Examen d'Analyse (Durée 2h)

Février 2017

Exercice 1

(1) Comment la fonction $x \to \arctan(x)$ est t-elle définie. Montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

(2) Montrer que la fonction $g : x \to \arctan(\frac{1}{1+x+x^2})$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée g'.

(3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan(\frac{1}{1+x+x^2})$.

(4) Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \arctan(\frac{1}{1+n+n^2})$.

(a) Donner une expression simple de $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

(b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 2

(1) Simplifier les expressions $\sin(\arcsin x)$ et $\cos(\arcsin x), x \in [0, 1]$.

(2) On définit la fonction

$$x \to f(x) = \arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2}, x \in [0, 1]$$

Montrer, en utilisant la formule d'addition du Sinus, que $\sin \circ f$ est une constatnte que l'on précisera.

(3) En déduire la relation $\arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2} = constante, x \in [0, 1]$ et déterminer la constatnte.

(4) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0, 1[$ et vérifier que votre résultat est en accord avec le résultat de la question précédente.

Exercice 3

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{e^x\sqrt{1+x} - cos^2 x}{x}$$

(1) Donner le développement limité de la fonction f à l'ordre 2 au voisinage de 0.

(2) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0, noté g.

(3) Étudier la dérivabilité de g en 0.

(4) Calculer la limite suivante: $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-\frac{3}{2}}{\ln(1+x)}$

Question de Cours

Montrer qu'une suite de réels qui est décroissante et minorée converge vers $l = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Bonne Chance

Exercice 1

1- Comment la fonction $x \to \text{Arctan}(x)$ est-elle définie ?

La fonction tan est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc tan est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-\infty, +\infty[$. (1)

tan admet donc une bijection réciproque $(\tan)^{-1}$ définie de $\mathbb{R}$ vers $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$(\tan)^{-1}$ est notée Arctan est appelée fonction Arctangente

Montrons que Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. et calculons sa dérivée.

La fonction tan est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et sa dérivée $(x \to 1+\tan^2 x)$ ne s'annulle pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc sa réciproque Arctan est dérivable sur $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$ et

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\text{Arctan})'(x) = (\tan^{-1})'(x) = \frac{1}{(\tan)'(\tan^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{(\tan)'(\text{Arctan}\,x)} = \frac{1}{1+(\tan(\text{Arctan}\,x))^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

2: Montrons que la fonction $g : x \to \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculons sa dérivée g' :

- Soit D l'ensemble de définition de g, on a :

$$x \in D \Leftrightarrow \frac{1}{1+x+x^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1+x+x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \neq 0$$

or $(\forall x \in \mathbb{R})\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4}$ 2

donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \neq 0$

d'où : $D = \mathbb{R}$.

- La fonction $x \xrightarrow{u} \frac{1}{1+x+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $g = \operatorname{Arctan} \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)'}{1+\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)^2} = \frac{\frac{-2x-1}{(1+x+x^2)^2}}{\frac{(1+x+x^2)^2+1}{(1+x+x^2)^2}} = \frac{-2x-1}{1+(1+x+x^2)^2}$$

3- Montrons que :

$(\forall x \in \mathbb{R})$ $\text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$

Soient f et g fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}\,x$ et $g(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$

f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

on a : $f'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2}$

$$= \frac{1+x^2-1-x^2-2x-1}{(1+x^2)(1+(x+1)^2)}$$

$$= \frac{-2x-1}{1+(1+x+x^2)^2} = g'(x)$$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(x) = g(x) + c$ / $c \in \mathbb{R}$

Pour $x=0$, on a : $f(0) = g(0) + c$

ie : $\text{Arctan}(1) = \text{Arctan}(1) + c$

donc : $c = 0$

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(x) = g(x)$

ie : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}\,x = \text{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$

4- $(u_n)_{n \geq 1}$ / $u_n = \text{Arctan}\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$

a- Donnons une expression simple de :

$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\sum^{n} \quad \sum^{n} \text{Arctan}\left(\frac{1}{\quad}\right)$

a- Donnons une expression simple de :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+i+i^2}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\operatorname{Arctan}(i+1) - \operatorname{Arctan}(i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Arctan}(i+1) - \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Arctan}(i)$$

$$= \sum_{i=2}^{n+1} \operatorname{Arctan}(i) - \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Arctan}(i)$$

$$= \cancel{\sum_{i=2}^{n} \operatorname{Arctan}(i)} + \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}1 - \cancel{\sum_{i=2}^{n} \operatorname{Arctan}(i)}$$

$$= \operatorname{Arctan}(n+1) - \frac{\pi}{4}$$

4

b- Montrons que (S_n) est convergente et donnons sa limite :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_{n+1} - S_n = \operatorname{Arctan}(n+2) - \frac{\pi}{4} - \operatorname{Arctan}(n+1) + \frac{\pi}{4}$$

$$= \operatorname{Arctan}(n+2) - \operatorname{Arctan}(n+1)$$

On a : $n+1 < n+2 \Rightarrow \operatorname{Arctan}(n+1) < \operatorname{Arctan}(n+2)$

$$\Rightarrow S_{n+1} - S_n > 0$$

donc (S_n) est strictement croissante.

a- Donnons une expression simple de :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1+i+i^2}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Arctan}(i+1) - \mathrm{Arctan}(i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Arctan}(i+1) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Arctan}(i)$$

$$= \sum_{i=2}^{n+1} \mathrm{Arctan}(i) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Arctan}(i)$$

$$= \cancel{\sum_{i=2}^{n} \mathrm{Arctan}(i)} + \mathrm{Arctan}(n+1) - \mathrm{Arctan}\,1 - \cancel{\sum_{i=2}^{n} \mathrm{Arctan}(i)}$$

$$= \mathrm{Arctan}(n+1) - \frac{\pi}{4}$$

4

b- Montrons que (S_n) est convergente et donnons sa limite :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_{n+1} - S_n = \mathrm{Arctan}(n+2) - \frac{\pi}{4} - \mathrm{Arctan}(n+1) + \frac{\pi}{4}$$

$$= \mathrm{Arctan}(n+2) - \mathrm{Arctan}(n+1)$$

on a : $n+1 < n+2 \Rightarrow \mathrm{Arctan}(n+1) < \mathrm{Arctan}(n+2)$

$$\Rightarrow S_{n+1} - S_n > 0$$

donc (S_n) est strictement croissante.

Exercice 2

1- Simplifions sin (Arcsin x) et sin (Arccos x) ($x \in [0, 1]$)

Les fonctions Arcsinus et Arccosinus ne font plus partie des programmes de mathématique en classes de terminales, cependant je donnerai ici un petit résumé pour que les élèves de ce niveau puissent suivre les solutions de l'exercice.

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc sinus est une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$.

La fonction sinus admet une fonction réciproque $(\sin)^{-1}$ appelée fonction Arcsinus et notée Arcsin.

On en déduit que :

$$\text{Arcsin} : [-1, 1] \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$
$$x \longmapsto \text{Arcsin}\, x$$

et telle que : $\left.\begin{array}{l} y = \text{Arcsin}\, x \\ x \in [-1, 1] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \sin y \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array}\right.$

- $(\forall x \in [-1,1])\ \sin(\text{Arcsin} x) = x$
- $(\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])\ \text{Arcsin}(\sin x) = x$
- La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et $(\forall x \in]-1,1[)\ (\text{Arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Revenons à l'exercice :

- On a, $(\forall x \in [0,1])\ \sin(\text{Arcsin} x) = x$ (Vu)
- Soit $x \in [0,1]$, on a :

$$\sin^2(\text{Arcsin} x) + \cos^2(\text{Arcsin} x) = 1$$

i.e : $x^2 + \cos^2(\text{Arcsin} x) = 1$

$$\cos^2(\text{Arcsin} x) = 1 - x^2 \geq 0$$

donc : $\cos(\text{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in [0,1]$

2- $\underline{f(x) = \text{Arcsin} x + \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2}\ ;\ x \in [0,1]}$.

<u>Montrons que la fonction $\sin \circ f$ est une constante</u> :

Soit $x \in [0,1]$, on a :

$$(\sin \circ f)(x) = \sin\left(\text{Arcsin} x + \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$= \sin(\text{Arcsin} x).\cos(\text{Arcsin}\sqrt{1-x^2}) + \cos(\text{Arcsin} x).\sin(\text{Arcsin}\sqrt{1-x^2})$$

On a : $\sin(\text{Arcsin}) = x$

$\cos\left(\text{Arcsin}\sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}^{\,2}} = \sqrt{x^2} = x$

$\cos(\text{Arcsin}\, x) = \sqrt{1-x^2}$

et $\sin\left(\text{Arcsin}\sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-x^2}$ 3

donc : $\sin \circ f(x) = x^2 + \sqrt{1-x^2}^{\,2} = 1$

Ainsi : $(\forall x \in [0,1])\ (\sin \circ f)(x) = 1$

$\sin \circ f$ est donc la fonction constante sur $[0,1]$ de valeur 1.

3- <u>En déduire la relation :</u>

<u>$\text{Arcsin}\, x + \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2} = \text{cste} \quad (x \in [0,1])$</u>

Soit $x \in [0,1]$, on a : $\sin(f(x)) = 1$

donc : $\text{Arcsin}\left[\sin(f(x))\right] = \text{Arcsin}(1)$

ie : $f(x) = \frac{\pi}{2}$

ie : $(\forall x \in [0,1])\ \text{Arcsin}\, x + \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$.

4- <u>Calculons $f'(x)$ pour $x \in]0,1[$ et vérifions le résultat de la question 3 :</u>

i : $(\forall x \in [0,1])$

4- Calculons $f'(x)$ pour $x \in]0,1[$ et vérifions le résultat de la question 3 :

f est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout $x \in]0,1[$,

on a : $f'(x) = (\text{Arcsin} x)' + (\text{Arcsin}\sqrt{1-x^2})'$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{(\sqrt{1-x^2})'}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

4

donc : f est constante sur $]0,1[$

Pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a : $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \text{Arcsin}\sqrt{1-\frac{1}{2}}$

$$= 2 \times \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

de plus : $f(0) = \text{Arcsin}\, 0 + \text{Arcsin}\, 1 = \frac{\pi}{2}$

et $f(1) = \text{Arcsin}\, 1 + \text{Arcsin}\, 0 = \frac{\pi}{2}$

donc : $(\forall x \in [0,1])$ $f(x) = \frac{\pi}{2}$

ce qui confirme le résultat de la question 3.