2nx^n(1-x) - n^2 x^{n-1} (1-x)^2$

Calculons $P(1) = (1+1)(1-1) - 2n(1-1) - n^2(1-1)$
 $= 0$

Calculons $P'(x)$

$$P'(x) = (1-x^n) + (1+x)(-nx^{n-1}) - 2n^2 x^{n-1} (1-x) + 2nx^n - n^2(n-1)x^{n-2}(1-x)^2 + 2n^2 x^{n-1} (1-x)$$

mg: $P'(1) = (1-1) + (1+1)(-n) - 2n^2(1-1) + 2n - n^2(n-1)(1-1)^2 + 2n^2(1-1)$

$$= -2n + 2n = 0$$

Calculons $P''(x) = -nX^{n-1} + (1+x)(-n(n-1)X^{n-2}) + (-nX^{n-1}) - n^2(n-1)X^{n-2}(1-x)^2 + 2n^2X^{n-1} - n^2(n-1)(n-2)X^{n-3}(1-x)^2 + 2n^2(n-1)X^{n-2}(1-x) + 2n^2X^{n-2}(1-x) - 2n^2X^{n-1}$

$P''(1) = -n + 2[-n(n-1)] - n + 2n^2 + 2n^2 - 2n - n + 2n + 2n^2 - 2n^2$

9

10

$$\begin{aligned}
 & - nX^{n-1} + (1+X)[-n(n-1)X^{n-2}] - nX^{n-1} - 2n^2(n-1)X^{n-2}(1-X) \\
 & + 2n^2X^{n-1} + 2n^2X^{n-1} - n^2(n-1)X^{n-2}(1-X)^2 + 2n^2(n-1)X^{n-2}(1-X) \\
 & + 2n^2(n-1)X^{n-2}(1-X) \quad 2n^2X^{n-1}
 \end{aligned}$$

$$P'(1) = -n + 2(-n(n-1)) - n + 2n^2 + 2n^2 - 2n^2$$

10

$$\begin{aligned}
 & = -n - 2n^2 + 2n - n + 2n^2 + 2n^2 - 2n^2 = 0 \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

donc 1 et au moins une racine c'est 3

Exercice.

(11) ~~12~~

Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$P_n(x) = 1 + 5x^2 + x^4 - (n-1)x^{n-1} + (n-8)x^n$$

On a: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

Si $x^2 - 1$ divise $P_n(x)$, alors 1 et -1 sont racines de $P_n(x)$

On a: $P_n(1) = 1 + 5 + 1 - (n-1) + n-8$
 $= 8 - 8 + n - n = 0$

Vérifions donc pour -1, ce qui amène à faire une disjonction de cas selon la parité de n
cas si n est pair,

$$P_n(-1) = 1 + 5 + 1 - (n-1)(-1)^{n-1} + (n-8)(-1)^n$$
$$= 7 - n + n - 1 + n - 8 = 2n - 2$$

On a: $P_n(-1) = 0 \Leftrightarrow 2n - 2 = 0 \Leftrightarrow n = 1$ absurde, n est pair.

cas si n est impair:

$$P_n(-1) = 1 + 5 + 1 - (n-1)(-1)^{n-1} + (n-8)(-1)^n$$
$$= 1 + 5 + 1 - n + 1 - n + 8 = -2n + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$n = 8$ absurde. Donc il n'y a pas de solutions

(11)

