Suite de fonction

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction et f une fonction tel que

$f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$

- **Convergence simple : (CS)**

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f \text{ sur } I \iff (\forall x\in I)\ \underset{(\text{fixe})}{} \ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \text{ sur } I$$

- **Convergence uniforme : (CU)**

$$\boxed{f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f \text{ sur } I}$$

suite Numérique

$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[\text{dans } I]{n\to+\infty} 0$

$(\forall (x_n)\in I)$
$f_n(x_n) - f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Théorème de Cauchy : lorsque on <u>ne connait pas f</u> (la limite de f_n)

$(\forall x\in I)\ \exists a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ tq
$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$

⚠ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs qui <u>ne dépend pas de x</u>

- $\left(f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f \text{ sur } I\right) \Longrightarrow \left(f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f \text{ sur } I\right)$

- $$\boxed{f_n \xrightarrow[\cancel{n\to+\infty}]{\cancel{CU}} f \text{ sur } I}$$

$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[\cancel{n\to+\infty}]{} 0$

$(\exists (x_n)\in I)$ tel que
$f_n(x_n) - f(x_n) \xrightarrow[\cancel{n\to+\infty}]{} 0$

suit numérique

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx \neq \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$$

f_n continue sur I
et
f **dis**continue sur I

• CU et continuité :

$$\begin{cases} f_n \text{ continue sur } I \\ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f \end{cases} \Longrightarrow f \text{ est continue sur } I$$

⚠ CU une condition suffisante et non nécessaire

• Théorème de double limite

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f \\ \lim\limits_{x\to a} f_n(x) \text{ existe } (\forall n\in\mathbb{N}) \\ (a\in I) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x) \\ = \\ \lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \end{cases}$$

• CU et dérivation

- $(\forall n\in\mathbb{N})$ f_n est de C^1 sur I
- $f'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} g$ sur I suite numérique
- $(\exists a\in I)$ tq $(f_n(a))$ converge

condition suffisante

$\Downarrow$

$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ sur I avec f est de C^1 sur I et $f' = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)' = g$ → dérivabilité

En générale : $(K \geq 1)$ avec $(K\in\mathbb{N}^*)$

- f_n de C^K sur I $(\forall n\in\mathbb{N})$
- $\left(f_n^{(K)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} g$ sur I
- $(\exists a\in I)$ tq $\forall m\in[0, K-1]$ on a $\left(f_n^{(m)}(a)\right)$ converge $(m\in\mathbb{N})$

suite numérique

$\Downarrow$

$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ sur I, avec f est de C^K sur I et $f^{(K)} = g$

• CU et intégrale de Riemann

- $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (définie sur $[a,b]$)
- f_n continue sur $[a,b]$
- $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ sur $[a,b]$

$\Downarrow$

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow[\text{sur } [a,b]]{CV} \int_a^b f(x)\,dx$$

suite numérique

et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \int_a^b f(x)\,dx$$

⚠ il est nécessaire que l'intervalle $[a,b]$ soit fermé

Remarque ⚠

$$\cancel{\begin{cases} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f \\ f_n \text{ dérivable} \end{cases} \Longrightarrow f'_n \text{ converge}}$$

$$\cancel{\begin{cases} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f \\ f_n \text{ dérivable} \end{cases} \Longrightarrow f \text{ est dérivable}}$$

Exercice 1:

Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur l'intervalle I dans les cas suivants :

a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $\quad I = \mathbb{R}$

b) $f_n(x) = \left(x + \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^2$, $\quad I = \mathbb{R}_+$

X c) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$, $\quad I = \mathbb{R}_+^*$ (autre méthode)

n'est pas fait d) $f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln x & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ $\quad I = [0,1]$

Exercice 2: On considère la suite de fonctions $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, définie par

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction nulle. La convergence est elle uniforme sur cet intervalle?.
2. Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[\alpha,+\infty[$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3: Soit $a \geq 0$. On définit la suite de fonctions : $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$, $x \in [0,1]$, $\quad n > 0$

n'est pas fait

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$.
2. Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n).
3. Pour $a = 0$. Calculer sans intégration $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$

Exercice 4:

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite (f_n) n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
3. Donner une démonstration directe du fait que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 5:

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in [0,\frac{1}{n}]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Etudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$. A-t-on convergence uniforme sur $[0,1]$?
3. Étudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ pour $a \in]0,1]$.

Exercice 6:

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{n\,(x^3+x)\,e^{-x}}{nx+1}$$

converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

2. Montrer que l'on a la convergence uniforme sur tout intervalle $[\alpha, 1]$ avec $\alpha \in]0,1[$. A-t-on la convergence uniforme sur $[0,1]$
3. Montrer que $|f_n(x) - f(x)|$ est bornée sur $[0,1]$.
4. Déduire des questions précédentes la nature de la suite

$$u_n = \int_0^1 \frac{n\,(x^3+x)\,e^{-x}}{nx+1}\,dx.$$

Série 1

Khawla — Analyse 4 (M147) S4 MIP

Exercice 1

a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ $\quad I = \mathbb{R}$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$

* **La convergence simple**

Soit $x \in \mathbb{R}$ (fixé)

- Si $x = 0$ on a $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- Si $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{n^2x^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nx} = 0 \quad \text{car} \lim_{n\to+\infty} nx = +\infty$$

$f_n \xrightarrow{CS} f$

alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} 0$ sur $I = \mathbb{R}$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R})$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$

* **La convergence uniforme**

prenons $x_n = \dfrac{1}{n} \in I$, $(n \in \mathbb{N}^*)$

on a $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\cancel{n} \times \frac{1}{\cancel{n}}}{1+\cancel{n^2}\left(\frac{1}{\cancel{n}}\right)^{\cancel{2}}} = \dfrac{1}{2}$

alors

$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2}$ donc $\exists x_n = \frac{1}{n} \in I$

telque $\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0$

donc f_n ne converge pas uniformement vers 0 sur $\mathbb{R}$

b) $f_n(x) = \left(x + \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^2$ $\quad I = \mathbb{R}_+$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$

* **La convergence simple**

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ (fixé)

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(x + \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^2 = x^2$ car

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{n} = 0$

$f_n \xrightarrow{CS} f$

$f : x \mapsto x^2$

d'où $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} x^2$ sur $I = \mathbb{R}_+$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R}_+)$

* **La convergence uniforme**

On a $|f_n(x) - f(x)| = \left|\left(x + \frac{e^{-x}}{n}\right)^2 - x^2\right|$

$= \left| x^2 + 2x\frac{e^{-x}}{n} + \left(\frac{e^{-x}}{n}\right)^2 - x^2 \right| = \left| \frac{2xe^{-x}}{n} + \frac{e^{-2x}}{n^2} \right|$

$= \frac{2xe^{-x}}{n} + \frac{e^{-2x}}{n^2}$

et on a

$$-2x \leq 0 \Longrightarrow e^{-2x} \leq e^0 = 1$$

donc $\frac{e^{-2x}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ car $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; (n^2 > n)$

on etude $g(x) = x e^{-x}$

on a g est derivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a $g'(x) = e^{-x}(1 - x)$

donc

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^+$ on a $g(x) \leq g(1) = e^{-1}$

donc $\frac{2xe^{-x}}{n} + \frac{e^{-2x}}{n^2} \leq \frac{2e^{-1}}{n} + \frac{1}{n}$

c à d

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2e^{-1}}{n} + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}^+$ on a $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} x^2$ sur $I = \mathbb{R}_+$

c) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$ $\quad I = \mathbb{R}_+^*$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$

* La convergence simple

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ (fixé)

on a $|\sin(nx)| \leq 1 \Longrightarrow |f_n(x)| \leq \frac{1}{n\sqrt{x}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

d'où $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CS} 0$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

* La convergence uniforme

On a $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}\right| = \left|\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}\sqrt{nx}}\right|$

Scanné avec CamScanner

donc $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in]0,+\infty[} \left|\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}\, x}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{x\in\mathbb{R}_+^*} \left|\frac{\sin(nx)}{\sqrt{nx}}\right|$

$= \frac{1}{\sqrt{n}} \|g_n(nx)\|_\infty$ avec $g_n(nx) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{nx}}$

on a g_n converge simplement vers 0 car $|g_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{nx}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

d'où $g_n(x)$ bornée donc $\|g_n(x)\|_\infty$ exist

est par conséquence $\frac{1}{\sqrt{n}} \|g_n(x)\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

d'où $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

d'où $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} 0$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

d) $f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x\in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $I = [0,1]$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

*** La convergence simple**

Soit $x\in[0,1]$ (fixé)

- Si $x = 0$ ou $x = 1$ on a $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- Si $x\in]0,1[$ on a

$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n \ln(x) = \ln(x) \lim_{n\to+\infty} x^n = 0$

car $x\in]0,1[$

d'où $\forall x\in[0,1]$ on a $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} 0$ sur $I = [0,1]$

*** La convergence uniforme**

on a $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| = |x^n \ln(x)| = -x^n \ln(x)$

car $\forall x\in]0,1]$ on a $\ln(x) \leq 0$

donc $\|f_n(x) - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |x^n \ln(x)| = \sup_{x\in]0,1]} |x^n \ln(x)|$

$= \sup_{x\in]0,1[} -x^n \ln(x)$

Prenons $g_n(x) = -x^n \ln(x)$ qui est dérivable sur $]0,1]$

et on a $g_n'(x) = -n x^{n-1} \ln(x) - x^n \frac{1}{x} = -n x^{n-1} \ln(x) - x^{n-1}$

$= -x^{n-1}(n\ln(x) + 1)$

$g_n'(x) = 0 \Longrightarrow n\ln(x) + 1 = 0 \Longrightarrow \ln(x) = -\frac{1}{n} \Rightarrow e^{-\frac{1}{n}} = x$

donc on a

x	0		$e^{-\frac{1}{n}}$		1
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	$g(e^{-\frac{1}{n}})$	$\searrow$	

donc $\|f_n - f\|_\infty = g_n(e^{-\frac{1}{n}}) = -(e^{-\frac{1}{n}})^n \times \ln(e^{-\frac{1}{n}}) = \frac{e^{-1}}{n}$

et on a $\frac{e^{-1}}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'où $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

d'où $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} 0$ sur $I = [0, 1]$

Exercice 2

$f_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tq $(n \in \mathbb{N})$ $\quad I = [0, +\infty[$

$x \longmapsto \frac{2nx}{1 + n^2x^2}$

1) Soit $x \in I$ (fixé)

• Si $(x \in \mathbb{R}_+^*)$ $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2nx}{1 + n^2x^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2nx}{n^2x^2}$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{nx} = 0$

• Si $x = 0$ on a $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

d'où $f_n \xrightarrow{CS} 0$ sur $I = [0, +\infty[$ $(\forall x \in I)$

* prenons $x_n = \frac{1}{n} \in I$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

on a $\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| \frac{2n \times \frac{1}{n}}{1 + n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2} - 0 \right| = 1$

donc $\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \neq 0$

donc f_n ne converge pas uniformément vers 0 sur I

2) Mq (f_n) CU sur $I = [\alpha, +\infty[$ tq $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ $\alpha > 0$

* Méthode 1

on a $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \frac{2xn}{1 + n^2x^2}$

et on a $1+n^2x^2 > n^2x^2 \Longrightarrow \dfrac{1}{1+n^2x^2} < \dfrac{1}{n^2x^2}$

$$\Longrightarrow \frac{2nx}{1+n^2x^2} < \frac{2nx}{n^2x^2} = \frac{2}{nx}$$

et on a $x \in [\alpha, +\infty[$ donc $x \geq \alpha \Longrightarrow \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\alpha}$

$$\Longrightarrow \frac{2}{nx} \leq \frac{2}{\alpha n}$$

donc

$$\frac{2xn}{1+n^2x^2} < \frac{2}{nx} \leq \frac{2}{\alpha n}$$

donc

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{\alpha n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

d'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} 0$ sur $I = [\alpha, +\infty[$ $(\alpha > 0)$

*** Méthode 2**

on a $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[\alpha,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[\alpha,+\infty[} \left(\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}\right)$

$\forall x \in [\alpha, +\infty[$ on a $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$

on a

$$f_n'(x) = \frac{(2nx)'(1+n^2x^2) - (2nx)(1+n^2x^2)'}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$= \frac{2n(1+n^2x^2) - 2nx(2n^2x)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{2n(1+n^2x^2 - 2n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$= \frac{2n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$ (puisque f_n est dérivable sur $[\alpha, +\infty[, \alpha > 0$)

on a $f_n'(x) = 0 \Longrightarrow 1 - n^2x^2 \Longrightarrow n^2x^2 = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{n}$

x	0	$\frac{1}{n}$	α	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$		$-$	
$f_n(x)$	$\nearrow$	$f(1/n)$	$\searrow$	

or $\alpha > 0$, Alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$ on a $\alpha n > 1$ càd $\alpha > \dfrac{1}{n}$

d'où $\sup\limits_{x\in[\alpha,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = f_n(\alpha) = \dfrac{2n\alpha}{1+n^2\alpha^2} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{2}{n\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

d'où $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} 0$ sur $[\alpha, +\infty[$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 3

$\alpha \geq 0$ on a $f_n(x) = n^\alpha x^n(1-x)$ $x \in [0,1]$ et $n > 0$

1) Mq (f_n) CS sur $[0,1]$

Soit $x \in [0,1]$ (fixé)

- Si $x = 0$ ou $x = 1$ on a $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
- Si $x \in]0,1[$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} n^\alpha x^n(1-x) = (1-x) \lim_{n \to +\infty} n^\alpha x^n$$

$$= (1-x) \lim_{n \to +\infty} n^\alpha e^{n\ln(x)} = \frac{(1-x)}{(\ln(x))^\alpha} \lim_{n \to +\infty} (n\ln(x))^\alpha e^{n\ln(x)} = 0$$

car $\lim_{n \to +\infty} (n\ln(x))^\alpha e^{n\ln(x)} = \lim_{t \to -\infty} t^\alpha e^t = 0$ $(\ln(x) < 0)$

d'où $\forall x \in [0,1]$ $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CS} 0$ sur $[0,1]$

2) Etudions la CU de la suite de fonction (f_n)

On a $\|f_n - f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0,1]} n^\alpha x^n(1-x)$

(car $1 - x \geq 0$) $\quad = \sup_{x \in]0,1[} n^\alpha x^n(1-x)$

On a $f_n'(x) = (n^\alpha x^n(1-x))' = n^\alpha(n x^{n-1}(1-x) + x^n(-1))$

$= n^\alpha(n x^{n-1} - n x^n - x^n) = n^\alpha x^{n-1}(n - nx - x)$

$= n^\alpha(n - x(n+1))x^{n-1}$ (f_n dérivable sur $[0,1]$)

$f_n'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $n - x(1+n) = 0$

$\Longrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{n}{1+n}$

donc

x	0	$\frac{n}{1+n}$	1
$f_n'(x)$	$+$	0	$-$
$f_n(x)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{n}{1+n}\right)$	$\searrow$ 0

donc $\|f_n - f\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$= n^\alpha\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$

$= n^\alpha\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n+1-n}{n+1}\right)$

$$= \frac{n^\alpha}{(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{n^\alpha}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \frac{n^\alpha}{n+1} e^{-n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}$$

On a $n+1>n \Rightarrow \frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$

donc $\frac{n^\alpha}{n+1}<\frac{n^\alpha}{n}$

$$\Rightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n^\alpha}{n+1}\right)<\frac{n^\alpha}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

et on a $\frac{n^\alpha}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = n^{\alpha-1}e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})} \underset{+\infty}{\sim} n^{\alpha-1}e^{-n\times\frac{1}{n}}$

(car $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$)

donc $\frac{n^\alpha}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} n^{\alpha-1}e^{-1} \underset{+\infty}{\sim} e^{(\alpha-1)\ln(n)}e^{-1}$

alors $e^{(\alpha-1)\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si et seulement si $\alpha-1<0$

càd $0\leq\alpha<1 \Rightarrow \alpha\in[0,1[$

donc $\|f_n-f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|n^\alpha x^n(1-x)| = \sup_{x\in]0,1[} n^\alpha x^n(1-x)$

$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n^\alpha}{n+1}\right)<\frac{n^\alpha}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} e^{(\alpha-1)\ln(n)}e^{-1} \xrightarrow[\text{si }\alpha<1]{} 0$$

d'où $\|f_n-f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (avec $0\leq\alpha<1$)

d'où $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} 0$ sur $[0,1]$ si et seulement si $\alpha\in[0,1[$

3) Pour $\alpha=0$ calculons sans intégration $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)dx$

On a $\alpha=0$ càd $\alpha\in[0,1[$ donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} 0$ sur $[0,1]$

de plus $f_n(x)=x^n(1-x)$ est continue sur $[0,1]$

donc d'après théorème de la convergence uniforme et intégrale de Rieman on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} x^n(1-x) = \int_0^1 0\,dx = 0$$

car $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$ puisque $x\in[0,1]$

Exercice 5

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1-nx) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$ avec $I = [0,1]$

$\Downarrow x \in]\frac{1}{n}, 1]$

1) Etudions la limite simple

soit $x \in [0,1]$ (fixé)

- Si $x = 0$ on a $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
- Si $x > 0$ alors

f_n est stationnaire

$\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$, $x > \frac{1}{n}$ alors $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

ou bien on a

* pour $x \in]0, \frac{1}{n}[$ on a $\underset{+\infty \searrow 0 \swarrow +\infty}{0 < x < \frac{1}{n}}$ donc $x = 0$

et par suite $f_n(0) = 0 \xrightarrow[+\infty]{} 0$

* pour $x \in]\frac{1}{n}, 1]$ $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

d'où $\forall x \in [0,1]$ on a $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CS} 0$ sur $[0,1]$

2) calculons $\int_0^1 f_n(t)\,dt$ A-t-on CU sur $[0,1]$?

on a

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(t)\,dt + \cancel{\int_{\frac{1}{n}}^1 f_n(t)\,dt}^{=0} \quad (\text{car } f_n(x) = 0 \text{ sur }]\tfrac{1}{n}, 1])$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 t(1-nt)\,dt = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} (t - nt^2)\,dt$$

$$= n^2 \left[\frac{t^2}{2} - n\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{n}} = n^2\left[\frac{1}{2n^2} - n\frac{1}{3n^3}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

* on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

or $\int_0^1 \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0 \neq \frac{1}{6}$

donc $\int_0^1 \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t)\,dt \neq \lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$

d'où (f_n) ne converge pas uniformement sur $[0,1]$ Vers 0

3) Etudions la convergence uniforme sur $[a,1]$ pour $a \in]0,1]$

On a $a>0$ donc $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)$ on a $a > \frac{1}{n}$, ce qui entraine que sur $[a,1]$, $f_n(x)$ est stationnaire et $\forall n \geq N \quad f_n(x) = 0$

En d'autre part $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [a,1]} |f_n(x)| = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

d'où en déduit que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} f$ sur $[a,1]$

autre méthode

On peut Etudier la Variation de f_n sur $[a,1]$ ($|f_n - f| = f_n$)

puis on calcul $\sup_{x \in [a,1]} |f_n - f|$

Exercice 4

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2} \qquad I = [0\,1] \text{ et } n \geq 1$$

1) Etude de la CS sur I

Soit $x \in [0,1]$ (fixés)

- Si $x = 0$ on a $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
- Si $x \in]0,1]$ on a

$$\lim_{+\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^n x}{2^n n x^2}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n x} = 0$$

d'où $\forall x \in [0,1]$ on a $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ et par conséquence $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CS} 0$ sur $[0,1]$

2) calculons $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$ et $\lim_{n \to +\infty} I_n$, en deduire que (f_n) n'est pas uniformément convergent sur $[0,1]$

On a $I_n = \int_0^1 \frac{2^n t}{1+2^n n t^2}\,dt = \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{2n 2^n t}{1+2^n n t^2}\,dt$

$= \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{(1+2^n n t^2)'}{1+2^n n t^2}\,dt = \frac{1}{2n}\left[\ln|1+2^n n t^2|\right]_0^1$

$= \frac{1}{2n}\left[\ln(1+2^n n) - 0\right] = \frac{\ln(1+n2^n)}{2n}$

On a

* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\ln(1+n2^n)$

on sait que $\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\ln(2^n n)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\left(\ln(2^n)+\ln(n)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(2^n)}{2n} + \frac{\ln(n)}{2n}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln(2)}{2}$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$

* et on a $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0$

et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{2} = \frac{\ln(2)}{2}$

d'où $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt \neq \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt$

d'où (f_n) ne converge pas uniformemente vers 0 sur I

3) <u>(f_n) ne converge pas uniformement sur $[0,1]$ par démonstration directe</u>

Soit $x_n = \frac{1}{2^n} \in [0,1]$

On a $\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| = \left|\frac{2^n \times \frac{1}{2^n}}{1+2^n n \times \left(\frac{1}{2^n}\right)^2} - 0\right| = \left|\frac{1}{1+\frac{n}{2^n}}\right|$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n 2^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n\, e^{\ln(2^{-n})}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} n\, e^{-n\ln(2)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{-\ln(2)} \times \left(-n\ln(2)\, e^{-n\ln(2)}\right) = 0$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} -n\ln(2)\, e^{-n\ln(2)} = \lim\limits_{t\to-\infty} t\, e^{t} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left| \dfrac{1}{1+\frac{n}{2^n}} \right| = \dfrac{1}{1+0} = 1$

d'où $|f_n(x_n) - f(x_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$

d'où (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0,1]$

Exercice 6

$$f_n(x) = \frac{n(x^3+x)\,e^{-x}}{nx+1} \qquad I = [0,1] \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

1) Mq (f_n) CS sur $[0,1]$ vers une fct f à déterminer

Soit $x \in [0,1]$ (fixé)

- Si $x = 0$ on a $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- Si $x \in]0,1]$ on a

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(x^3+x)e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} = (x^2+1)e^{-x}$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

d'où (f_n) CS sur $[0,1]$ vers la fonction f définit par

$$f(x) = \begin{cases} (x^2+1)\,e^{-x} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2) Mq (f_n) CU sur $[\alpha,1]$ avec $\alpha \in]0,1[$, A-t-on la CU sur $[0,1]$

On a $|f_n - f| = \left| \dfrac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1} - (x^2+1)e^{-x} \right|$ car $\alpha \in]0,1[$

$= \left| \dfrac{n(x^3+x)e^{-x} - (x^2+1)e^{-x}(nx+1)}{nx+1} \right| = \left| \dfrac{e^{-x}(\cancel{nx^3} + nx - \cancel{nx^3} - x^2 - nx - 1)}{nx+1} \right|$

$$|f_n - f| = \left|\frac{(-x^2-1)e^{-x}}{1+nx}\right| = \left|\frac{(x^2+1)e^{-x}}{1+nx}\right|$$

et on a

$x \in [\alpha, 1] \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow x^2+1 \leq 2 \Rightarrow e^{-x}(x^2+1) \leq 2e^{-x}$

et on a $\alpha \in]0,1[\Rightarrow 0 < \alpha < 1$ $\quad \frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx} < \frac{1}{\alpha n}$

$\Rightarrow -1 < -\alpha < 0 \Rightarrow e^{-\alpha} < 1$ $\quad \Rightarrow |x^2 e^{-x} + e^{-x}| \leq 2$

de plus $\alpha \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq -\alpha \Rightarrow e^{-x} \leq e^{-\alpha}$

d'où $e^{-x}(x^2+1) \leq 2e^{-x} \leq 2e^{-\alpha} \leq 2$ $\quad \Rightarrow |f_n - f| \leq \frac{2}{\alpha n}$

de plus

$x \geq \alpha \Rightarrow nx+1 \geq n\alpha+1 \Rightarrow \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+n\alpha}$

donc

$$|f_n - f| = \frac{e^{-x}(x^2+1)}{1+nx} \leq \frac{2}{1+\alpha n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

de plus $\frac{2}{1+\alpha n}$ ne depend pas de x

donc $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} f$ sur $[\alpha, 1]$ avec $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$

avec $\alpha \in]0,1[$

* on a $\forall n \geq 0$ (f_n) est continue sur $[0,1]$, mais f n'est pas continue en 0 car $\lim_{x \to 0^+} (x^2+1)e^{-x} = 1 \neq f(0) = 0$

d'où (f_n) ne converge pas uniformement sur $[0,1]$

3) Mq $|f_n(x) - f(x)|$ est borné sur $[0,1]$

- Si $x \in]0,1]$ on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{(x^2+1)e^{-x}}{1+nx} \leq 2 \text{ car}$$

$(x^2+1)e^{-x} \leq 2$ et $1+nx \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+nx} \leq 1$

et donc $\frac{(x^2+1)e^{-x}}{1+nx} \leq 2$

d'où $0 < |f_n(x) - f(x)| \leq 2$ borné

- Si $x = 0$ on a $|f_n(0) - f(0)| = 0 \leq 2$

d'où $\forall x \in [0,1]$ on a $0 < |f_n(x) - f(x)| \leq 2$

4) Deduire la nature de la suite : $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

càd est-ce que la suite u_n converge ou non ?

* sur $[\alpha, 1]$ on a $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} f$ $\left(f(x) = (x^2+1)e^{-x} \right)$

de plus f_n est continue sur $[\alpha, 1]$ donc d'aprés la convergence uniforme et l'integrale de Rieman on a.

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\alpha^1 f_n(x)\,dx = \int_\alpha^1 \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)}\,dx = \int_\alpha^1 \underbrace{f(x)}\,dx$$

càd $\int_\alpha^1 f_n(x)\,dx \xrightarrow[n \to +\infty]{CV} \int_\alpha^1 f(x)\,dx$ sur $[\alpha, 1]$

et d'aprés la définition de limite $|f(x) - l| < \varepsilon$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) : \left| \int_\alpha^1 f_n(x)\,dx - \int_\alpha^1 f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

pour $\varepsilon = \alpha$ on obtien $\left| \int_\alpha^1 (f_n(x) - f(x))\,dx \right| < \alpha$ (1)

* sur $[0, \alpha]$ et d'aprés la question 3) on a.

$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ $\quad ([0,\alpha] \subset [0,1])$ sur $[0,1]$

donc

$$\left| \int_0^\alpha (f_n(x) - f(x))\,dx \right| \leq \int_0^\alpha |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_0^\alpha 2\,dx = 2\alpha$$ (2)

par suite $(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N)$

$$\left| \int_0^1 (f_n(x) - f(x))\,dx \right| = \left| \int_0^\alpha (f_n(x) - f(x))\,dx + \int_\alpha^1 (f_n(x) - f(x))\,dx \right|$$

$$\leq \left| \int_0^\alpha (f_n(x) - f(x))\,dx \right| + \left| \int_\alpha^1 (f_n(x) - f(x))\,dx \right|$$

$$\leq 2\alpha + \alpha = 3\alpha$$ (d'aprés (1) et (2))

d'où

$$\left| \int_0^1 f_n(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx \right| \leq 3\varepsilon$$

d'où $\int_0^1 f_n(x)\,dx \xrightarrow[n \to +\infty]{CV} \int_0^1 f(x)\,dx$

d'où $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CV} \int_0^1 f(x)\,dx$

Série de fonction

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fct tq $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $(I\subset\mathbb{R})$

* $(\forall x\in I)(\forall n\in\mathbb{N})$ la suite $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ s'appelle suite des sommes partielle de f_n
* $\sum_{n\geq 0} f_n$ s'appelle série de terme generale f_n
* Dans le cas où la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge on a :

somme de la série

$$S_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} S(x)$$

le reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$

* $(\forall x\in I)$: $S(x)=S_n(x)+R_n(x)$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k(x)+\underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)}_{\to 0}$$

* **Convergence simple :**

$(\forall x\in I)$ $(S_n)_{n\geq 0}$ CS sur I $\Longrightarrow R_n(x)\xrightarrow[\text{sur } I]{CS} 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} f_n$ CS sur I

* **Convergence uniforme**

$(S_n)_{n\geq 0}$ CU sur I $\Longrightarrow \sum_{n\geq 0} f_n$ CU sur I

$\begin{cases} \sum f_n \text{ CS sur } I \\ (R_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{CU} 0 \text{ sur } I \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\sum_{n\geq 0} f_n \text{ CU sur } I}$

$\lim S_n(x)=S(x)$

$\lim \underbrace{S_n(x)-S(x)}=0$

$\lim -R_n(x)=0$

* **Convergence absolue**

$(\forall x\in I)$ $\sum_{n\geq 0}|f_n(x)|$ CV sur I $\Longrightarrow \sum_{n\geq 0} f_n$ CA sur I

* **Convergence Normale**

$(\forall x\in I)$ $\sum_{n\geq 0}\|f_n\|_\infty$ CV sur $I \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 0} f_n$ CN sur I

critère de Weierstrass

$\begin{cases} \exists(\alpha_n) \text{ suite réelle positive } (\alpha_n) \text{ tq} \\ \bullet (\forall n\in\mathbb{N})(\forall x\in I) ; |f_n(x)|\leq\alpha_n \\ \bullet \sum\alpha_n \text{ CV} \end{cases} \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 0} f_n \text{ CN sur } I$

⚠ α_n est independant de x

* $CN \Rightarrow CA \Rightarrow CS$, $CN \Rightarrow CU \Rightarrow CS$

$(\forall x\in I)$

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}|f_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\|f_n\|_\infty$$

• Série alterné et la CU

Soit V_n une suite de fonction

$\sum_{n\geq 0} (-1)^n V_n$ avec $V_n > 0$ alors $\sum_{n\geq 0} (-1)^n V_n$ est une série alterné de plus on a : $|\underbrace{R_n(x)}_{\text{le reste de la série}}| \leq |\underbrace{V_{n+1}(x)}_{\text{le premier terme de la série}}|$

critère d'Abel uniforme

Soient $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite de fonctions tel que $V_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $W_n : I \longrightarrow (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ avec $I \subset \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ (V_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ \bullet\ V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} 0 \text{ sur } I \\ \bullet\ (W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifier } \exists M>0 \text{ tq} \\ \forall m,n\in\mathbb{N},\ m>n \Rightarrow (\forall x\in I) \text{ on a} \\ \quad |W_n(x)+W_{n+1}(x)+\dots+W_m(x)| \leq M \end{array}\right. \Longrightarrow \text{la série de fonction } \sum V_n(x)W_n(x) \text{ CU}$$

critère des série alternées

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction tq $V_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $(I\subset\mathbb{R})$

$$\left\{\begin{array}{l} (V_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} 0 \text{ sur } I \end{array}\right. \Longrightarrow \text{la série alternée } \sum (-1)^n V_n \text{ CU sur } I$$

Propriétés des somme de séries de fonction

Soit $\sum f_n$ une série de fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ $(I\subset\mathbb{R})$

• CU et continuité

$$\left\{\begin{array}{l} \sum f_n \text{ CU sur } I \\ \text{les } f_n \text{ sont continues sur } I\ (\forall n\in\mathbb{N}) \end{array}\right. \Longrightarrow \text{la somme de la série } S(x) \text{ est continue sur } I$$

réciproquement

$$\left\{\begin{array}{l} S(x) \text{ est discontinue sur } [a,b] \\ \text{et} \\ \text{les } f_n \text{ sont continue sur } [a,b] \end{array}\right. \Longrightarrow \sum f_n \text{ ne CV pas uniforme sur } [a,b]$$

• CU et integrale de Rieman

Soit f_n une suite de fonction.

$$\begin{cases} f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (définie sur } [a,b]) \\ f_n \text{ continue sur } [a,b] \\ \sum f_n \text{ CU sur } [a,b] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sum \left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{CV} S(x) \\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx\right) \\ = \int_a^b S(x)\,dx \end{cases}$$

• CU et dérivation

Soit $\sum f_n$ une série de fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$

$$\begin{cases} * (\forall n \in \mathbb{N}),\ f_n \text{ est de } C^1 \text{ sur } I \\ * \sum f_n' \text{ CU sur } I \\ * (\exists a \in I) \text{ tq } \left(\sum f_n(a)\right) \text{ converge} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sum f_n \text{ CU sur } I \\ \text{avec } S(x) \text{ est de } C^1 \text{ sur } I \\ \text{et } (\forall x \in I) : \\ \left(\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)}_{S(x)}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) \end{cases}$$

série numérique

<u>en générale</u>

$(K \in \mathbb{N}^*)$ càd $K \geq 1$

$$\begin{cases} * (\forall n \in \mathbb{N}),\ f_n \text{ est de classe } C^K \text{ sur } I \\ * \sum f_n^{(K)} \text{ CU sur } I \\ * (\exists a \in I) \text{ tq } \forall j \in [0, K-1] \text{ on a} \\ \quad \left(\sum f_n^{(j)}(a)\right) \text{ converge} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sum f_n \text{ CU sur } I \text{ avec} \\ S(x) \text{ est de classe } C^K \\ \text{sur } I, \text{ et } (\forall x \in I) \\ \forall j \in [0, K] \\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x) \end{cases}$$

série numérique

• $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ une fonction de classe C^∞

$$\begin{cases} * \text{ Toutes les fonction } f_n \text{ sont de } C^\infty \text{ sur } I \\ * (\forall p \in \mathbb{N}),\ \sum u_n^{(p)} \text{ CU sur } I \end{cases} \Longrightarrow$$

la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty}$ est classe C^∞ sur I, et on a

$$(\forall p \in \mathbb{N}) ; \left(\sum_{K=0}^{+\infty} f_n\right)^{(p)} = \sum_{K=0}^{+\infty} f_n^{(p)}$$

Exercice 1: Montrer que la série des fonctions $\sum f_n$ avec

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \quad (n \geq 1)$$

autre méthode

converge uniformément sur $[0,1]$, mais ne converge pas normalement sur ce segment.

Exercice 2: Soient $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x)^n}$, $\quad n \in \mathbb{N}$, et $\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

1. Etudier la convergence simple sur $[0,+\infty[$ de la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.

Exercice 3:

Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$.

1. Justifier que S est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. Établir que S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et déterminer S'.

Exercice 4: Soient $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\ln(x+n)}{n^2}, \quad (n \geq 1)$ et $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$.
2. Montrer que S est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$ et exprimer pour tout $x \in [0,+\infty[$, $S'(x)$ et $S''(x)$ sous forme de sommes de séries.
3. En déduire que S est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et que S est concave sur $[0,+\infty[$.

Exercice 5: Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x}$

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$. On note $S(x)$ sa somme.
2. Démontrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier la monotonie de S sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
5. Justifier que S admet une limite en 0. Démontrer que, pour tout entier N, on a

$$\lim_{x\to 0} S(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

   En déduire la valeur de $\lim_{x\to 0} S(x)$.

Serie 2

Exercice 1

Soit $\sum f_n$ une série de fonction tel que

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \qquad (n \geq 1)$$

• Mq $\sum_{n\geq 1} f_n$ CU sur $[0,1]$, mais ne converge pas normalement sur $[0,1]$

• La CU

On a $$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1}\right|$$

et puisque la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ est alterné car $\frac{x^n}{n}$ est positif alors d'apré la propriété des série alternées

On a $$|R_n(x)| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{car } x^{n+1} \leq 1$$

donc $\forall x \in [0,1]$ on a $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

d'où $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} 0$ sur $[0,1]$

et par suite la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n$ CU sur $[0,1]$

• La non convergence normale

On a $\|f_n(x)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ car

On a On a $\sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \sup|x^n| = \frac{1}{n}$

car $\sup_{x\in[0,1]} |x^n| = 1$

Or

la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est une série harmonique, donc elle diverge d'où $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$ diverge et par conséquent $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$

Exercice 8

Soient $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

1) Etude de la CS de la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ sur $[0, +\infty[$

On a $S_n(x) = \sum_{K=0}^{n} f_K(x) = \sum_{K=0}^{n} \dfrac{x}{(1+x)^K} = x \sum_{K=0}^{n} \left(\dfrac{1}{1+x}\right)^K$

- Si $x = 0$ on a $S_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- Si $x \in]0, +\infty[$ on a

$$S(x) = x \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1+x}} \quad \text{car} \quad \left|\dfrac{1}{1+x}\right| < 1$$

raison $q = \dfrac{1}{1+x}$

puisque $x + 1 > 1$ $\left(\sum_{K\geq 0} \left(\dfrac{1}{1+x}\right)^K \text{ série géométrique} \right)$

d'où $S(x) = \dfrac{x}{\dfrac{1+x-1}{1+x}} = (1+x)$

pour une suite géométrique $\sum_{n\geq 0} q^n$ CV vers $\dfrac{1-q^{(n-0+1)}}{1-q}$ or si $|q| < 1$

$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-q}$ car $q^{n+1} \longrightarrow 0$ $(-1<q<1)$

d'où $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = (1+x)$

et par suite la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement vers la fonction S définie par $S(x) = \begin{cases} (1+x) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2) Mq $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ ne converge pas uniformement sur $\mathbb{R}_+$

Comme les f_n sont continue sur $[0, +\infty[$. Si on suppose plus qu'on a la CU sur $[0, +\infty[$ Alors la limite S serait donc continue sur $[0, +\infty[$

or on a $\lim_{x\to 0+} S(x) = \lim_{x\to 0+} (1+x) = 1 \neq S(0) = 0$

donc S n'est pas continue en 0 même si les f_n sont continue d'où $\sum_{n\geq 0} f_n$ ne converge pas uniformement sur $[0, +\infty[$

Excercice 3

pour $x > 0$ on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$

1) Justifier que S est définie et continue sur $]0,+\infty[$

On pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+nx}$ et $V_n = \frac{1}{1+nx}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

et $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$

• S est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ $\iff \begin{cases} ① \ f_n \text{ est définie (existe sur }]0,+\infty[) \\ ② \ \sum_{n\geq 0} f_n(x) \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$

① Il claire que f_n est définie car $1+nx \geq 1 > 0$

(càd $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $1+nx \neq 0$)

② On a $\forall x \in]0,+\infty[$ (fixé) $V_n(x) \geq 0$

$V_{n+1} = \frac{1}{1+(n+1)x}$ donc $V_{n+1} \leq V_n$ car

$(n+1) > n \implies 1+(n+1)x > 1+nx$ $(x>0)$

donc

$$\frac{1}{1+(n+1)x} < \frac{1}{1+nx}$$

donc $V_n(x)$ est décroissant

Or $\lim_{n\to+\infty} V_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+nx} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nx} = 0$

car $\frac{1}{1+nx} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{nx}$

Pour chaque x fixé dans $]0,+\infty[$ $V_n(x)$ converge simplement vers 0 sur $]0,+\infty[$, par conséquence, et d'après le critère des série alternées on a $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement d'où S est définie sur $]0,+\infty[$

• La continuité de S

* pour chaque $n \geq 0$ $f_n(x)$ est continue

il est claire que les f_n sont continue sur $]0,+\infty[$

(f_n est une fraction rationelle)

* La CU de $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$

On a $|R_n(x)| = \left|\sum_{K=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^K}{1+Kx}\right| \leq \left|\frac{(-1)^{n+1}}{1+x(n+1)}\right|$

donc $|R_n(x)| \leq \frac{1}{1+x(n+1)}$

S continue sur I $\Leftarrow$ $\begin{cases} f_n \text{ continue sur } I \\ \sum f_n(x) \text{ CU sur } I \end{cases}$

faisons $a>0$ on a $\forall x \in [a,+\infty[$ $(x \geq a)$

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{1+(n+1)a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

vers 0

donc R_n CU sur $[a,+\infty[$ et par suite la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ CU sur toute intervalle de la forme $[a,+\infty[$ $a>0$

On a a est arbitraire, alors $\sum f_n(x)$ CU sur $]0,+\infty[$

d'où d'après théorème de la continuité; les f_n sont continue et $\sum_{n\geq 0} f_n$ CU sur $]0,+\infty[$ d'où la continuité de S

2) Déterminons la limite de S en $+\infty$

On a $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \sum_{n\geq 0} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$

Rappel

La somme d'une série alternée est toujour encadré entre deux sommes partielles consecutives:

autre methode

critère de série alterne

On a $(\forall n \in \mathbb{N})$ $S_{2n+1}(x) \leq S(x) \leq S_{2n}(x)$

pour $n=0$ on a

$$S_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad S_1(x) = \sum_{K=0}^{1} \frac{(-1)^K}{1+Kx} = 1 - \frac{1}{1+x}$$

donc $1 - \frac{1}{1+x} \leq S \leq 1$

$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum \lim f_n(x)$

$= \lim S(x) = 0+1 = 1$

par passage à la limite on a $1 - \frac{1}{1+x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

et $1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

finalement, d'après le theorème de gendarme $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 1$

3) Etablir que S est de C^1 sur $]0,+\infty[$, déterminons S'

• f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ $(\forall n \geq 0)$

il est évident que f_n est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ en effet $(\forall x>0)$ $1+nx>0$ et puisque f_n est une fraction rationnelle alors elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (les dérivés premières existent et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ avec f_n est dérivable)

• $\sum_{n\geq 0} f_n'(x)$ CU sur $\mathbb{R}_+^*$

on a

$$f_n'(x) = \frac{-n(-1)^n}{(1+nx)^2} = \frac{n(-1)^{n+1}}{(1+nx)^2} \quad (f_n \text{ dérivable sur } \mathbb{R}_+^*)$$

On a $\sum_{n\geq 0} f_n'(x)$ est une série alterne

donc

$$|R_n'(x)| = \left| \sum_{K=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{K+1} K}{(1+xK)^2} \right| \leq \frac{n+1}{(1+x(n+1))^2}$$

fixons $a>0$ avec $x \in [a,+\infty[$ $(x \geq a)$

On a

$$|R_n(x)| \leq \frac{n+1}{(1+a(n+1))^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n+1}{((n+1)a)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)a^2}$$

et puisque

$$\frac{1}{(n+1)a^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $R_n(x)$ converge uniformement vers 0 sur tout intervalle $[a,+\infty[$ $a>0$ et par suite $\sum f_n'$ CU sur $]0,+\infty[$ (puisque a est arbitraire)

• $\exists b \in]0,+\infty[$ tel que $\sum_{n\geq 0} f_n(b)$ converge

Pour $b=1$ on a $\sum_{n\geq 0} f_n(1)$ converge en effet $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{1+n}$ est une série alterné avec $V_n = \frac{1}{1+n} > 0$

et on a $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+n} = 0$

et $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2+n} - \frac{1}{1+n} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$

donc V_n décroissant vers 0 (converge vers 0) d'où $\sum_{n\geq 0} f_n(1)$ converge, finalement S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et on a $(\forall x \in]0,+\infty[)$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n}{(1+nx)^2}$$

(d'après le théorème de la dérivation)

Exercice 4

Soient : $f_n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$

$x \longmapsto \frac{\ln(x+n)}{n^2}$ $(n \geq 1)$

autre méthode

1) Etudions la convergence simple de $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}^+$

Soit $x \in [0,+\infty[$ (fixé)

alors d'après la propriété d'Archimède, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $x \leq N$ d'où $\forall n \geq N$, $x \leq n$

donc $x \leq n \Longrightarrow x+n \leq 2n$ or la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ croissant sur $\mathbb{R}_+$, alors $\ln(x+n) \leq \ln(2n)$ et $\ln(x+n) \geq 0$

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{\ln(2n)}{n^2} = \frac{\ln(2)}{n^2} + \frac{\ln(n)}{n^2} \Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{\ln(2)}{n^2} + \frac{\ln(n)}{n^2}$$

puisque $\sum_{n\geq N} \frac{\ln(2)}{n^2}$ CV (série de Rieman)

et $\sum_{n\geq N} \frac{\ln(n)}{n^2}$ CV (série de Bertrand $\alpha = 2 > 1$)

alors $\sum_{n\geq N} f_n(x)$ converge sur $\mathbb{R}^+$ (car la nature d'une série reste la même si on supprime ou on ajoute un nombre fini des termes)

d'où par la règle de comparaison des série positives $\sum f_n$ CS sur $\mathbb{R}_+$

Rappel

série de Bertrand $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ converge si

$(\alpha > 1 \ \forall \beta)$ ou $(\beta > 1$ et $\alpha = 1)$ si $\alpha < 1$ diverge

2) Mq S est de C^2 sur $[0,+\infty[$ et exprimer $S'(x)$ et $S''(x)$ sous la forme de somme de série pour tout $x \in [0,+\infty[$

- $\forall n \geq 1$, f_n est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$

On a $f_n(x)$ définie et continue sur $[0,+\infty[$ de plus $f_n(x)$ est dérivable (puisque la fct $t \longmapsto \ln(t)$ et la fct $t \longrightarrow \frac{1}{t^2}$ sont des fonction dérivable sur $[0,+\infty[$)

et On a

$$f_n'(x) = \frac{1}{n^2(x+n)} \quad \text{et} \quad f_n''(x) = \frac{-1}{n^2(x+n)^2}$$

donc les dérivés partielle première et deuxième sont définie et continue sur $[0,+\infty[$ d'où $(\forall n \geq 1)$ f_n est de classe C^2

• $\sum f_n''(x)$ CU sur $\mathbb{R}_+$

On a $|f_n''(x)| = \frac{1}{(n(x+n))^2} \leq \frac{1}{n^4}$ car

$$x+n > n \Rightarrow \frac{1}{n+x} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

d'où $|f_n''(x)| \leq \frac{1}{n^4}$

(ou bien On a $n \geq 1$ et $x > 0$ donc $n+x \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{(n+x)^2} \leq 1$

donc $|f_n''(x)| \leq \frac{1}{n^2}$)

or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$ converge c'est une série de Rieman $\alpha = 4 > 1$

d'où $\sum f_n''(x)$ converge normalement donc CU sur $\mathbb{R}^+$

• $\exists b \in [0,+\infty[$ tq $\sum_{n\geq 1} f_n(b)$ et $\sum_{n\geq 1} f_n'(b)$ converge

c-à-d $\forall m \in [0,1]$ $\sum_{n\geq 1} f_n^{(m)}(b)$ CV sur $[0,+\infty[$

pour $b = 0$ On a

$$f_n(0) = \frac{\ln(n)}{n^2} \quad \text{et} \quad f_n'(0) = \frac{1}{n^3}$$

donc les deux série $\sum_{n\geq 1} f_n(0)$ et $\sum_{n\geq 1} f_n'(0)$ converge sur $\mathbb{R}_+^*$. (série de Rieman et série de Bertrand)

finalement S est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$ et On peut dérivé terme par terme donc

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+x)}$$

et $S''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n^2(x+n)^2}$

3) En deduire que S est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et que S est concave sur $[0,+\infty[$

comme $\forall x \in [0,+\infty[$, $S'(x) > 0$ Alors S est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

de plus $\forall x \in [0,+\infty[$ On a $S''(x) < 0$ alors S est concave sur $[0,+\infty[$

$\lim_{+\infty} \frac{f}{g} = 1 \iff f \underset{+\infty}{\sim} g$

Exercice 5

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x}$

1) Etude de la CS de $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$. On note $S(x)$ sa somme.

On a
$$D f_n = \{x \in \mathbb{R} \,/\, n + n^2 x \neq 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, n^2(\tfrac{1}{n} + x) \neq 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \tfrac{-1}{n}\}$$ d'où $Df = \mathbb{R} \setminus \{\frac{-1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\}$

soit maintenant $x \in Df$ (fixé)

- pour $x = 0$ $\sum_{n\geq 1} f_n(0)$ diverge car $\sum_{n\geq 1} f_n(0) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ (série harmonique)
- pour $x \neq 0$ On a $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge car On a $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x}$ et puisque $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 x}$ converge (série de Rieman)

d'où
$$\sum_{n\geq 1} f_n(x) \text{ CS sur } \mathbb{R}^* \setminus \{\tfrac{-1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$$

2) Démontrons que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$

- On sait que S est définie sur $\mathbb{R}_*^+$ Si
$$\begin{cases} f_n \text{ est définie sur } \mathbb{R}_*^+ \\ \sum_{n\geq 1} f_n(x) \text{ converge sur } \mathbb{R}_*^+ \end{cases}$$

* On a f_n est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $n + n^2 x \neq 0$
* et puisque $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ CS sur $\mathbb{R}^* \setminus \{\frac{-1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$ et On a $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}^* \setminus \{\frac{-1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$ d'où $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ CS sur $\mathbb{R}_+^*$

d'où S est définie

• <u>Mq S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$</u>

Il est claire que f_n est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, Il reste a démontrer la CU de $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_*^+$

$\forall x \geq a$ avec $a > 0$ on a

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n+n^2x} \leq \frac{1}{n+an^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{an^2}$$

or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{an^2}$ converge (série de Rieman) d'où $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ CU sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ où $a>0$ puisque a est arbitraire alors $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ CU sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où S est continue sur $]0, +\infty[$ (d'après théorème de la continuité)

3) <u>Etude de la monotonie de S sur $\mathbb{R}_+^*$</u>

d'après théorème de dérivation on a:

• <u>$(\forall n \geq 1)$ f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$</u> (Montrons seulement la dérivabilité puisque l'interet et de Mq S dérivable)

on a $f_n(x)$ une fraction rationnelle donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $f_n'(x) = \frac{-n^2}{(n+n^2x)^2} = \frac{-1}{(1+nx)^2}$

• <u>$\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ CU sur $[a, +\infty[$ où $a>0$, on a</u>

$$|f_n'(x)| = \frac{1}{(1+nx)^2} \leq \frac{1}{(1+an)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(na)^2} \text{ et } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(na)^2} \text{ CV}$$

d'où $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ converge normalement donc uniformement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a>0$ et par suite la série $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ CU sur $]0, +\infty[$ (d'après Weierstrass)

• <u>$\exists b \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\sum_{n\geq 1} f_n(b)$ converge sur $]0, +\infty[$</u>

pour $b = 1$ on a

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+n^2}$ CV car $\frac{1}{n+n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV

d'où on peut dériver terme à terme alors $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$

$$S'(x) = \sum_{n\geq 1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{-1}{(1+nx)^2} < 0 \Rightarrow S \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$\sum f_n$ CU, continuité de f_n

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$$

4) Déterminons $\lim_{x\to+\infty} S(x)$

On a $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \sum_{n\geq 1} f_n(x)$

On a $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n+n^2x} = 0$ (existe) On a de plus $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ CU sur $\mathbb{R}_+^*$ alors d'après théorème de double limite on a

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \sum_{n\geq 1} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} \sum_{n\geq 1} f_n(x)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{n\geq 1} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{n\geq 1} 0 = 0$$

d'où $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$

tout suite U_n $\begin{cases} \uparrow + \text{majoré} \Rightarrow CV \\ \downarrow + \text{minoré} \Rightarrow CV \end{cases}$

5) justifier que S admet une limite en 0. Démontrons que $(\forall N \in \mathbb{N})$ on $\lim_{x\to 0} S(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ et en déduire $\lim_{x\to 0} S(x)$

On a S admet une limite en 0 car S est décroissante strictement et minoré par 0 ($S(x)\geq 0$) pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$

On a $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ donc $S(x) \geq \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

Ceci est vrai pour tout entier n. par passage à la limite on a

$$\lim_{x\to 0} S(x) \geq \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+n^2x}$$

$$\geq \sum_{n=1}^{N} \lim_{x\to 0} \frac{1}{n+n^2x}$$

$$\geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

tout suite U_n $\begin{cases} \uparrow + \text{non majoré} \Rightarrow \lim U_n = +\infty \\ \downarrow + \text{non minoré} \Rightarrow \lim U_n = -\infty \end{cases}$

pour une somme finie on peut permuter entre $\sum$ et lim or il faut d'abord vérifier le th de la continuité puis on peut permuter

comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge alors $(\exists N\in\mathbb{N})$ à partir duquel $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$ par suite $\lim_{x\to 0} S(x) = +\infty$

Scanné avec CamScanner

Série entières

* Une série entière est une série de fonction de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$
* $(a_n)_{n\geq 0}$: la suite des coefficients de la série (suite de réels ou complexe)
* $\exists R \in (\mathbb{R}^+ \sqcup [+\infty])$ (le rayon de convergence R de la série est unique)
  - $(\forall x \in \mathbb{R})$ tq $|x| < R \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge
  - $(\forall x \in \mathbb{R})$ tq $|x| > R \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge.

  de plus on a $R = \sup\{r \geq 0 \,/\, (|a_n| r^n)_{n\geq 0} \text{ est majorée}\}$
  - Si $x \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge $\Longrightarrow |x| \leq R$
  - Si $x \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge $\Longrightarrow |x| \geq R$
  - $|x| = R$, on ne peut rien dire de la nature de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$
  - l'ensemble $\{x \in \mathbb{C}, |x| < R\}$ est dit le disque de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ CV R div
  - l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, -R < x < R\}$ est dit l'intervalle de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ div $-R$ CV R div

* **Méthode de calcul de R**

$$R = \frac{1}{L} \quad \text{avec } L \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

règle d'Alembert

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$$

avec $(a_n \neq 0)$ $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$

formule de Hadamard

$$L = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

règle de cauchy

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$$

$(a_n \neq 0)$

⚠ La règle d'Alembert est inapplicable pour les série du type $\sum a_n z^{2n}$, $\sum a_n z^{2n+1}$, $\sum a_n z^{n^2}$, ... donc on effectue soit un changement de variable afin de trouver la forme $\sum a_n z^n$ ou bien en utilise le théorème d'Alembert pour les séries numériques

• Comparaison de rayons de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectivement Ra et Rb

Si $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq |b_n|$
$\Longrightarrow R_a \geq R_b$

Si $a_n = O(b_n)$
$\Longrightarrow R_a \geq R_b$

$\Downarrow$

$a_n = O(b_n)$ par définition $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$ et $(\forall n \geq N)$ on a $|a_n| \leq M|b_n|$

Si $a_n \sim b_n$
$\Longrightarrow R_a = R_b$

• Opérations sur les séries entières

Somme de deux séries entières

la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence R vérifier

- Si $R_a \neq R_b \Longrightarrow R = \inf(R_a, R_b)$
- Si $R_a = R_b \Longrightarrow R \geq R_a = R_b$

(dans le cas où $R_a = R_b$ on ne peut rien dire sur R)

de plus $(\forall z \in \mathbb{C})$ tq $|z| < \inf(R_a, R_b)$ on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

Série dérivée

la série entière $\sum a_n z^n$ et sa série dérivée $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ ont même rayon de convergence

⚠ On peut utiliser la comparaison de rayon de convergence et les opérations sur les séries entières afin de déterminer le rayon de convergence

• Convergence uniforme et séries entières

Soit $I =]-R, R[$ (l'intervalle de convergence) et soit $D(0, R)$ le disque de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$

- $\sum a_n z^n$ CN (donc CU) sur tout partie compacte $K \subset D$ (tout partie fermé borné)

• Continuité de la fonction somme

Soit $\sum a_n z^n$ tel que $R \neq 0$ alors $\overbrace{S(z)}^{\text{la somme de la série}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une fonction continue sur I (ou sur D si on travaille dans $\mathbb{C}$)

• Intégration de la fonction somme

Soit $\sum a_n z^n$ tel que $R > 0$ si $[a,b] \subset I$, alors

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$$

Remarque

la fonction somme S de la série $\sum a_n x^n$ est continue sur I, et ses primitives sont de la forme $x \longmapsto \alpha + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$

• Dérivation de la fonction somme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière tel que $R > 0$, alors sa fonction somme définie sur I est de classe C^1 et sa dérivé S' est la fct somme de la série entière dérivée, càd:

$$\forall x \in I =]-R, R[\,,\quad S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

En générale

la fonction somme S est de classe C^∞ sur I, et on a $(R > 0)$

$(\forall K \in \mathbb{N})$ $(\forall x \in I =]-R, R[)$ on a

$$S^{(K)}(x) = \sum_{n=K}^{+\infty} \frac{n!}{(n-K)!} a_n x^{n-K} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+K)!}{n!} a_{n+K} x^n$$

en particulier $(\forall K \in \mathbb{N})$

$$a_K = \frac{S^{(K)}(0)}{K!}$$

• Fonction développable en série entière (DSE)

• soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, f est développable en série entière en 0, si il existe une série entière $\sum a_n x^n$ $(R > 0)$ et un nombre $r \in]0, R]$ avec $]-r, r[\subset I$ $(I \subset \mathbb{R})$ tel que: $\forall x \in]-r, r[$ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

• $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est développable en série entière en un point x_0 si la fonction $x \longmapsto f(x - x_0)$ développable en série entière en 0: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$

Série entière classique

Fonction	developpement en série entière	intervalle de validité de DSE
$x \longmapsto e^{x}$	$\sum_{K=0}^{+\infty} \frac{x^K}{K!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \operatorname{ch} x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \operatorname{sh} x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto (1+x)^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{N})$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$]-1, 1[$
$x \longmapsto \frac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$	$]-1, 1[$
$x \longmapsto \frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$	$]-1, 1[$
$x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots$	$]-1, 1[$
$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$	$]-1, 1[$
$x \longmapsto \ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$	$]-1, 1[$
$x \longmapsto \ln(1-x)$	$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$]-1, 1[$

Exercice 1: Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. On suppose qu'elle diverge pour $z = 3 + 4i$ et qu'elle converge pour $z = 5i$. Quel est son rayon de convergence ?.

Exercice 2: Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$f_1(z) = \sum_{n\geq 0} n^n z^n; \quad f_2(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n; \quad f_3(z) = \sum_{n\geq 1} d(n) z^n;$$

$$f_4(z) = \sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n; \quad f_5(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n} z^n; \quad f_6(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(z+1)^n}{n};$$

$$f_7(z) = \sum_{n\geq 1} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) z^n; \quad f_8(z) = \sum_{n\geq 0} z^{E(n^{3/2})}; \quad f_9(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1}.$$

NB : $E(x)$ désigne la partie entière de x et $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n.

Exercice 3:

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Etudier la convergence en $-R$ et en R.

Exercice 4:

Calculer le rayon de convergence et déterminer la somme de la série entière suivante :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2 - n + 4}{n+1} x^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

Exercice 5: (D'après PT 2008) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$y' = xy + 1 \quad y(0) = 0.$$

Soit $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière à coefficients réels, de rayon de convergence $R > 0$. On suppose que la fonction F est solution de l'équation différentielle sur $]-R, R[$.

1. Déterminer a_0, a_1 ainsi qu'une relation de récurrence reliant, pour tout entier $n \geqslant 1$, a_{n+1} à a_{n-1}.
2. Pour tout entier naturel $p \geqslant 0$, en déduire la valeur de a_{2p}. Déterminer R.
3. Exprimer, pour tout entier naturel $p \geqslant 0$, a_{2p+1}.
4. Quelle est la fonction F obtenue ?

Exercice 6: On considère la série complexe de somme

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$$

Où les a_n sont définis par :

$$a_0 = 1, a_1 = 3, \text{ et } \quad \forall n \geq 2 \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

1. Montrer que $R \geq \frac{1}{4}$.
2. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R$
$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$
3. En déduire la valeur de, R, ainsi que l'expression de a_n en fonction de n.

Serie 3

Exercice 1

la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est $\begin{cases} \text{converge si } z = 5i \; ① \\ \text{diverge si } z = 3+4i \; ② \end{cases}$

① $\Rightarrow |z| \leq R$ càd $|5i| = 5 \leq R$

② $\Rightarrow |z| \geq R$ càd $|z| = |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \geq R$

donc $|z| \geq 5$ et $|z| \leq 5$ d'où $R = 5$

Exercice 2

* Déterminons le rayon de convergence.

* $f_1(z) = \sum_{n\geq 0} n^n z^n$

posons $a_n = n^n$, et on $\sqrt[n]{|a_n|} = |a_n|^{\frac{1}{n}} = |n^n|^{\frac{1}{n}} = n$ et

$L = \lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

donc d'après la règle de cauchy on a $R_1 = \frac{1}{L} = 0$

cette série converge si et seulement si $z = 0$ (cv en un point)

* $f_2(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n$

posons $a_n = \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}$ et on a donc $a_{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}$

on a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} \times \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right| \underset{+\infty}{\sim} \left|\frac{\ln(n)}{\ln(n)} \times \frac{\ln(n)}{\ln(n)}\right| = 1$

car $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

donc $L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ d'où d'après la règle d'Alembert

$R_2 = \frac{1}{L} \Rightarrow R_2 = 1$

autre méthode

on a $a_n = \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\ln(n)} = 1 = b_n$

donc $a_n \sim b_n$ donc $R_a = R_b$

et on a $\sum_{n\geq 1} b_n z^n = \sum_{n\geq 1} 1 z^n = \sum_{n\geq 1} z^n$ à pour rayon de convergente 1 car d'après la règle d'Alembert $b_n = 1$
$b_{n+1} = 1 \Rightarrow \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = 1$ d'où $R_b = 1$

d'où
$$R_a = R_b = 1$$

* $f_3(z) = \sum_{n\geq 1} d(n) z^n$

avec $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n.

on sait que $1 \leq d(n) \leq n$.

et on a la série $\sum_{n\geq 1} 1 z^n$ à pour rayon de convergence $R = 1$ donc $R \leq 1$ (car $\underbrace{1}_{|a_n|} \leq \underbrace{d(n)}_{|b_n|}$ donc $R_a \geq R_b$ où $R_a = 1$)

de même on a

la série $\sum_{n\geq 1} n z^n$ à pour rayon de convergence 1 car d'après la règle d'Alember on a $a_n = n$ donc $a_{n+1} = n+1$
alors $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n+1}{n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ d'où $R = 1$ donc $R \geq 1$
(puisque $\underbrace{d(n)}_{|b_n|} \leq \underbrace{n}_{|a_n|}$ donc $R_b \geq R_a$ avec $R_a = 1$)

donc
$$1 \leq R \text{ et } 1 \geq R \text{ d'où } R = 1$$

* $f_4(z) = \sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^{n^3}$

posons $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$

on a $|a_n|^{\frac{1}{n}} = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e^{n\left(\frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$
$\underset{+\infty}{\sim} e^{(-1)^n + o(1)}$

car $n\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = n\left(\frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (-1)^n + o(1)$

la quantité $e^{(-1)^n + o(1)}$ n'admet pas de limite, de ce fait on va étudier les deux cas de n

* si n est paire c-à-d $n = 2n$ on a
$\lim_{n\to+\infty} |a_{2n}|^{\frac{1}{n}} = \left|\left(1 + \frac{(-1)^{2n}}{2n}\right)^{4n^2}\right|^{\frac{1}{n}} = e^{(-1)^{2n} + o(1)} = e$ d'où $R = \frac{1}{e}$

Scanné avec CamScanner

* si n est impair càd $n=2n+1$ on a

$$\lim_{n\to+\infty}|a_{2n+1}|^{\frac{1}{n}}=\lim_{+\infty} e^{(-1)^{n+1}+o(1)} = e^{-1} \text{ donc } R=\frac{1}{e^{-1}}=e$$

donc on a $f_4(z)=\sum_{n\geq1}\left(1+\frac{(-1)^{2n}}{2n}\right)^{(2n)^e} z^n+\sum_{n\geq1}\left(1+\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right)^{(2n+1)^e} z^n$

càd

$$f_4(z)=\sum_{n\geq1}\left[\underbrace{\left(1+\frac{(-1)^{2n}}{2n}\right)^{(2n)^e}}_{a_n}+\underbrace{\left(1+\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right)}_{b_n}\right]z^n$$

$$=\sum_{n\geq1}(a_n+b_n)z^n$$

or d'après la somme de deux série entière on a

$$R_4=\inf(R_a,R_b)=\inf\left(\frac{1}{e},e\right)=\frac{1}{e}=e^{-1} \text{ (car } R_a\neq R_b)$$

(on peut utiliser Formule de Hadamard)

* $f_5(z)=\sum_{n\geq1}\frac{\sin(n)}{n}z^n$

posons $a_n=\frac{\sin(n)}{n}$

$|a_n| \to \left|\frac{\sin(n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \leftarrow |b_n|$

on a $f_5'(z)=\sum_{n\geq1} n\frac{\sin(n)}{n}z^{n-1} = \sum_{n\geq1}\sin(n)z^{n-1}$

donc $f_5'(z)=\sum_{n\geq0}\sin(n+1)z^n$

avec la série $\sum\frac{1}{n}z^n$ a pour rayon de CV 1 donc $R_5\geq1$

or on a $(\forall n\in\mathbb{N})\ \underbrace{|\sin(n+1)|}_{|a_n|}\leq\underbrace{|1|}_{|b_n|}$

et puisque la série $\sum_{n\geq0}1z^n$ a pour rayon de convergence $R_b=1$ (d'après la règle d'Alembert) d'où $R_a=R\geq1$ d'après la comparaison de deux série

En d'autre part, si $z=1$, alors la série $\sum_{n\geq0}\sin(n+1)$ diverge car $\sin(n+1)\ \underset{n\not\to+\infty}{\not\longrightarrow}\ 0$ (n'admet pas de lim) donc $|z|=|1|\geq R$

d'où $R\leq1$ et $R\geq1 \Rightarrow R=1$

donc la série dérivé $f_5'(x)=\sum_{n\geq0}\sin(n+1)z^n$ a pour rayon de convergence $R=1$, et puisque une série et sa dérivé ont même rayon de convergence alors $R_5=1$

* $f_6(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(z+1)^n}{n}$

posons $Z = z+1$ d'où $f_6(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{Z^n}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} Z^n$

posons $a_n = \frac{1}{n}$

On a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}$ d'après Alembert on a.

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = 1$$

d'où $R = 1$

donc

* si $|Z| < R = 1$ alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} Z^n$ converge

$\Rightarrow$ si $|z+1| < 1$ alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(z+1)^n}{n}$ converge

donc pour $-2 < z < 0$ la série $f_6(z)$ converge si non la série diverge, donc le rayon de convergence est $R_6 = -1$ (le milieu de l'intervalle $[-2, 0[$, de plus pour $z = -2$ $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ CV)

* $f_7(z) = \sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) z^n$

posons

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

et on a

$$a_{n+1} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}_{a_n} + \frac{1}{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1}$$

donc on a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{a_n + \frac{1}{n+1}}{a_n}\right| = 1 + \frac{1}{a_n(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty \text{ (diverge)}$$

(série de Rieman avec $\alpha = 1$ (série harmonique))

d'où d'après la règle d'Alembert $R_7 = 1$

$$* \ f_8(z) = \sum_{n\geq 0} z^{E(n^{3/2})}$$

On cherche a_n à partir des termes de f_8

Si $n=0 \Rightarrow E(0)=0$ donc z^0 càd $a_0=1$

Si $n=1 \Rightarrow E(1^{\frac{3}{2}})=1$ donc z^1 càd $a_1=1$.

Si $n=2 \Rightarrow E(2^{3/2})=E(2,8)=2$ donc z^2 càd $a_2=1$

Si $n=3 \Rightarrow E(3^{3/2})=E(5,19)=5$ donc z^5 càd $a_3=1$...

$\Rightarrow a_0z^0+a_1z^1+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+a_5z^5+\dots$

$\Rightarrow 1z^0+1z^1+1z^2+0z^3+0z^4+1z^5+\dots$

posons $A=\{E(n^{3/2}) \ / n\in \mathbb{N}\}$ et $A\subset \mathbb{N}$

On a donc

$$a_n=\begin{cases}1 & \text{si } n\in A\\ 0 & \text{si } n\notin A\end{cases} \Rightarrow |a_n|\leq 1$$

avec

$$\sum_{n\geq 0} z^{E(n^{3/2})} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

donc

$|a_n| \leq \underbrace{1}_{|b_n|} \Rightarrow R_a = R_8 \geq \underbrace{1}_{R_b}$ car $\sum_{n\geq 0} 1z^n$ à pour rayon de convergence $R_b=1$

de plus pour $z=1$ on a $\sum_{n\geq 0} a_n = \sum 1^{E(n^{3/2})}$

diverge car a_n ne converge pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ donc $R_8\leq |z|=1$

d'où $R_8=1$

$$* \ f_9(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1}$$

On fixe z

soit $z_0\in\mathbb{C}^*$ (fixé)

posons $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1} z_0^{2n+1}$

On a

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+2} z_0^{2n+3} \times \frac{n+1}{(-1)^n z^{2n+1}}\right|$$

$$= \left|\frac{(-1)(n+1) z_0^2}{n+2}\right| = \left|\frac{(n+1) z_0^2}{(n+2)}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |z_0|^2$$

donc d'après la règle d'Alembert pour les série numérique

On a
- si $|z_0^2| < 1 \Rightarrow |z_0| < 1$ alors la série $\sum U_n$ CV
- si $|z_0^2| > 1 \Rightarrow |z_0| > 1$ alors la série $\sum U_n$ diverge

ceci est vrai $\forall z_0 \in \mathbb{C}^*$

finalement par définition de rayon de convergence $R_g = 1$

Rappel : règle d'Alembert pour les série numérique

Soit $\sum_n U_n$ une série réelle telle que :
- $\exists N_0 \geq 0$ tel que $\forall n \geq N_0$, $U_n \neq 0$ ($N_0 \in \mathbb{N}$)
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = K$

alors
- $K < 1 \Rightarrow \sum_n |U_n|$ converge
- $K > 1 \Rightarrow \sum_n |U_n|$ diverge
- $K = 1$ on ne peut rien en conclure.

Exercice 3

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$$

1) determinons le rayon de convergence R

posons $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ $\qquad \sin(x) \underset{0}{\sim} x$ car $\lim\limits_{0} \frac{\sin x}{x} = 1$

On a $\overbrace{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}^{|a_n|} \underset{+\infty}{\sim} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{|b_n|}$

or la série

$\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ a pour rayon de convergence 1 car d'après

alembert $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \times \sqrt{n} = 1$ d'où $R = 1$

2) Etudions la convergence en $-R$ et en R

* **Pour $x = R = 1$**, on a la série $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge

en effet $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$

or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ diverge (série de Rieman $\alpha = \frac{1}{2} < 1$)

* **Pour $x = -R = -1$**, on a la série $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(-1)^n$

en effet, il s'agit d'une série alternée

posons $V_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$ car $x \longmapsto \sin(x)$ positif sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

et on a $\sqrt{n} \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ et puisque la fonction

$x \longrightarrow \sin(x)$ est croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ alors

$\sin(0) < \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow V_n \geq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

et on a $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\pi}{2}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ la fonction

$x \longmapsto \sin(x)$ est croissante donc $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

càd $V_{n+1} < V_n$ d'où V_n est décroissante

de plus $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la fonction

$x \longmapsto \sin(x)$ continue en 0 avec $\sin(0) = 0$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } V_n \geq 0 \\ V_n \text{ est décroissante} \end{array}\right. \Rightarrow \sum_{n\geq 1} (-1)^n V_n \text{ converge}$$

Exercice 4

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2 - n + 4}{n+1} x^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

* **Calculons le rayon de convergence R**

on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - n + 4}{n+1} \times \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$

d'où $\frac{n^2 - n + 4}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} n$

or la série $\sum_{n\geq 0} n x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$ (d'après la règle d'Alembert $\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$)

d'où $R = 1$

* déterminons la somme de la série

On a

$$\begin{array}{r|l} n^2 - n + 4 & n+1 \\ -\ \ n^2 + n \quad & \\ \hline -2n + 4 & n-2 \\ -\ \ -2n + 2 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

d'où $n^2 - n + 4 = (n+1)(n-2)+6$

$\frac{n^2-n+4}{n+1} = n + a + \frac{b}{n+1}$

$= \frac{n^2 + n(a+1) + b + a}{n+1}$

donc $a = -1$ et $b = 6$

$S(x)$ converge si et seulement si $|x| < R = 1$

(càd x appartient à l'intervalle de convergence $]-1, 1[$)

donc $\forall |x| < 1$

* Pour $x = 0$ on a $S(x) = 0$

* Pour $x \neq 0$ on a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-n+4}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n-2)+6}{n+1} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n-2) + \frac{6}{n+1}\right] x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n - 2 \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n} + 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

$$= x \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}} - 2 \frac{1}{1-x} + \frac{6}{x} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

$$= x \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{2}{1-x} + \frac{6}{x}\left[-\ln|1-x|\right] \quad \forall |x| < 1 \ (1-x > 0)$$

d'où

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{3x-2}{(1-x)^2} - \frac{6\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \in]-1, 1[\setminus \{0\} \end{cases}$$

Exercice 6

On considère la série complexe de somme

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$$

où

$$a_0 = 1, \ a_1 = 3 \text{ et } (\forall n \geq 2) \ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

1) Montrons que $R \geq \frac{1}{4}$

pour ce faire Il suffit de trouver une suite b_n ($|b_n| \geq |a_n|$) de rayon de convergence $R_b = \frac{1}{4}$ (càd $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$ ou bien $|b_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$)

prenons $b_n = 4^n$ et montrons par réccurrence que $(\forall n \geq 0)$ $|a_n| \leq 4^n$

$|a-b| < |a| + |b|$

pour $n = 0$ on a $a_0 = 1 \leq 4^0 = 1$

pour $n = 1$ on a $a_1 = 3 \leq 4^1 = 4$

supposons que $|a_n| \leq 4^n$ et montrons que $|a_{n+1}| \leq 4^{n+1}$

on a
$$|a_{n+1}| = |3a_n - 2a_{n-1}| \leq |3a_n| + |-2a_{n-1}|$$

$$\Rightarrow |a_{n+1}| \leq 3|a_n| + 2|a_{n-1}|$$

$$\Rightarrow |a_{n+1}| \leq 3\,4^n + 2\,4^{n-1}$$ car $|a_n| < 4^n$ et $|a_{n+1}| \leq 4^{n+1}$

$$\Rightarrow |a_{n+1}| \leq 4^{n-1}((3\times 4) + 2) = 14 \times 4^{n-1}$$

or on a
$$16 = 4^2 > 14$$

donc
$$14 \times 4^{n-1} < 4^2 \times 4^{n-1} = 4^{n+1}$$

d'où $|a_{n+1}| < 4^{n+1}$

par suite et d'après le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|a_n| \leq \overbrace{4^n}^{|b_n|}$

or la série $\sum_{n\geq 0} 4^n z^n$ a pour rayon de convergence $R_b = \frac{1}{4}$

(car d'après la règle de cauchy $|b_n|^{\frac{1}{n}} = |4^n|^{\frac{1}{n}} = 4 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$)

d'où $R = R_a \geq \frac{1}{4}$

2) Montrons que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$

on a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

donc

$$f(z) = a_0 z^0 + a_1 z^1 + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$$

$$\Rightarrow f(z) = 1 + 3z + \sum_{n=2}^{+\infty} (3a_{n-1} - 2a_{n-2}) z^n$$

$$= 1 + 3z + 3\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} z^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} z^n$$

$$= 1 + 3z + 3z \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} z^{n-1} - 2z^2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} z^{n-2}$$

$$= 1 + 3z\left(\underbrace{1}_{} + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} z^{n-1}\right) - 2z^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n}_{}$$

$$= 1 + 3z\left(\underbrace{a_0 z^0}_{} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n\right) - 2z^2 \underbrace{f(z)}_{}$$

$$= 1 + 3z \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n - 2z^2 f(z) = 1 + 3z f(z) - 2z^2 f(z)$$

donc

$$f(z) - 3z f(z) + 2z^2 f(z) = 1$$

$$f(z)\left[1 - 3z + 2z^2\right] = 1$$

d'où

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R \text{ on a } f(z) = \frac{1}{1 - 3z + 2z^2}$$

3) En déduire la valeur de R ainsi que l'expression de a_n en fonction de n

* posons $P(z) = 2z^2 - 3z + 1$

on a $\Delta = (-3)^2 - (4 \times 2 \times 1) = 9 - 8 = 1$

donc $z_1 = \frac{3+1}{4} = 1$ et $z_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$

d'où

$$P(z) = 2(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right) = (z-1)(2z-1)$$

donc $f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1} = \frac{a}{(z-1)} + \frac{b}{(2z-1)} \quad (\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R)$

on multiple par $(z-1)$ et on prend $z = 1$ on obtient $a = 1$

de même on multiple par $(2z-1)$ et on prend $z = \frac{1}{2}$ on obtient $b = -2$ d'où $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{2z-1} \quad (\forall |z| < R)$

On a

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{2z-1} = \frac{-1}{1-z} + \frac{2}{1-2z}$$

$$= (-1)\cdot\sum_{n=0}^{+\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(2z)^n \qquad \left(\text{car } \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \ \forall z \in]-1,1[\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1 + 2^{n+1}\right) z^n$$

d'où $a_n = -1 + 2^{n+1}$

* On a $a_n = -1 + 2^{n+1} \Longrightarrow a_{n+1} = -1 + 2^{n+2}$

donc $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n+2-n-1} = 2$

d'où $R = \frac{1}{2}$

autre methode

On a $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$

$$f(z) = (-1)\sum_{n=0}^{+\infty} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{2^{n+1}}_{b_n} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1 + 2^{n+1}\right)z^n$$

or la série $\sum_{n\geq 0} z^n$ a pour rayon de convergence $R_a = 1$

et la serie $\sum_{n\geq 0} 2^{n+1} z^n$ a pour rayon de convergence $R_b = \frac{1}{2}$

(car d'après cauchy on a $|b_n|^{\frac{1}{n}} = \left|2^{n+1}\right|^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1+n}{n}\ln(2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$)

donc d'après la somme de deux série entière on a

$R = \inf(R_a, R_b) = \inf\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ avec $R_a \neq R_b$

Exercice 5

$$y' = xy + 1 \quad \text{avec } y(0) = 0$$

soit $F(x) = \sum a_n x^n$ une série entière à coefficients réels, de rayon de convergence $R > 0$, on suppose que la fonction $F(x)$ est solution de l'équation différentielle sur $]-R, R[$

1) Déterminons a_0, a_1 ainsi qu'une relation de récurrence reliant, pour tout entier $n \geq 1$, a_{n+1} à a_{n-1}

F est une solution de l'équation (E) : $y' = xy + 1$ donc
$F(0) = 0$ et $F'(x) - xF(x) = 1$ et on a

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

$$F(0) = 0 \Longrightarrow a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 0^n = 0 \Rightarrow a_0 + 0 = 0$$

d'où $a_0 = 0$

d'autre part on a : $F'(x) - xF(x) = 1$ ($F(x)$ solution de (E))

et on a $$F'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

de plus $$xF(x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n$$

donc l'équation (E) devient :

$$F'(x) - xF(x) = 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = 1$$

$$\Longrightarrow a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = 1$$

$$\Longrightarrow a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+1) a_{n+1} - a_{n-1}\right] x^n = 1 = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} 0 x^n}_{=0}$$

par analogie on obtient

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad (n+1) a_{n+1} - a_{n-1} = 0$$

donc

$R = +\infty$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \text{ et } a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} a_{n-1} \ (\forall n \geq 1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \text{ et } a_1 = 1 \\ a_n = \dfrac{1}{n} a_{n-2} \end{cases}$$

2) $(\forall p \geq 0)$ $(p \in \mathbb{N})$, en déduire la valeur de a_{2p}. Déterminons R

si $n = 2p$ on a $a_{2p} = 0$ en effet (n est paire)

$a_{2p} = \dfrac{1}{2p} a_{2p-2}$ donc $a_0 = 0$ (Pour $p = 0$)

$a_2 = \dfrac{1}{2} a_0 = \dfrac{1}{2} \times 0 = 0$ (Pour $p = 1$)

$a_4 = \dfrac{1}{4} a_2 = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} a_0 = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} \times 0 = 0$ (Pour $p = 2$)

$a_6 = \dfrac{1}{6} a_4 = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} \times a_0 = 0$ (Pour $p = 3$)

d'où $a_{2p} = \dfrac{1}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p} a_0 = 0$ $(a_0 = 0)$

On a $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_{n-1} \quad \forall n \geq 1$

donc $\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}\right| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (d'après Alembert)

en effet $a_{2p} = 0$ d'où $R = +\infty$

3) Exprimons $(\forall p \geq 0)$ $(p \in \mathbb{N})$ a_{2p+1} (n impaire)

On a

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-2}$$ pour $n = 2p+1$ on obtient:

$$a_{2p+1} = \frac{1}{2p+1} a_{2p-1}$$

On a

Pour $P = 0$ $\quad a_1 = 1 = \frac{1}{1}$

Pour $P = 1$ $\quad a_3 = \frac{1}{3} a_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1}$

Pour $P = 2$ $\quad a_5 = \frac{1}{5} a_3 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{1}$

Pour $P = 3$ $\quad a_7 = \frac{1}{7} a_5 = \frac{1}{7} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{1}$

donc en générale

$$a_{2p+1} = \frac{1}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2p+1)}$$

4) Quelle est la fonction F obtenue

On a $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p}}_{=0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1}$

$a_{2p} = 0$ d'où

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2p+1)} x^{2p+1}$$

Scanné avec CamScanner

Série de Fourier

Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition

f périodique si

$\exists T > 0$ (la période) tq $(\forall x \in D_f)$
- $(x+T) \in D_f$ et $(x-T) \in D_f$
- $f(x+T) = f(x)$

f paire si

- $(\forall x \in D_f), (-x) \in D_f$
- $f(-x) = f(x)$

f impaire si

- $(\forall x \in D_f), (-x) \in D_f$
- $f(-x) = -f(x)$

* Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction T-périodique continue par morceaux, alors $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$ on : $\int_0^T \varphi(t)\,dt = \int_\alpha^{\alpha+T} \varphi(t)\,dt$ $\quad (T - 0 = (\alpha+T) - T = T)$

$\Longrightarrow$ tant que on calcul sur un intervalle d'intégration de longeur T le résultat ne change pas

$$A = \int_0^T \varphi(t)\,dt$$

si φ est impaire alors

$$A = 0$$

si φ est paire alors

$$A = \int_0^T \varphi(t)\,dt = 2\int_0^{\frac{T}{2}} \varphi(t)\,dt$$

* **Série trigonométrique**

Une série trigonométrique et tout série de fonction $\sum f_n(x)$ tq

$$\sum f_n(x) = \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)} = \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} C_n e^{inx}}_{\text{forme exponentielle}}$$

avec $(\forall n \in \mathbb{N})$:

$$a_n = C_n + C_{-n} \quad , \quad b_n = i(C_n - C_{-n})$$

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad , \quad C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

* $\sum |C_n|$ et $\sum |C_{-n}|$ CV $\Longleftrightarrow$ $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ CV

* $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ CV $\Longrightarrow$ $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ CN donc CU sur $\mathbb{R}$

* $\sum |C_n|$ et $\sum |C_{-n}|$ CV $\Longrightarrow$ $\sum_{n \in \mathbb{N}} C_n e^{inx}$ CN donc CU sur $\mathbb{R}$

• Série de Fourier

$$SF(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx) \right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} C_n(f) e^{inx}$$

avec f une fonction 2π-périodique et localement intégrable donc

$(\forall n \in \mathbb{N})$ on a $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

$(\forall n \in \mathbb{Z})$ $C_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\,dx$

* $a_n(f)$ et $b_n(f)$: coefficient de Fourier trigonométrique de f
* $C_n(f)$: coefficient de Fourier exponentiels de f.

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ $(\forall n \geq 0)$

On a

si f est paire
- $b_n(f) = 0$
- $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$

si f est impaire
- $a_n(f) = 0$
- $b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)$

dans les définition de a_n, b_n et C_n on peut remplacer l'intervalle $[0, 2\pi]$ par n'importe quel intervalle de longeur 2π

• Formule de Perseval

f une fonction 2π-périodique et intégrable, alors:

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx$$

• Théorème de Dirichlet

$$\begin{cases} \cdot f \text{ une fonction } 2\pi\text{-périodique} \\ \cdot f \text{ de classe } C^1 \text{ par morceaux} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cdot \forall x \text{ où } f \text{ continue } SF(f)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f(x) \\ \cdot SF(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} \dfrac{f(x^+) - f(x^-)}{2} \text{ sur } \mathbb{R} \\ \quad \text{si } f \text{ discontinue en } x \end{cases}$$

$f(x^-)$: limite à gauche de x et $f(x^+)$: limite à droite de x

f continue en $x \Longrightarrow f(x^-) = f(x^+) = f(x)$

• Théorème de la CN

$$\begin{cases} \cdot f \ 2\pi\text{-périodique} \\ \cdot f \text{ de } C^1 \text{ par morceaux sur } [0, 2\pi] \\ \cdot f \text{ continue sur } \mathbb{R} \end{cases} \Longrightarrow SF(f)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{CN \text{ (donc CU)}} f \text{ sur } \mathbb{R}$$

Exercice 1:

Soit f une fonction 2π-périodique, impaire et vérifiant :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in]0, \pi[; \\ f(0) = f(\pi) = 0 \end{cases}$$

1. Calculer la série de Fourier de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
4. A l'aide de l'égalité de Parseval, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2:

On définit une fonction f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in]-\pi, \pi[; \\ f(-\pi) = f(\pi) = 0 \end{cases}$$

1. Former le développement en série de Fourier de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
3. A l'aide de l'égalité de Parseval, calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
4. On définit g, 2π-périodique, par par $g(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ sur $]0, 2\pi[$ et $g(0) = g(2\pi) = 0$. Déduire de la question (1) le développement en série de Fourier de g.

Exercice 3: cours

On définit une fonction f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, par $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = |x|$.

1. Former le développement en série de Fourier de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
3. En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
4. Avec l'identité de Parseval, calculer les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 4: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = (x - \pi)^2, \quad x \in [0, 2\pi[.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
3. En déduire les sommes des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 5:

Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et considérons la fonction 2π-périodique f définie pour tout $t \in [-\pi, \pi]$ par $f(t) = \cos \alpha t$.

1. Montrer que f admet une série de Fourier convergente sur R. Préciser le type de convergence
2. Expliciter les coefficients de Fourier de f puis déterminer la série de Fourier associée à f.
3. Établir le développement eulérien

$$\forall u \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}, \quad \operatorname{cotan} u = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2}$$

Exercice 6: (Facultatif) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f.
2. étudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de f.
3. En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

$n=0$ $\quad$ $p+1$ $\qquad\qquad$ $n=0$ $\quad 1\times3\times5\times7\times\ldots\times(2p+1)$

Série 4

Exercice 1

f une fonction 2π-périodique impaire vérifiant :

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in\,]0,\pi[\\ f(0)=f(\pi)=0 \end{cases}$$

1) calculons la série de Fourier de f

On a f est impaire alors $(\forall n \geq 0)$ $a_n = 0$ et $(\forall n \geq 1)$ On a

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

et puisque la fonction $x \longrightarrow f(x)\sin(nx)$ est paire (car $x \longrightarrow f(x)$ et la fonction $x \longrightarrow \sin(nx)$ sont impaire)

alors

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx \quad \left(\begin{array}{l} f(x)=1 \\ \text{sur }]0,\pi[\end{array}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{-2}{n\pi}\left(\cos(\pi x) - \cos(0)\right)$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \frac{2}{n\pi}\left((-1)^{n+1} + 1\right)$$

* Si n est pair $(n = 2p)$ on a

$$b_{2p} = \frac{2}{2p \times \pi}(-1+1) = 0$$

Etude de la continuité de f on utilise → les limite (Etude analytique)
→ la représentation graphique.

* Si n est impair $(n = 2p+1)$ On a

$$b_{2p+1} = \frac{2}{(2p+1)\pi}(1+1) = \frac{4}{(2p+1)\pi}$$

finalement

$$SF(f)(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{=0} + \sum_{n\geq 1}\left(\underbrace{a_n}_{=0}\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

$$= \sum_{n\geq 1} b_n \sin(nx) = \sum_{p\geq 0} b_{2p+1}\sin((2p+1)x) \quad (b_{2p} = 0)$$

$$= \sum_{p\geq 0}\frac{4}{(2p+1)\pi}\sin((2p+1)x)$$

2) Etudions la convergence de la série de Fourier de f

On a f est une fonction 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$ (tout intervalle de longueur 2π)

• Etudions la continuité de f sur $\mathbb{R}$

méthode 1 : analytique (utilisation des limite)

On a $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$ donc f est discontinue en 0

par suit f est discontinue sur $\mathbb{R}$

finalement, d'après théorème de Dirichlet

On a $SF(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{CS} \dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$ (Pour les points de discontinuité de f)

* sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi\mathbb{Z}\}$: $(\pi\mathbb{Z} = \{K\pi \,/\, K \in \mathbb{Z}\})$ f est continue

alors $SF(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{CS} f$ (f continue $\Rightarrow f(x^+) = f(x^-) = f(x)$)

(f continue sur tout intervalle de la forme $]K\pi, (K+1)\pi[$ tel que $K \in \mathbb{Z}$)

* Pour tout $x \in \pi\mathbb{Z}$, f est discontinue alors

$SF(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{CS} \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = 0$ car

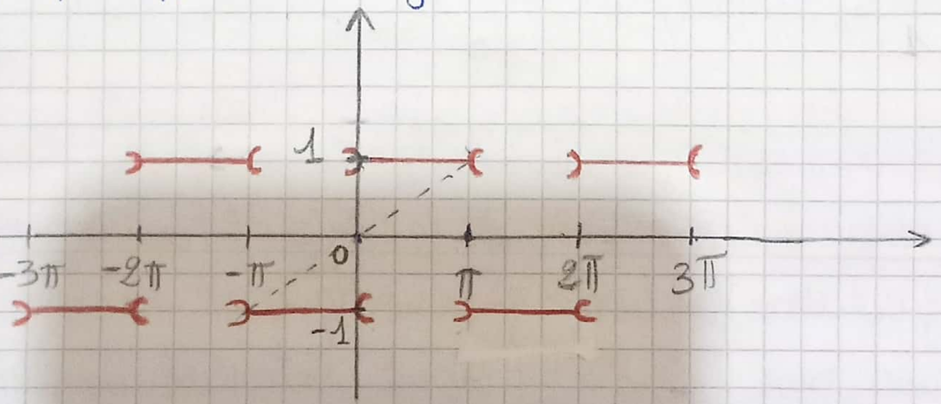
Pour $t = \pi$ on a $f(\pi^+) = \lim_{x \to \pi^+} f(x) = -1$

et $f(\pi^-) = \lim_{x \to \pi^-} f(x) = 1$ d'où $\dfrac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2} = 0$

$$SF(f) \text{ CS Vers} \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]K\pi, (K+1)\pi[\\ 0 & \text{si } x = K\pi \end{cases} \quad (K \in \mathbb{Z})$$

méthode 2. représentation graphique

la fonction f est 2π-périodique est impaire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'origine



Il claire que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

f est continue sur les intervalle de la forme $]K\pi, (K+1)\pi[$ tq $K \in \mathbb{Z}$

et discontinue sur les point $0, \pi, 2\pi, 3\pi, -3\pi, -2\pi, -\pi, \ldots$

en générale sur les points $K\pi$ tel que $K \in \mathbb{Z}$. d'où le résultat

3) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ — dérivable ⇒ continue

On a

$$SF(f)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)} \sin((2n+1)x)$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$ on obtient. $SF(f)(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \sin(\frac{\pi}{2}(2n+1))$

or d'après la question 2)

On a f est continue sur tout intervalle $]K\pi, (K+1)\pi[$ tq $K \in \mathbb{Z}$

en particulier f est continue sur $]0, \pi[$ et $\frac{\pi}{2} \in]0, \pi[$ donc f est continue en $\frac{\pi}{2}$ càd $f(\frac{\pi}{2}) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 1 = 1$

de plus $SF(f)(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{CS} f$ sur $]0, \pi[$ $(\forall x \in]0, \pi[)$

donc

$$SF(f)(\frac{\pi}{2}) \xrightarrow[n \to +\infty]{CS} f(\frac{\pi}{2}) \text{ càd } \lim_{n \to +\infty} SF(f)(x) = f(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(\frac{\pi}{2}(2n+1)) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} (-1)^n = 1 \quad \text{d'où} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

4) à l'aide de l'égalité de Parseval, calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ — puis $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ —

continue ⇒ intégrable

On a f est 2π-périodique et intégrable (car f continue sur $]0, \pi[$)

donc d'après l'égalité de Parseval on a :

$$\underbrace{\frac{|a_0|^2}{2}}_{=0} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\underbrace{|a_n|^2}_{=0} + |b_n|^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |b_{2n+1}|^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \, dx$$

$$\Rightarrow \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{2}{\pi} [x]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(\pi - 0) = 2$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{2\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{8}$$

* On pose $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ donc on a.

$$A=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$

$$A=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\implies A=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}A$$

$$\implies A-\frac{1}{4}A=\frac{\pi^2}{8}\implies A\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi^2}{8}\implies\frac{3}{4}A=\frac{\pi^2}{8}$$

d'où $$A=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 2

on définit une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\in]-\pi,\pi[\\ f(-\pi)=f(\pi)=0\end{cases}$$

1) Former le développement en série de Fourier de f

Il est claire que f est impaire car on a $D_f=\mathbb{R}$ (polynome) $\forall x\in D_f$ on a $-x\in D_f$ et $f(-x)=-x=-f(x)$ alors $(\forall n\geq 0)$: $a_n=0$ et $\forall n\geq 1$ on a $b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin(nx)\,dx$ et puisque la fonction $x\longrightarrow f(x)\sin(nx)$ est paire (car les deux fonction sont impaire) alors

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin(nx)\,dx$$

à l'aide de l'intégration par partie on pose :

$$\begin{cases}u(x)=x\\ v'(x)=\sin(nx)\end{cases}\implies\begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=\frac{-1}{n}\cos(nx)\end{cases}$$

donc $$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{-x}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{-1}{n}\cos(nx)\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi}{n}(-1)^n+0+\frac{1}{n}\underbrace{\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0}\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}\text{ donc }\quad b_n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

finalement

$SF(f)(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin(nx)$

2) Etude de la convergence de la série de Fourier de f

f est 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$ (sur tout intervalle de longueur 2π) (f est un polynome)

• Etude de la continuité de f

méthode 1 : analytique

on a $\lim_{x \to (-\pi)^+} f(x) = -\pi \neq f(-\pi) = 0$ donc f est discontinue en $(-\pi)$ d'où f est discontinue sur $\mathbb{R}$

* sur $\{(2K+1)\pi \mid K \in \mathbb{Z}\}$ f est discontinue alors

$$SF(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{CS} \frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \frac{\pi - \pi}{2} = 0$$

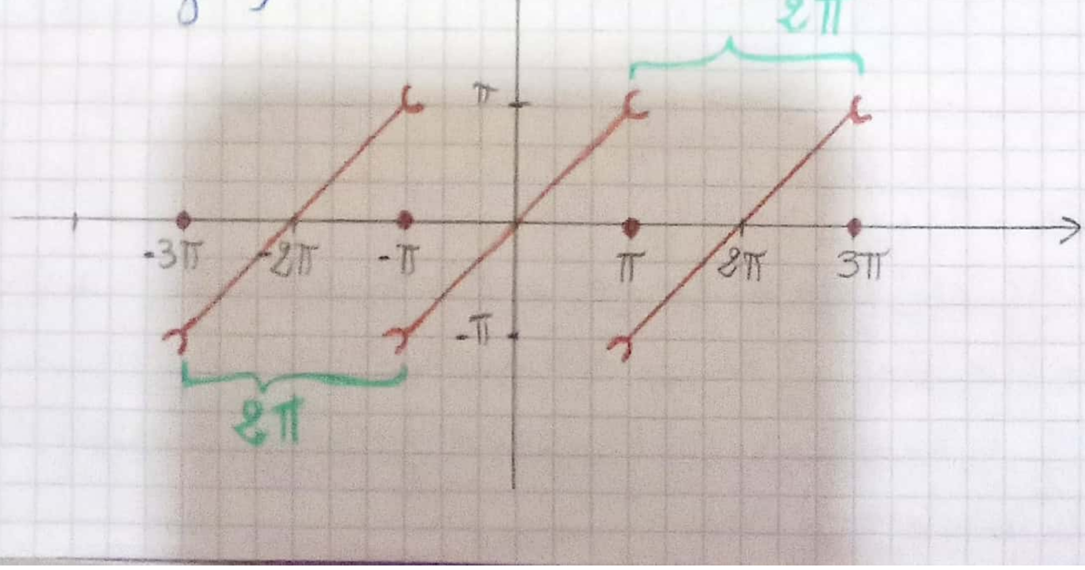
* sur $\mathbb{R} \setminus \{(2K+1)\pi \mid K \in \mathbb{Z}\}$ on a f est continue alors $SF(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{CS} f$ (d'après théorème de Dirichlet)

(f est continue sur tout intervalle de la forme $](2K+1)\pi, (2K+3)\pi[$ tel que $K \in \mathbb{Z}$) d'où

$$SF(f) \text{ CS vers } \begin{cases} x & \text{si } x \in](2K+1)\pi, (2K+3)\pi[\mid K \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x = (2K+1)\pi \text{ tq } (K \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

méthode 2 : représentation graphique

puisque f est 2π-périodique et impaire (symétrique par rapport à l'origine) donc.



Scanné avec CamScanner

Il est claire que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ tout entier ; f est continue sur les intervalle de la forme $](2K+1)\pi, (2K+3)\pi[$ avec $K \in \mathbb{Z}$, et discontinue sur $-\pi, \pi, 3\pi, -3\pi, \dots$ en générale sur les points $(2K+1)\pi$ tq $K \in \mathbb{Z}$ d'où le résultat

3) à l'aide de l'égalité de Parseval, calculons la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ –

on a

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

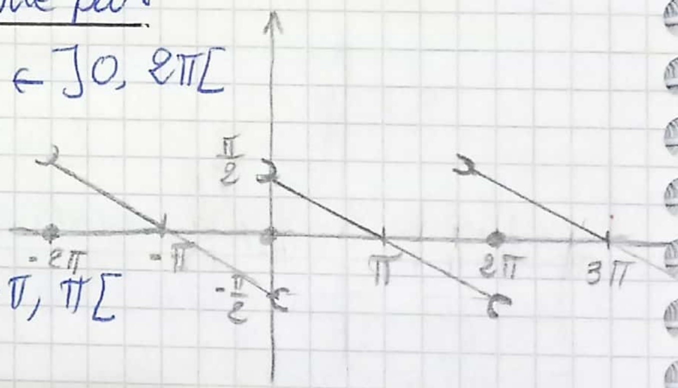
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\right|^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx$$

$$\Rightarrow 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\times\left[\frac{\pi^3}{3} - 0\right] = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{2}{3}\pi^2 \times \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{6}$$

4) deduire de la question (1) le développement en série de Fourier de la fonction g, 2π-périodique définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2} & \text{si } x \in]0, 2\pi[\\ g(0) = g(2\pi) = 0 \end{cases}$$



on a

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]-\pi, \pi[\\ f(\pi) = f(-\pi) = 0 \end{cases}$$

donc

$$g(x) = \frac{\pi - x}{2} = \frac{1}{2}(\pi - x) = \frac{1}{2} f(\pi - x)$$

avec

$(x - \pi) \in]-\pi, \pi[$ car

$\forall x \in]0, 2\pi[$ on a $0 < x < 2\pi \Rightarrow -2\pi < -x < 0$

$\Rightarrow -\pi < \pi - x < \pi \Rightarrow (\pi - x) \in]-\pi, \pi[$

$g(x) = \frac{1}{2} f(\pi - x) \Longrightarrow SF(g)(x) = \frac{1}{2} SF(f)(\pi - x)$

d'après la question (1) on a:

$$SF(f)(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx)$$

$$\Rightarrow SF(g)(x) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(n(\pi - x))$$

$$\Rightarrow SF(g)(x) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(n\pi - nx)$$

or on a

$$\sin(n\pi - nx) = \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}\cos(nx) - \sin(nx)\cos(n\pi)$$

$$= -(-1)^n\sin(nx) = (-1)^{n+1}\sin(nx)$$

donc $SF(g)(x) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \times (-1)^{n+1}\sin(nx)$

$$\Rightarrow SF(g)(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}((-1)\times(-1))^{n+1}\sin(nx)$$

$$\Rightarrow SF(g)(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = (x-\pi)^2 \quad , x \in [0, 2\pi[$$

1) calculons les coefficients de Fourier trigonométrique de f

on a $D_f = \mathbb{R}$ (polynome) et $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$ et on a

$$f(-x) = (-x-\pi)^2 = (x+\pi)^2 \quad (1)$$

et puisque f est 2π-périodique alors $\forall x \in D_f$ on a.

$(x+2\pi) \in D_f$ et $(x-2\pi) \in D_f$ et $f(x) = f(x+2\pi)$

donc $f(x) = f(x+2\pi) = (x+2\pi-\pi)^2 = (x+\pi)^2 \quad (2)$

d'après (1) et (2) on a $f(-x) = f(x)$ d'où f est paire.

alors $(\forall n \geq 1)$ $b_n = 0$

et $(\forall n \geq 1)$ on a $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2\cos(nx)\,dx$

et puisque la fonction $x \longrightarrow (x-\pi)^2\cos(nx)$ est paire

(les deux fonction sont paire) alors $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x-\pi)^2\cos(nx)\,dx$

par intégration par partie on pose :

$$\begin{cases} u(x) = (x-\pi)^2 \\ v'(x) = \cos(nx) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 2(x-\pi) \\ v(x) = \frac{1}{n}\sin(nx) \end{cases}$$

donc

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)^2\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\underbrace{\left[(x-\pi)^2 \times \frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi}\frac{2(x-\pi)}{n}\sin(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{-4}{\pi n}\int_0^{\pi}(x-\pi)\sin(nx)\,dx$$

on pose :

$$\begin{cases} u(x) = (x-\pi) \\ v'(x) = \sin(nx) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{-1}{n}\cos(nx) \end{cases}$$

donc

$$a_n = \frac{-4}{\pi n}\int_0^{\pi}(x-\pi)\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{-4}{\pi n}\left[\left[(x-\pi) \times \frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-1}{n}\cos(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{-4}{\pi n}\left[0 - \left(-\pi \times \frac{-1}{n}\right) + \frac{1}{n}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{-4}{\pi n}\left[\frac{-\pi}{n} + 0\right] = \frac{4}{n^2}$$

et on a

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos(0)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)^2\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(x-\pi)^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\times\left[0 - \frac{(-\pi)^3}{3}\right] = \frac{2}{\pi}\times\frac{\pi^3}{3}$$

d'où $a_0 = \frac{2}{3}\pi^2$

$$SF(f)(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\cos(nx)$$

2) Etudions la convergence de la série de Fourier de f

On a f est 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$

• Etudions la continuité de f sur $\mathbb{R}$

méthode 1 :

Il est claire que f est continue sur $[0, 2\pi[$ (polynome)

et
$$\lim_{x \to (2\pi)^-} f(x) = (2\pi - \pi)^2 = \pi^2$$

$f(2\pi) = f(0 + 2\pi) = f(0) = (-\pi)^2 = \pi^2$ car f est 2π-periodique

càd $f(x + 2\pi) = f(x)$

donc $f(2\pi) = \lim_{x \to (2\pi)^-} f(x)$ donc f est continue à gauche de 2π, et par conséquence f est continue sur $[0, 2\pi]$ et par périodicité f serait continue sur $\mathbb{R}$ et par suit

$SF(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{CN} f$ sur $\mathbb{R}$. (donc uniformement vers f sur $\mathbb{R}$) (d'apré theoreme de Dirichlet)

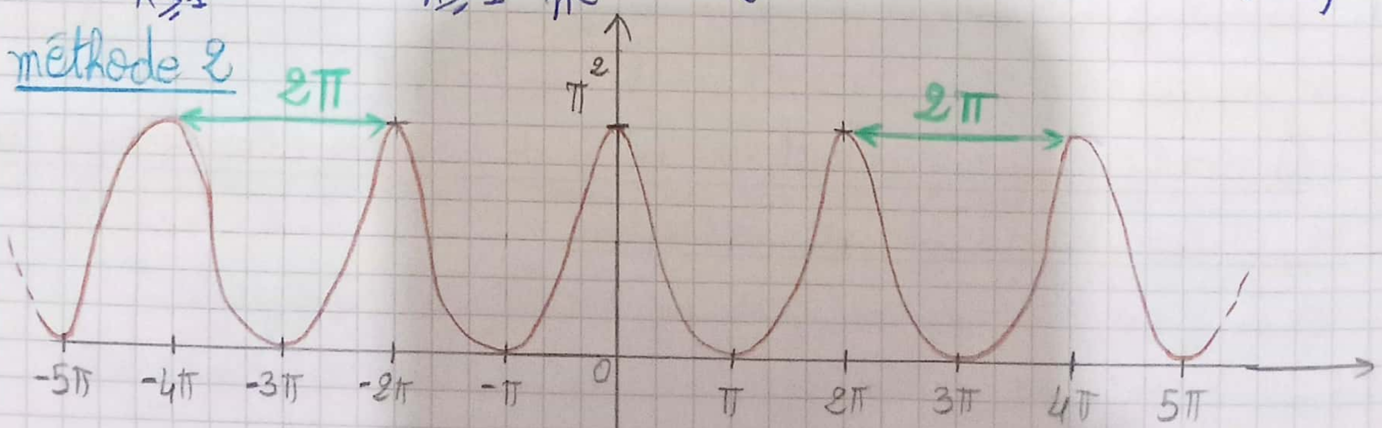
Remarque

On peut utiliser le fait que les série $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ sont convergentes et par suit $SF(f)$ converge normalement donc uniformement sur $\mathbb{R}$.

en effet on a $\sum_{n \geq 0} |b_n| = 0$ CV

et $\sum_{n \geq 1} |a_n| = \sum_{n \geq 1} \frac{4}{n^2}$ CV (série de Rieman $\alpha = 2 > 1$)

méthode 2



Scanné avec CamScanner

Il est claire que f est continue sur $\mathbb{R}$ d'où $SF(f)(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{CN} f$ donc uniformement vers f sur $\mathbb{R}$ (d'apré théorème de Dirichlet)

3) En déduire les somme de série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

On a $SF(f)$ converge normalement donc simplement vers f sur $\mathbb{R}$ et f continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0, 2\pi[$

donc $\lim_{n \to +\infty} SF(f)(x) = f(x) \Rightarrow \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx) = f(x)$

Pour $x = \pi$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} SF(f)(x) = f(\pi) \Longrightarrow \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\pi) = f(\pi) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^n = \frac{-\pi^2}{3 \times 4} = \frac{-\pi^2}{12}$$

* Pour $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Pour $x = 0$ on a $\lim_{n \to +\infty} SF(f).(0) = f(0) = \pi^2$

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(0) = f(0) = \pi^2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{2}{3}\pi^2 \times \frac{1}{4}$$

d'où $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

continue $\Rightarrow$ integrable $\Rightarrow$ localement integrable

Exercice 5

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on considère la fonction 2π-périodique f définie par $f(t) = \cos(\alpha t) \quad \forall t \in [-\pi, \pi]$

1) montrons que f admet une série de Fourier convergente sur $\mathbb{R}$, et préciser le type de convergence.

On a f est 2π-périodique et localement intégrable.
(car f continue donc intégrable et par suit localement integrable)
alors f admet une série de Fourier de la forme

$$SF(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

or f est de classe C^1 par morceaux sur $[0,2\pi]$ (ou bien sur $[-\pi,\pi]$ càd sur tout intervalle de longueur 2π) de plus f est continue sur $[-\pi,\pi]$ et par périodicité f est continue sur $\mathbb{R}$ et par suit d'après théorème de Dirichlet $SF(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{CN} f$ sur $\mathbb{R}$ (donc uniformement Vers f sur $\mathbb{R}$)

2) Expliciter les coefficients de Fourier de f puis déterminer la série de Fourier associée à f

On a f est une fonction paire, alors $(\forall n\geq 1)$, $b_n = 0$

et on a

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\alpha x)\,dx.$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha} - \underbrace{\frac{\sin(0)}{\alpha}}_{=0}\right]$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi\alpha}\sin(\alpha\pi)$$

car $\sin(\alpha\pi) \neq 0$ puisque $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, si $\alpha\in\mathbb{Z}$ alors $\sin(\alpha\pi) = 0$

et $(\forall n\geq 1)$ on a:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(\alpha x)\cos(nx)\right]dx$$

(car la fonction $x \longmapsto \cos(\alpha x)\sin(nx)$ est paire)

or on a $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$ alors

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(\alpha x + nx) + \cos(\alpha x - nx)\right]dx$$

on peut utiliser les integration par partie

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(x(\alpha+n)) + \cos(x(\alpha-n))\right]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha+n}\sin((\alpha+n)x) + \frac{1}{\alpha-n}\sin((\alpha-n)x)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha+n}\sin((\alpha+n)\pi) + \frac{1}{\alpha-n}\sin((\alpha-n)\pi)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha+n}\sin(\alpha\pi+n\pi) + \frac{1}{\alpha-n}\sin(\alpha\pi-n\pi)\right]$$

et on a $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

donc $\sin(\alpha\pi + n\pi) = \sin(\alpha\pi)\cos(n\pi) + \sin(n\pi)\cos(\alpha\pi)$

$= \sin(\alpha\pi) \times (-1)^n$

car $\cos(\alpha\pi) = 0$ puisque $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

et on a $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

donc $\sin(\alpha\pi - n\pi) = \sin(\alpha\pi)\cos(n\pi) - \sin(n\pi)\cos(\alpha\pi)$

$= (-1)^n \sin(\alpha\pi)$ $\quad (\cos(\alpha\pi) = 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$

d'où

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha\pi)\times(-1)^n}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha\pi)\times(-1)^n}{\alpha-n}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}(-1)^n \sin(\alpha\pi)\left[\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n}\right]$$

$$= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}(-1)^n\left[\frac{\alpha-n+\alpha+n}{(\alpha+n)(\alpha-n)}\right] = \frac{(-1)^n\sin(\alpha\pi)}{\pi}\left[\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\right]$$

Par conséquence $(\forall n \geq 1)$

$$a_n = \frac{2\alpha(-1)^n}{\pi}\sin(\alpha\pi)\times\frac{1}{\alpha^2-n^2}$$

finalement

$$SF(f)(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n\geq 1}\frac{2\alpha(-1)^n}{\pi}\times\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2-n^2}\cos(nx)$$

d'où

$$SF(f)(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha}{\pi}\sin(\alpha\pi)\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{\alpha^2-n^2}(-1)^n$$

3) Etablir le développement eulérien :

$$\forall u \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z} \quad \text{cotan}\, u = \frac{1}{\tan u} = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2u}{u^2-n^2\pi^2}$$

d'après (1) on a

$$SF(f)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{CN} f \text{ sur } \mathbb{R} \quad \text{d'où } (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{n\to+\infty} SF(f)(x) = f(x) \quad (\text{convergence simple sur } \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha}{\pi}\sin(\alpha\pi)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\cos(nx) = f(x) = \cos(\alpha x)$$

Pour $x = \pi$ on a :

$$\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha}{\pi}\sin(\alpha\pi)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\cos(n\pi) = \cos(\alpha\pi)$$

$$\Rightarrow \left(\cos(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha}{\pi}\sin(\alpha\pi)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}\right) \times \frac{1}{\sin(\alpha\pi)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(\alpha\pi)}{\sin(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan(\alpha\pi)} = \cot(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}$$

En prenant $u = \alpha\pi$ on obtient $(\alpha\pi \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z})$

donc $\forall u \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ on a

$$\cot(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)} \times \frac{\pi}{\pi}$$

d'où
$$\cot(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha\pi}{\pi^2\alpha^2-n^2\pi^2}$$

finalement
$$\cot(u) = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2u}{u^2-n^2\pi^2}$$

Exercice 6 (facultatif)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique tel que
$$f(x) = e^x \quad \forall x \in]-\pi, \pi]$$

1) calculons les coefficients de Fourier de la fonction f

On a $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(0)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x\,dx$

$a_0 = \frac{1}{\pi}[e^x]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}(e^{2\pi}-1)$

d'où $a_0 = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}$

On a f n'est pas pair ni impaire donc calculons a_n et b_n

On a $(\forall n \geq 0)$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x\cos(nx)\,dx$$

par integration par partie on pose :

$$\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = \cos(nx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n} \end{cases}$$ donc

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{\left[\frac{e^x \sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} \frac{e^x \sin(nx)}{n}\,dx\right]$$

$$a_n = \frac{-1}{n\pi}\left[\int_0^{2\pi} e^x \sin(nx)\,dx\right] \quad (*)$$

par integration par partie une 2ème fois, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = \sin(nx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = \dfrac{-1}{n}\cos(nx) \end{cases}$$ donc

$$a_n = \frac{-1}{n\pi}\int_0^{2\pi} e^x \sin(nx)\,dx$$

$$a_n = \frac{-1}{n\pi}\left[\left[\frac{-e^x}{n}\cos(nx)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{-e^x}{n}\cos(nx)\,dx\right]$$

$$a_n = \frac{-1}{n\pi}\left[-\frac{e^{2\pi}}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} e^x \cos(nx)\,dx\right]$$

$$a_n = \frac{-1}{n^2\pi}\left[1 - e^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^x \cos(nx)\,dx\right]$$

$$a_n = \frac{-1}{n^2\pi} + \frac{e^{2\pi}}{n^2\pi} - \frac{1}{n^2} \times \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \cos(nx)\,dx}_{a_n}$$

donc

$$a_n = \frac{e^{2\pi}}{n^2\pi} - \frac{1}{n^2\pi} - \frac{1}{n^2}a_n$$

$$\Rightarrow a_n\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2\pi}\left(e^{2\pi} - 1\right)$$

$$\Rightarrow a_n\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2\pi}\left(e^{2\pi} - 1\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(e^{2\pi} - 1)}{\pi(n^2+1)}$$

on a d'après $(*)$ $a_n = \dfrac{-1}{n\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^x \sin(nx)\,dx$

et $(\forall n \geq 1)$ $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \sin(nx)\,dx$

donc $a_n = \frac{-1}{n} b_n \implies b_n = -n\,a_n$ $\quad f(nT+x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{Z}^*$

avec $a_n = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi(n^2+1)}$ d'où $b_n = \frac{n(1-e^{2\pi})}{\pi(n^2+1)}$

et par suite

$$SF(f)(x) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} + \sum_{n\geq 1} \frac{(e^{2\pi}-1)}{\pi(n^2+1)}\cos(nx) + \frac{n(1+e^{2\pi})}{\pi(n^2+1)}\sin(nx)$$

$$SF(f)(x) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} + \sum_{n\geq 1} \frac{e^{2\pi}-1}{\pi(n^2+1)}\left[\cos(nx) - n\sin(nx)\right]$$

$$SF(f)(x) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} + \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}\left(\cos(nx) - n\sin(nx)\right)$$

2) Etudions la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de f.

On a f est 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$ $\quad \ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$

or la fonction f n'est pas continue au point $x = -\pi$

car $f(-\pi) = f(2\pi - 3\pi) = f(-3\pi) = e^{-3\pi}$ $\quad \ln(1+\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

or $\lim\limits_{x\to(-\pi)^-} = e^{-\pi} \neq f(-\pi) = e^{-3\pi}$

donc f est discontinue sur $\mathbb{R}$ càd la série de Fourier $SF(f)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$

Scanné avec CamScanner

3) en déduire les valeurs des sommes : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$

On a d'après 2) : $SF(f)(x)$ converge simplement vers f en tout point où f est continue (d'après théorème de Dirichlet)

au point $x = \pi$, f est continue donc $\lim_{n \to +\infty} SF(f)(\pi) = f(\pi) = e^{\pi}$

$$\Rightarrow \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2\pi}-1}{\pi(n^2+1)} \cos(\pi x) + \frac{n(1-e^{2\pi})}{\pi(n^2+1)} \sin(\pi x) = e^{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2\pi}-1}{\pi(n^2+1)} (-1)^n + 0 = e^{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{2\pi}-1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = e^{\pi} - \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} = \frac{2\pi e^{\pi} - e^{2\pi} - 1}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{2\pi e^{\pi} - e^{2\pi} - 1}{2\pi} \times \frac{\pi}{e^{2\pi}-1}$$

d'où
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{2\pi e^{\pi} - e^{2\pi} - 1}{2(e^{2\pi}-1)}$$

* Pour $x = 0$ f est continue donc $\lim_{n \to +\infty} SF(f)(0) = f(0) = 1$

donc
$$\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2\pi}-1}{\pi(n^2+1)} \cos(0) + 0 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{e^{2\pi}-1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = 1 - \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} = \frac{2\pi - e^{2\pi} + 1}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{2\pi - e^{2\pi} + 1}{2\pi} \times \frac{\pi}{e^{2\pi}-1}$$

d'où
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{2\pi - e^{2\pi} + 1}{2(e^{2\pi}-1)}$$

Exercice 3

Soit f 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = |x|$

1) Former le développement en série de Fourier de f.

On a la fonction f est paire donc, $b_n = 0$ et on a

$$SF(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

On a

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx$$

on pose

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \cos(nx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{n}\sin(nx) \end{cases}$$

donc

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\cancel{\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi}} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nx)\,dx\right.$$

$$a_n = \frac{-2}{n\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

et on a

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} - 0\right]$$ d'où $a_0 = \pi$

Pour $n = 2p$ on a

$$a_{2p} = \frac{2}{(2p)^2\pi}\left((-1)^{2p} - 1\right) = 0$$

Pour $n = 2p+1$ on a $a_{2p+1} = \frac{2}{(2p+1)^2\pi}\left((-1)^{2p+1} - 1\right)$

càd

$$a_{2p+1} = \frac{-4}{(2p+1)^2\pi}$$

d'où

$$SF(f)(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{\geq} a_{2p+1}\cos((2p+1)x)$$

càd

$$SF(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos((2p+1)x)$$

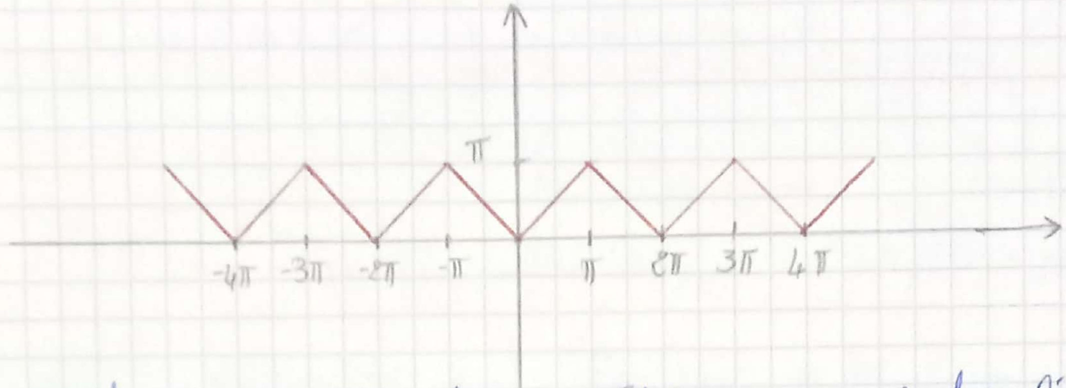
2) Etude de la convergence de la série de Fourier de f.

méthode analytique

Il est claire que f est continue sur $[-\pi, \pi]$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$ d'après la périodicité de f de plus f est 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$, donc d'après théorème de Dirichlet. On a $SF(f)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{CN} f$ (et par suit uniformement)

Scanné avec CamScanner

méthode 2 : représentation graphique



la fonction f est paire, donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. de plus il est claire que f est continue sur $\mathbb{R}$ ainsi f est 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux sur $[0,2\pi]$ d'où $SF(f)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{CN} f$ (donc uniformement)

3) En déduire les somme

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Pour $x=0$ on a $SF(f)(x)$ CN vers f donc simplement, et puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier au point $x=0$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} SF(f)(0) = f(0) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = f(0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{-\pi}{2} \Longrightarrow \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{-\pi}{2}\times\frac{-\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8}$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{4}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}\times\frac{4}{3}$$

d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

4) avec l'identité de Parseval, calculons les sommes:

* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$

On a $\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(|a_n|^2 + |\underbrace{b_n}_{=0}|^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |f(x)|^2 dx$

$\Rightarrow \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} |a_{2n+1}|^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx \qquad (a_{2p}=0)$

$\Rightarrow \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2} \times \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\pi$

$\Rightarrow \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{2}{\cancel{\pi}} \times \frac{\pi^3}{3}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \left(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2}\right) \times \frac{\pi^2}{16} = \frac{4\pi^2 - 3\pi^2}{6} \times \frac{\pi^2}{16}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^2}{6} \times \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{6\times 16} = \frac{\pi^4}{96}$

* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{\pi^4}{96}$

$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{16}\right)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15} \times$

* $\cos(-a) = \cos a$
* $\cos(a + 2K\pi) = \cos a$
* $\cos(\pi \pm a) = -\cos a$
* $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$
* $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$
* $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
* $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
* $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
* $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
* $\cos a . \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$
* $\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$ *
* $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
* $\cos(3a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$
* $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$
* $\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$
* $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$

* $\sin(-a) = -\sin a$
* $\sin(a+2k\pi) = \sin a$
* $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \cos a$
* $\sin(\pi + a) = -\sin a$
* $\sin(\pi - a) = \sin a$
* $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
* $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
* $\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
* $\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
* $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$
* $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$
* $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
* $\sin(3a) = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$

$\cos(n\pi) = (-1)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

Scanné avec CamScanner

* $\tan(-a) = -\tan a$
* $\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{-1}{\tan a}$
* $\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\tan a}$
* $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
* $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
* $\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$
* $\tan a \tan b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\cos(a-b) + \cos(a+b)}$
* $\tan^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{1 + \cos(2a)}$
* $\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

* $\tan(3a) = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$

* $\dfrac{\tan a}{\tan b} = \dfrac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{\sin(a-b) + \sin(a+b)}$

* Si $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

* $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

* $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

* $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

$\cos^2(x) = \dfrac{1}{\tan^2(x)+1}$