

Espace Fonctionnel de Lebesgue

Dans ce chapitre (X, β, μ) est un espace mesuré et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Inégalité de Hölder et Minkowski

1.1.1 Préliminaire

Si $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ ou $(\overline{\mathbb{R}})$ une fonction mesurable et $p \in [1, +\infty[$, on pose :
 $N_p(f) = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$.
 On rappelle que : $(+\infty)^\alpha = +\infty$ si $\alpha > 0$.

Proposition 1 (*Propriétés immédiates de N_p*) :

- $N_p(f) \in \overline{\mathbb{R}}^+$
- $N_p(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ pp
- Si f est à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$ mesurable alors on a :
 $N_p(f) < +\infty \Rightarrow f$ fini pp
- $\forall c \in \mathbb{R} \quad N_p(cf) = |c| N_p(f)$.

Définition 2 Deux nombres réels p et q appartenant à $]1, +\infty[$ sont dits conjugués s'ils vérifient la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Remarque 3 Si p et q sont conjugués alors $q = \frac{p}{p-1}$.
 On dira aussi que 1 et $+\infty$ sont conjugués.

1.1.2 Inégalité de Hölder

Lemme 4 (Inégalité de Young) Soit $\alpha \in]0, 1[$, a et $b \in \overline{\mathbb{R}}_+$ alors on a l'inégalité suivante :

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b$$

Démonstration : Inégalité de young

On sait que si f est une fonction convexe. Alors : $f(\alpha a' + (1 - \alpha)b') \leq \alpha f(a') + (1 - \alpha)f(b')$.

Soit $f(x) = \exp(x)$. on a $f''(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x)$ est convexe, donc posons :

$$a' = \ln(a), b' = \ln(b)$$

$$\text{d'où } \exp(\alpha \ln(a) + (1 - \alpha) \ln(b)) \leq \alpha \exp(\ln(a)) + (1 - \alpha) \exp(\ln(b))$$

$$\text{d'où } a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b.$$

Théorème 5 (Inégalité de hölder)

Soient f et $g : X \rightarrow \mathbb{K}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ deux applications mesurables, p et q deux éléments de l'intervalle $]1, +\infty[$ conjugués. Alors on a :

$$N_1(fg) \leq N_p(f)N_q(g).$$

Démonstration On distingue deux cas :

Si $N_p(f) = N_q(g) = 0$ ou $+\infty$ l'inégalité est triviale.

Si $N_p(f) = N_q(g) \in]0, +\infty[$.

Posons $F = \frac{|f|^p}{[N_p(f)]^p}$ et $G = \frac{|g|^q}{[N_q(g)]^q}$.

On a F et G sont μ intégrales et $\int_X (F) d\mu = \int_X (G) d\mu = 1$.

Pour $\alpha = \frac{1}{p}$ on a d'après le lemme 4 :

$$F^{\frac{1}{p}} \cdot G^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} F + \frac{1}{q} G.$$

par intégration on obtient :

$$\int_X F^{\frac{1}{p}} \cdot G^{\frac{1}{q}} d\mu = \int_X \frac{|fg|}{N_p(f) \cdot N_q(g)} d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$$\text{D'où } \int_X |fg| d\mu \leq N_p(f) \cdot N_q(g).$$

Exemple 6 Soit l'espace mesurable $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu_d)$ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1.1.3 Inégalité de Minkowski :

Lemme 7 Pour $a, b \in \overline{\mathbb{R}}^+$ on a l'inégalité :

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \forall p \in [1, +\infty[.$$

Démonstration La fonction $t \mapsto t^p$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$, on a donc :

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^p = f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) \leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b).$$

Comme $f(a) = a^p$ et $f(b) = b^p$. Donc $2^p\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^p \leq 2^p\left(\frac{1}{2}(a^p + b^p)\right) \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

D'où $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \quad \forall p \geq 1$.

Théorème 8 (Inégalité de Minkowski) Soient f et $g : X \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions mesurables et $p \in [1, +\infty[$ alors on a :

$$N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g)$$

Démonstration Si $p = 1$ l'inégalité est triviale.

Si $p \geq 1$ on distingue deux cas :

Si $N_p(f) = +\infty$ ou $N_p(g) = +\infty$ ou $N_p(f + g) = 0$ l'inégalité est triviale.

Si $N_p(f) < +\infty$ et $N_p(g) < +\infty$ et $N_p(f + g) \neq 0$. Alors :

$N_p(f + g) < +\infty$, en effet :

$$N_p(f + g) = \left(\int_X |f + g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

or $|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$ d'après le lemme 7. D'où :

$$N_p(f + g) \leq \left(2^{p-1}(\int_X |f|^p d\mu + \int_X |g|^p d\mu)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= 2^{\frac{p-1}{p}} (\int_X |f|^p d\mu + \int_X |g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

D'autre part on a :

$$|f + g|^p = |f + g||f + g|^{p-1} \leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}.$$

$$\text{Donc : } [N_p(f + g)]^p = \int_X (|f + g|^p) d\mu \leq \int_X (|f||f + g|^{p-1}) d\mu + \int_X (|g||f + g|^{p-1}) d\mu.$$

Soit $q = \frac{p}{p-1}$ le conjugué de p . Alors d'après l'inégalité de Holder on a :

$$[N_p(f + g)]^p \leq N_p(f) \cdot N_q[(f + g)^{p-1}] + N_p(g) \cdot N_q[(f + g)^{p-1}]$$

$$= (N_p(f) + N_p(g)) \cdot N_q[(f + g)^{p-1}].$$

$$\text{or } N_q[(f + g)^{p-1}] = \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X |f + g|^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} = [N_p(f + g)]^{p-1}$$

comme $N_p(f + g) \neq 0$ et $+\infty$ alors :

$$N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

Exemple 9 Soient $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu_d)$ $(a_n), (b_n)$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Alors :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n + b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 10 Les applications N_p ne sont pas à priori des semi normes sur $M(X, \mathbb{K})$, puis qu'elle peuvent prendre des valeurs $+\infty$. On dit qu'elles sont des semi normes généralisées.

$M(X, \mathbb{K}) =$ espace des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{K}$.

Proposition 11 Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives définies sur X . Alors on a :

$$N_p(\sup_{n \geq 1} f_n) = \sup_{n \geq 1} N_p(f_n) \quad \forall p \geq 1.$$

Démonstration On a $f_n \rightarrow f$ comme f_n est croissante alors $f = \sup f_n$.

Alors $f_n^p \rightarrow f^p$ avec $f^p = (\sup f_n)^p$.

D'après le Théorème Beppo-Levi on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n^p d\mu = \int_X f^p d\mu = \int_X (\sup f_n)^p d\mu$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_X f_n^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

car la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$ continue.

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_X f_n^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X (\sup f_n)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\text{Ainsi on a } \sup_{n \geq 1} \left(\int_X f_n^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X (\sup f_n)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 12 La proposition précédente généralise le Théorème de Beppo-Levi.

Proposition 13 Soient $p \geq 1$ et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives définie sur X . Alors on a :

$$N_p\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (N_p f_n).$$

Démonstration Montrons que $N_p(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} N_p(f_n)$.

Soit $g_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$, g_n est une suite croissante et $\sup g_n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ donc, on applique la proposition précédente

$$N_p(\sup_n g_n) = \sup_n N_p(g_n) \quad \forall p \geq 1 \text{ avec } f_n \in M_+.$$

$$\text{Donc } N_p(\sup_n g_n) = \sup_n N_p(g_n) \text{ or } N_p(g_n) \leq \sum_{k=0}^n N_p(f_k)$$

$$\text{D'où } N_p\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) \leq \sup\left(\sum_{k=0}^n N_p(f_k)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} N_p(f_k), \text{ ainsi on a } N_p\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_p(f_n).$$

Remarque 14 Pour $p = 1$ on a :

$$N_1\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} N_1(f_n).$$

1.2 Fonctions p intégrables

Définition 15 Pour $p \in [1, +\infty[$, on notera $\mathcal{L}_\mathbb{K}^p(X, B, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \rightarrow \mathbb{K}$, telle que $|f|^p$ soit μ intégrable (c'est-à-dire $N_p(f) < +\infty$).

Remarque 16 Pour alléger ces notations, on écrira tout simplement $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ ou $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ au lieu de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(X, B, \mu)$, s'il n'y a pas de confusion possible.

Proposition 17 i) $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et N_p est une semi norme sur $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$.

ii) $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p$. ($N_p(f) = N_p(|f|)$).

iii) Si f et $g \in M(X, \mathbb{K})$ tq g est positive, $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p$ et $|f| \leq g$ pp. Alors $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ et on a : $N_p(f) \leq N_p(g)$.

iv) $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p \Leftrightarrow f^+$ et $f^- \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p$
 $f = f_1 + if_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p \Leftrightarrow f_1$ et $f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p$.

v) Si f et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p$.
 Alors $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p$ avec
 $\sup(f, g) = \frac{1}{2}[f + g + |f - g|] \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p$
 $\inf(f, g) = -\sup(-f, -g)$
 on dira alors que $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ est un espace vectoriel réticulé.

vi) Si $p, q \in]1, +\infty[$ sont conjugués $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^q$
 Alors $f.g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^1$ et

$$N_1(fg) \leq N_p(f).N_q(g) < +\infty.$$

Démonstration iii) Soient $A = \{x \in X \mid |f(x)| > g(x)\}$

$A^c = \{x \in X \mid |f(x)| \leq g(x)\} \Rightarrow \mu(A) = 0$ car $|f| \leq g$ pp.

on a $X = A \cup A^c$ avec $A \cap A^c = \emptyset$

Donc $\int_X |f|^p d\mu = \int_A |f|^p d\mu + \int_{A^c} |f|^p d\mu$.

$\int_X |g|^p d\mu = \int_A |g|^p d\mu + \int_{A^c} |g|^p d\mu$.

Et comme sur A^c on a $|f| \leq g$ donc $|f|^p \leq |g|^p$ et $\int_A |f|^p d\mu = \int_A |g|^p d\mu$
 $d\mu = 0$

D'où $\int_{A^c} |f|^p d\mu = \int_X |f|^p d\mu \leq \int_X |g|^p d\mu = \int_{A^c} |g|^p d\mu$

D'où $N_p(f) \leq N_p(g)$. $\forall 1 \leq p < +\infty$.

iv) $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p \Leftrightarrow f^+$ et $f^- \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p$.

$\Leftrightarrow$ On a $f = f^+ - f^-$ donc $N_p(f) = N_p(f^+ - f^-)$

Alors $N_p(f) \leq N_p(f^+) + N_p(f^-) < +\infty$ d'après Minkowski.

$\Rightarrow$ on a $f^+ < |f|$ et $f^- < |f|$ Alors f^+ et $f^- \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p$ d'après iii).

Remarque 18 a) N_p n'est pas forcément une norme sur $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ car ($N_p(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ pp).

b) La semi norme N_p munit $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ d'une topologie τ définie par la base :

$B = \{B(f, \varepsilon) \mid f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p \text{ et } \varepsilon > 0\}$ avec :

$B(f, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p \mid N_p(f - g) < \varepsilon\}$.

Et on montre que $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p, \tau)$ est un espace vectoriel topologique

$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p \times \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ et $\mathbb{K} \times \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$

$(f, g) \longrightarrow f + g$ et $(\alpha, f) \longrightarrow \alpha.f$
 sont continues et $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p \times \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ resp $\mathbb{K} \times \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ sont muni de la topologie produit)
 on montre aussi que
 $f_n \xrightarrow{\tau} f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} N_p(f - f_n) = 0$.
 c) Si N_p n'est pas une norme sur $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ alors :
 l'espace topologique $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p, \tau)$ n'est pas séparé.

Démonstration Pour démontrer que $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p, \tau)$ n'est pas séparé on prend
 $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ tq :
 $N_p(f) = 0$ et $f \neq 0$
 Soient $\alpha, \beta > 0$ $V_1 = B(f, \alpha)$ et $V_2 = B(0, \beta)$, Alors $f \in V_1 \cap V_2$.
 Donc $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.
 D'où tout voisinage de f et tout voisinage de 0 se rencontrent pour tout
 $f \neq 0$.

Exemple 19 $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}, \mu_d))$ et $p \in [1, +\infty[$. Alors $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu_d)$ est l'espace des
 suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeur dans $\mathbb{K}$ tq :
 $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty$, on le désigne par $l_{\mathbb{K}}^p$ ou l^p .
 on pose : $\|x\|_p = N_p(x) = (\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.
 Alors $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $l_{\mathbb{K}}^p$, puisque le seul négligeable de l'espace
 $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu_d)$ est l'ensemble vide.

1.3 Théorème de Ferlicher-Riesz et Théorème de Lebesgue

Lemme 20 Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de cauchy dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ avec $(1 \leq p < +\infty)$.
 Alors il existe une sous suite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$, et une application $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ tel que
 $(f_{n_k})_{k \rightarrow +\infty} \xrightarrow{pp} f$.

Démonstration Puisque $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de cauchy dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$. Alors on
 peut extraire une sous suite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que :

$$\forall k \geq 1 : N_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) < \frac{1}{2^k}.$$

Soit $g = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$. Alors g est positive, mesurable, et $N_p(g) \leq$
 $\sum_{k=1}^{+\infty} N_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$. Donc $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p$ et elle est finie pp.

- Soit $N = \{x \in X \mid g(x) = +\infty\}$. Alors N est un négligeable, et la série
 $\sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ converge absolument sur N^c .

$$\text{Posons : } f(x) = \begin{cases} f_{n_1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) & \text{si } x \in N^c \\ 0 & \text{si } x \in N. \end{cases}$$

Il est clair que f est mesurable de X vers $\mathbb{K}$.

On a $f_{n_1} + \sum_{k=1}^{p-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f_{n_p}$ pour tout $p \leq 1$, donc $f_{n_k} \xrightarrow{pp} f$.

1.3. THÉORÈME DE FERICHER-RIESZ ET THÉORÈME DE LEBESGUE 9

D'autre part on a $|f_{n_p}| \leq |f_{n_1}| + g \forall p \geq 1$

Donc $|f| \leq |f_{n_1}| + g$ pp avec $(|f_{n_1}| + g) \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$. D'où $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$.

Théorème 21 (Frischer-Riesz) Toute suite de cauchy dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ est convergente dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ (c'est-à-dire au sens de la semi norme N_p).

Démonstration Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de cauchy dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$.

D'après le lemme précédent il existe $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ et une sous suite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ qui converge pp vers f .

Soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists N \geq 1$ tq $\forall n, m \geq N$ on a $N_p(f_n - f_m) \leq \varepsilon$ (*)

Soit $n \geq N$ (fixé), alors :

$$\begin{aligned} \int_X |f_n - f|^p d\mu &= \int_X \lim_{k \rightarrow +\infty} |f_n - f_{n_k}|^p d\mu \\ &\leq \liminf \int_X |f_n - f_{n_k}|^p d\mu \text{ (d'après lemme de Fatou)} \\ &\leq \varepsilon^p \text{ d'après (*)}. \end{aligned}$$

D'où $N_p(f_n - f) \leq \varepsilon$ par suite $f_n \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$.

Corollaire 22 :

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de cauchy dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ qui converge presque par tout vers une application f mesurable de X dans $\mathbb{K}$. Alors $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ et $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$.

Démonstration D'après le lemme précédent il existe $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ et $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ tq $f_{n_k} \rightarrow g$ pp. Donc $f = g$ pp, d'où $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ et $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ d'après le théorème précédent.

Remarque 23 En général la convergence dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ d'une suite n'entraîne pas la convergence pp de toute la suite $(f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p)} f \not\Rightarrow (f_n)_{n \rightarrow +\infty} f \text{ pp})$ mais on a d'après la lemme précédent $(f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p} f) \Rightarrow (\exists f_{n_k}/f_{n_k})_{k \rightarrow +\infty} f \text{ pp})$

Théorème 24 (Théorème de Lebesgue) Soient $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ qui converge pp vers une application mesurable f de X vers $\mathbb{K}$.

On suppose que il exists $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p$ positive telle que :

$\forall n \geq 1, |f_n| \leq g$ pp.

Alors $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ et $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$.

Démonstration Soit $g_n = |f_n - f|$ avec $(g_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 μ pp.

On a $|f_n| \leq g$ pp $\Rightarrow |f| \leq g$ pp. Comme $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p$, alors $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ et on a :

$$|f_n - f|^p \leq c(|f_n|^p + |f|^p) < 2cg^p$$

avec $2.c.g^p \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1$ et $c > 0$ une constante.

D'après le théorème de la convergence dominée de lebesgue on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f|^p d\mu = 0.$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} [N_p(f_n - f)]^p = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} N_p(f_n - f) = 0$.

Par suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f pp dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$.

1.4 Espace $L_{\mathbb{K}}^p (1 \leq p < +\infty)$

Définition 25 Soit $N_{\mathbb{K}} = \{f \in M(X, \mathbb{K}) \mid f = 0 \text{ pp}\}$ alors $N_{\mathbb{K}}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$.

Dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p$ on définit la relation d'équivalence par :

$$f \sim g \Leftrightarrow f - g \in N_{\mathbb{K}} (\Leftrightarrow f = g \text{ pp})$$

$\sim$ est compatible avec la structure vectorielle de $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p, +, \cdot)$, donc l'espace quotient $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p/N_{\mathbb{K}}$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. On rappelle que ces lois sont données par :

$$\dot{f} + \dot{g} = \widehat{f + g} \text{ et } \alpha \cdot \dot{f} = \widehat{\alpha \cdot f}$$

L'espace $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p/N_{\mathbb{K}}$ sera noté $L_{\mathbb{K}}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$, ou tout simplement $L_{\mathbb{K}}^p(X)$, ou $L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ s'il n'y a pas de confusion possible.

$$\dot{f} = \{h \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p \mid f = h \text{ pp}\}.$$

Pour $\dot{f} \in L_{\mathbb{K}}^p$, on posera $\|\dot{f}\|_p = N_p(h)$ où h est un élément quelconque de $\dot{f}$. Le nombre $\|\dot{f}\|_p$ ne dépend pas du choix de h et $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L_{\mathbb{K}}^p$.

Exemple 26 $l_{\mathbb{K}}^p = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu_d) = L_{\mathbb{K}}^p(\mu_d)$ puis que $\dot{f} = \{f\}$ pour tout $f \in l_{\mathbb{K}}^p$.

1.5 Espace $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{\infty}$

Définition 27 :

Soit f une application mesurable de X dans $\mathbb{K}$ ou $(\overline{\mathbb{R}})$.

On appelle borne supérieure essentielle de f l'élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$ noté $N_{\infty}(f)$ qu'est défini par :

$$N_{\infty}(f) = \inf\{\alpha \geq 0 \mid |f| \leq \alpha \text{ pp}\}, \text{ avec } (\inf(\emptyset) = +\infty)$$

f est dite essentiellement, bornée, s'il existe $M > 0$ telle que :

$$|f| \leq M \text{ pp, autrement dit } N_{\infty}(f) < +\infty.$$

1.5.1 Propriétés de N_{∞} :

$$\text{i) } N_{\infty}(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ pp.}$$

$$\text{ii) } \forall c \in \mathbb{K} \ N_{\infty}(cf) = |c|N_{\infty}(f).$$

$$\text{iii) } N_{\infty}(f) = N_{\infty}(|f|).$$

$$\text{iv) } 0 \leq f \leq g \text{ pp} \Rightarrow N_{\infty}(f) \leq N_{\infty}(g).$$

$$\text{v) } \forall \alpha > N_{\infty}(f) \Rightarrow |f| \leq \alpha \text{ pp } (N_{\infty}(f) < +\infty).$$

$$\text{vi) } |f| \leq N_{\infty}(f) \text{ pp}$$

$$\text{vii) } \{\alpha \geq 0 \mid |f| \leq \alpha \text{ pp}\} = [N_{\infty}(f), +\infty[.$$

Démonstration :

$$N_{\infty}(f) = \inf\{\alpha \geq 0 \mid |f| \leq \alpha \text{ pp}\}$$

i) Montrons que $N_{\infty}(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ pp}$

-Si $f = 0 \text{ pp}$, alors $N_{\infty}(f) = 0$.

-Si $N_{\infty}(f) = 0$ montrons que $f = 0 \text{ pp}$

On a $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $N_{\infty}(f) \leq \alpha < N_{\infty}(f) + \varepsilon$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ |f| \leq \alpha \text{ pp et } N_{\infty}(f) \leq \alpha < N_{\infty}(f) + \varepsilon$

$\Rightarrow |f| \leq \alpha < 0 + \varepsilon \text{ pp}$

$\Rightarrow |f| \leq 0 \text{ pp}$.

D'où $f = 0 \text{ pp}$.

ii) $\forall c \in \mathbb{K} N_{\infty}(cf) = |c|N_{\infty}(f)$

$$N_{\infty}(cf) = \inf\{\alpha \geq 0 \mid |cf| \leq \alpha \text{ pp}\}$$

$$= \inf\{\frac{\alpha|c|}{|c|} \geq 0 \mid |c.f| \leq \alpha \text{ pp}\}$$

$$= |c|\{\beta \geq 0 \mid |f| \leq \beta \text{ pp}\}$$

$$= |c|N_{\infty}(f).$$

v) $\forall \alpha > N_{\infty}(f) \Rightarrow |f| \leq \alpha \text{ pp } (N_{\infty}(f) < +\infty)$

En effet $\exists \beta > 0$ telle que $N_{\infty}(f) < \beta < \alpha$ et $|f| \leq \beta \text{ pp}$ d'où $|f| \leq \alpha \text{ pp}$.

vi) $|f| \leq N_{\infty}(f) \text{ pp}$

— si $N_{\infty}(f) = +\infty$ l'inégalité est triviale.

— si $N_{\infty}(f) < +\infty$ on pose :

$$A = \{x \in X \mid |f(x)| > N_{\infty}(f)\} = \cup_{n=1}^{+\infty} \{x \mid |f(x)| > \frac{1}{n} + N_{\infty}(f)\}$$

— A est donc négligeable, par suite $|f| < N_{\infty}(f) \text{ pp}$.

vii) Si $N_{\infty}(f) < +\infty$.

Soit $\beta > N_{\infty}(f) \Rightarrow |f| \leq \beta \text{ pp}$

$$N_{\infty}(f) = \inf\{\alpha \geq 0 \mid |f| \leq \alpha \text{ pp}\}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \geq 0 \mid |f| \leq \alpha \text{ pp et } N_{\infty}(f) < \alpha < N_{\infty}(f) + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \mid |f| < \alpha < \beta + \varepsilon \text{ pp} \Rightarrow |f| < \beta \text{ pp}$.

D'où $\forall \beta > \alpha \beta \in \{\alpha \geq 0 \mid |f| \leq \alpha \text{ pp}\}$.

Ainsi $\{\alpha \geq 0 \mid |f| \leq \alpha \text{ pp}\} = [N_{\infty}(f), +\infty[$.

Proposition 28 :

Soient f et g deux applications mesurables de X dans $\mathbb{K}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$). Alors on a les inégalités suivantes :

i) $N_{\infty}(f + g) \leq N_{\infty}(f) + N_{\infty}(g)$

ii) $N_{\infty}(fg) \leq N_{\infty}(f)N_{\infty}(g)$

iii) Pour tous p et $q \in [1, +\infty]$ conjugués on a :

$$N_1(fg) \leq N_p(f).N_q(g) \text{ (Hölder)}.$$

Démonstration

i) $|f + g| \leq |f| + |g| \leq N_{\infty}(f) + N_{\infty}(g) \text{ pp}$

donc $N_{\infty}(f + g) \leq N_{\infty}(f) + N_{\infty}(g)$

ii) $|fg| = |f||g| \leq N_\infty(f)N_\infty(g)$ pp
 donc $N_\infty(fg) \leq N_\infty(f)N_\infty(g)$.

iii) Si $p \in]1, +\infty[$, l'inégalité est déjà démontrée. Si $p = 1$ donc $q = +\infty$ et on sait que $|g| \leq N_\infty(g)$ pp.

Alors $N_1(fg) = \int_X |fg| d\mu \leq N_\infty(g) \int_X |f| d\mu = N_1(f)N_\infty(g)$.

Remarque 29 :

N_∞ n'est pas nécessairement une semi-norm sur $M(X, \mathbb{K})$, puisqu'elle peut prendre la valeur $+\infty$ (c'est une semi norme généralisée sur $M(X, \mathbb{K})$).

Espaces Normés

2.1 Espaces Métriques

Définition 30 *Un espace métrique (X, d) est un ensemble muni de la fonction distance*

$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, vérifiant :

$\forall x, y, z \in X$

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Exemples 31 1. $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$.

2. Démontrer que l'application $d(u, v) = \frac{|u-v|}{1+|u-v|}$ définie une distance sur $\mathbb{R}$.

Soit X un espace métrique. Alors $\forall x, y, z \in X$ $|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$.

En effet : Comme X est un espace métrique alors $\forall x, y, z \in X$ on a

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \implies d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y)$. D'autre part

$d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) \implies d(z, y) - d(z, x) \leq d(x, y)$. Donc

$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$.

Par conséquent d est 1 lipschitzienne d'où d est uniformément continue .

2.1.1 Suites de Cauchy et complétude

Dans le cas des espaces métriques, on a une caractérisation séquentielle de la complétude via la notion de suite de Cauchy.

Définition 32 Soient (E, d) un espace métrique et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

La suite (u_n) est dite de Cauchy si et seulement si :

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p, q > N) \implies d(x_p, x_q) < \epsilon$

Propriétés 33 — Toute suite de Cauchy est bornée.

- Toute suite convergente est de Cauchy.
- Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est encore de Cauchy.
- L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est encore une suite de Cauchy.
- Si une suite de Cauchy admet une suite extraite convergente, alors converge vers cette limite.

Définition 34 Un espace métrique (E, d) est dit complet si et seulement si toute suite de Cauchy de E converge dans E .

Une partie de E est dite complète si et seulement si elle est pour la distance induite (on peut donc remplacer partie par sous-espace).

Définition 35 Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques et $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ une application. φ est dite une isométrie si : $\forall x, y \in X_1, d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = d_1(x, y)$.

- On dit que l'espace (X_1, d_1) est isométrique ou (isométriquement isomorphe) à (X_2, d_2) s'il existe une isométrie $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ bijective on notera $X_1 \cong X_2$.

Théorème 36 Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques complets et soient $U \subseteq X$ et $U' \subseteq X'$.

- si $\overline{U} = X$ et $\overline{U'} = X'$ et $T : U \rightarrow U'$ est une isométrie bijective, alors il existe une isométrie bijective $\tilde{T} : X \rightarrow X'$ telle que $\tilde{T}|_U = T$, on dit que $\tilde{T}$ est une extension de T sur X dans ce cas : si $U \cong U'$ alors $X \cong X'$.

Démonstration Soit $x \in X$ comme $\overline{U} = X$, alors il existe $(x_n) \subset U$ telle que $x_n \rightarrow x$ ($d(x_n, x) \rightarrow 0$).

Supposons qu'on a d'autre suite $(y_n) \subset U$ telle que $y_n \rightarrow x$, alors (x_n) et (y_n) sont des suites de Cauchy, puisque T est une isométrie c-à-d préserve la distance, alors $(T(x_n))$ et $(T(y_n))$ sont des suites de Cauchy dans X' qui est complet ce qui implique que $(T(x_n))$ et $(T(y_n))$ convergent, par conséquent :

$$\begin{aligned} d'(\lim(T(x_n)), \lim(T(y_n))) &= \lim(d'(T(x_n), T(y_n))) \\ &= \lim d(x_n, y_n) \\ &= d(\lim x_n, \lim y_n) \\ &= d(x, x) = 0. \end{aligned}$$

(d et d' sont continues), ce qui montre qu'on peut définir une application :

$$\tilde{T} : X \longrightarrow X'$$

$$x \longmapsto \tilde{T}(x) = \lim T(x_n).$$

Montrons que $\tilde{T}$ est une isométrie.

En effet, $\forall x, y \in X$ on a :

$$\begin{aligned} d'(\tilde{T}(x), \tilde{T}(y)) &= d'(\lim(T(x_n)), \lim(T(y_n))) \\ &= \lim(d'(T(x_n), T(y_n))) \\ &= \lim d(x_n, y_n) \\ &= d(\lim x_n, \lim y_n) = d(x, y). \end{aligned}$$

Donc $\tilde{T}$ est une isométrie $\implies \tilde{T}$ est injective.

Il reste à prouver que $\tilde{T}$ est surjective. En effet : Soit $x' \in X'$ comme $\overline{U'} = X'$, alors $\exists (x'_n) \subset U'$ tq $x'_n \rightarrow x'$ dans X' , donc (x'_n) est de Cauchy. Comme T est isométrique, alors T^{-1} est isométrique, alors $T^{-1}(x'_n)$ est de Cauchy dans X qui est complet, donc $x_n = T^{-1}x'_n \rightarrow x \in X$. Donc $\tilde{T}(x) = \lim x'_n = x'$, par suite $\tilde{T}$ est surjective et ainsi $\tilde{T}$ est bijective. ■

Définition 37 *Un complété ou une complétion de l'espace métrique (X, d) est un espace métrique $(\hat{X}, \hat{d})$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\hat{X}$ est complet.
2. $(X, d) \cong$ à un sous-ensemble qui dense dans $(\hat{X}, \hat{d})$, c-à-d
 $\exists \varphi : X \rightarrow \varphi(X) \subset \hat{X} / \overline{\varphi(X)} = \hat{X}$ isométrique.

Théorème 38 (Existence d'une complétion de l'espace métrique) *Tout espace métrique admet une complétion.*

Démonstration Soit (E, d) un espace métrique.

Si $(x_n), (y_n)$ sont deux suites de Cauchy de points de E . On dit que $(x_n), (y_n)$ sont équivalentes si et seulement si la suite $d(x_n, y_n)$ converge vers zéro dans $\mathbb{R}$ (ou dans un espace vectoriel normé $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ dans E). Les classes d'équivalence seront les points de notre complété $\mathcal{E}$. On définit un prolongement naturel de E dans $\mathcal{E}$ en identifiant un point de E avec la classe de la suite stationnaire à ce point.

On va montrer successivement :

- i) $\mathcal{E}$ peut être muni d'une structure qui prolonge celle de E
- ii) pour cette topologie E est dense dans $\mathcal{E}$
- iii) $\mathcal{E}$ est complet.

Soient $\tilde{x}, \tilde{y}$ deux points de $\mathcal{E}$, ce sont les classes d'équivalence des suites de Cauchy $x = (x_n), y = (y_n)$; montrons que la suite $d(x_n, y_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$:

$$|d(x_{n+p}, y_{n+p}) - d(x_n, y_n)| \leq (d(x_{n+p}, x_n) + d(y_{n+p}, y_n)) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

uniformément en p .

On peut définir $\delta(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$; cette définition est bien cohérente, car elle ne dépend pas du choix des représentants x, y pour $\tilde{x}, \tilde{y}$ comme on le vérifie facilement; et δ satisfait les axiomes d'une distance.

(ii) Soit $x = (x_n)$ une suite représentant le point $\tilde{x}$ de $\mathcal{E}$, et soit $\tilde{x}_n$ la suite stationnaire à la valeur x_n , montrons que $\tilde{x}_n$ converge vers $\tilde{x}$ dans $(\mathcal{E}, \delta)$.

$\delta(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m)$; comme (x_n) est une suite de Cauchy, on a $d(x_n, x_m) < \epsilon$ dès que $n > n_0(\epsilon)$ et $\forall m > n$; on en déduit en passant à la limite quand m tend vers l'infini :

$\delta(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \leq \epsilon$ dès que $n > n_0(\epsilon)$ ■

(iii) Soit maintenant $\tilde{x}^{(k)}$ une suite de Cauchy de points de $\mathcal{E}$:

$\delta(\tilde{x}^{(k)}, \tilde{x}^{(k+l)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n^{(k)}, x_n^{(k+l)}) < \epsilon$ dès que $k > k_0(\epsilon)$, $\forall l \in \mathbb{N}$.

On sait d'après (ii) que chaque $\tilde{x}^{(k)}$ est approché par un point de E , soit $\tilde{y}_k$ (suite stationnaire à la valeur y_k , mettons à 2^{-k} près : $\delta(\tilde{x}^{(k)}, \tilde{y}_k) < 2^{-k}$; alors la suite (y_k) est de Cauchy dans E , en effet $d(y_k, y_{k+1}) = \delta(\tilde{y}_k, \tilde{y}_{k+1}) \leq 2^{-k} + 2^{-(k+1)} + \delta(\tilde{x}^{(k)}, \tilde{x}^{(k+1)})$ et $\tilde{x}^{(k)}$ est supposée de Cauchy dans $\mathcal{E}$.

Soit $\tilde{y}$ le point de $\mathcal{E}$ dont (y_k) est un représentant : alors $\tilde{y}$ est la limite dans $\mathcal{E}$ de la suite $\tilde{x}^{(k)}$; en effet : $\delta(\tilde{x}^{(k)}, \tilde{y}) \leq \delta(\tilde{x}^{(k)}, \tilde{y}_k) + \delta(\tilde{y}_k, \tilde{y}) \leq 2^{-k} + \delta(\tilde{y}_k, \tilde{y})$; et $\delta(\tilde{y}_k, \tilde{y})$ tend vers zéro d'après ii).

Remarque 39 *Le complété d'un espace métrique est unique à une isométrie bijective près.*

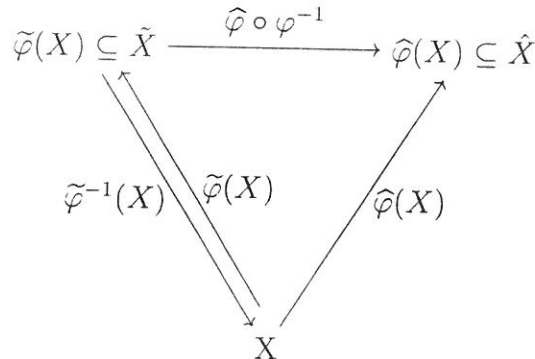
Théorème 40 *Soient $(\tilde{X}, \tilde{d})$ et $(\hat{X}, \hat{d})$ deux complétions de l'espace métrique (X, d) , alors $\tilde{X} \cong \hat{X}$.*

Démonstration Soient $\tilde{\varphi}$ et $\hat{\varphi}$ deux isométries :

$$\tilde{\varphi} : X \rightarrow \tilde{\varphi}(X) \text{ tq : } \overline{\tilde{\varphi}(X)} = \tilde{X}.$$

$$\hat{\varphi} : X \rightarrow \hat{\varphi}(X) \text{ tq : } \overline{\hat{\varphi}(X)} = \hat{X}.$$

Considérons :



Par construction $\hat{\varphi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ est une isométrie bijective de $\tilde{\varphi}(X)$ vers $\hat{\varphi}(X)$, comme $\overline{\tilde{\varphi}(X)} = \tilde{X}$ et $\overline{\hat{\varphi}(X)} = \hat{X}$. Alors d'après le théorème 36 on obtient que $\hat{X} \cong \tilde{X}$ (car $\hat{\varphi}(X) \cong \tilde{\varphi}(X)$).

2.2 Espaces Normés

Définition 41 Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est dit normé lorsqu'il est muni d'une norme, c'est-à-dire d'une application

$\mathcal{N} : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaisant les hypothèses suivantes :

- séparation : $\forall x \in E, \mathcal{N}(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$;
- homogénéité : $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$;
- sous-additivité (inégalité triangulaire) : $\forall (x, y) \in E^2, \mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$

S'il n'y a pas de risque d'ambiguïté, la norme d'un élément de x est notée $\|x\|$.

Exemples 42 — Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: on pose

$$\|A\| = \max \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Le corps $\mathbb{K}$ (égal ici à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), muni de sa valeur absolue, est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.
- Pour tout ensemble non vide X et tout espace vectoriel normé E , l'espace $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées de X dans E , muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$, est un espace vectoriel normé.

Remarque 43 Un espace vectoriel normé est un espace métrique muni de la distance $d(x, y) = \|x - y\|$, mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Une distance d est induite par une norme ssi $\forall x, y, z \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ avec X un espace vectoriel :

1. $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.
 2. $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.
- Et dans ce cas $\|x\| = d(x, 0)$.

Définition 44 Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Théorème 45 (Existence de la complétion d'un espace normé)

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors il existe un espace de Banach $\tilde{X}$ et une isométrie :

$$\varphi : X \rightarrow \tilde{X} / \overline{\varphi(X)} = \tilde{X}.$$

Dans ce cas on dit que $\tilde{X}$ est une complétion de l'espace normé X .

Démonstration C'est une conséquence du théorème 38.

2.3 Espaces Quotients

Définition 46 Soit X un espace vectoriel et F sous-espace vectoriel de X .

On définit une relation d'équivalence $x \sim_F y \iff x - y \in F$.

- La relation " $\sim_F$ " est une relation d'équivalence sur X .

- On note classe d'équivalence d'un élément $x \in X$ par :

$$\bar{x} = \{y \in X \mid x - y \in F\} = x + F$$

L'espace quotient est noté par $X/\sim_F = X/F = \{\bar{x} \mid x \in X\} = \{x + F \mid x \in X\}$, muni de l'opération $(+), (.)$ avec $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$ et $\overline{\lambda x} = \lambda \bar{x}$.

Alors l'espace X/F est un espace vectoriel car X est un espace vectoriel et F est un sous-espace vectoriel.

- L'application :

$$\mathbb{P} : X \longrightarrow X/F$$

$$x \longmapsto \bar{x} = x + F = \mathbb{P}(x)$$

est linéaire surjective.

Il convient de bien noter $\bar{0} = 0 + F = F$.

Proposition 47 Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace normé $(X, \|\cdot\|)$ alors :

$$1. \quad P : X/F \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} \bar{x} = x + F &\longmapsto P(\bar{x}) = \inf\{\|y\| \mid y \in \bar{x}\} \\ &= \inf\{\|x - z\| \mid z \in F\} \\ &= d(x, F) \end{aligned}$$

est une semi-norme.

2. Si F est fermé alors P une norme sur X/F , dans ce cas $(X/F, P)$ est un espace vectoriel normé.
3. Si X est complet et F est fermé alors X/F est un espace vectoriel normé complet c-à-d $(X/F, P)$ est un espace de Banach.

Démonstration

1. P est semi-norme car la distance donne l'inégalité triangulaire et comme F sous-espace vectoriel alors $x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x \in F$ à ce moment on obtient forcément que $P(\lambda \bar{x}) = P(\overline{\lambda x}) = \lambda P(\bar{x})$.
2. Il suffit de montrer que $P(\bar{x}) = 0 \implies \bar{x} = \bar{0}$. En effet :
Si $P(\bar{x}) = 0$ c-à-d $d(x, F) = 0$ alors $x \in \bar{F}$ comme F est fermé alors $x \in F = \bar{0}$ c-à-d $P(\bar{x}) = \bar{0}$. D'où P est une norme.

3. Puisque X et F sont des espaces vectoriels, alors X/F est un espace vectoriel. De plus F est fermé, alors $\overline{F} = F = \overline{0}$.

Donc X/F est un espace vectoriel normé, alors il suffit de montrer que X/F est complet.

Soit $(\overline{x_n}) \subset X/F$ tq $\sum \|\overline{x_n}\|$ converge.

Par définition de la norme $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|\overline{x_n}\| = \inf\{\|x_n - f_n\| \mid f_n \in F\}.$$

Par caractérisation de la borne $\inf$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists f_n \in F, \|x_n - f_n\| \leq \|\overline{x_n}\| + \frac{1}{2^n}.$$

Puisque $\sum \|\overline{x_n}\| < \infty$ et $\sum \frac{1}{2^n}$. Alors $\sum \|x_n - f_n\|$ converge, donc $\sum (x_n - f_n)$ converge absolument dans X qui est complet, d'après le théorème de caractérisation d'un espace de Banach, $\sum (x_n - f_n)$ converge.

D'ailleurs la surjection canonique est linéaire continue : $\|\pi(x)\| = \|\overline{x}\| = \inf\{\|x\| \mid x \in \overline{x}\} \leq \|x\|$

$$\pi : X \longrightarrow X/F$$

$$x \longmapsto x + F = \pi(x)$$

alors $\pi(\sum (x_n - f_n)) < \infty$.

Donc $\sum \overline{x_n} = \sum \pi(x_n) = \sum \pi(x_n - f_n) = \pi(\sum (x_n - f_n)) < \infty$. Donc $\sum \overline{x_n}$ converge dans X/F . Par suite X/F est complet.