Université Moulay Ismail
FST-Errachidia
Département de Mathématiques
Responsables: Profs M.R. Sidi Ammi et A. Hafidi

Année Universitaire 2019–2020
Filière MIP
Module M111

Examen d'Analyse 1 (durée : 2h)
Janvier 2020

Tout document est interdit. Le téléphone portable est également interdit.

Exercice 1.

Soit
$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(\frac{\sin x}{x})$$

1) Peut-on prolonger f en une fonction continue, dérivable en $x = 0$?

2) Préciser alors la position de la courbe vis à vis de sa tangente.

Exercice 2. On considère deux réels strictement positifs a et b. On définit les suites (u_n) et (v_n) en posant $u_0 = a, v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ les relations de récurrence:
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \\ \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}\right) \end{cases}$$

1. Étant donné deux réels strictement positifs x, y, montrer que $\frac{x+y}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$. Dans quel cas a-t-on l'égalité?

2.
   a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, les nombres u_n et v_n sont bien définis et que $u_n \geq v_n$.

   b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

   c) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n - v_n|$. Déduiser-en que $(u_n - v_n)_{n\geq 0}$ est convergente vers 0 et concluer.

3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le produit $u_n v_n$.

4. Déduiser-en la limite commune des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 3.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots x^n.$$

1) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $[0, +\infty[$. Calculer x_1 et x_2.

b) Montrer que si $n \geq 2$, alors $x_n \in]0, 1[$.

c) En comparant les nombres $f_{n+1}(x_{n+1}), f_n(x_{n+1})$ et $f_n(x_n)$, montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, puis convergente. On pose $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2) a) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^{n+1} = 0$.

b) Donner une formule pour $f_n(x)$ dès que $x \neq 1$.

c) En déduire que $l = \frac{1}{2}$.

3) On pose $h_n = x_n - \frac{1}{2}$.

a) Montrer que $(\frac{1}{2} + h_n)^{n+1} = 2h_n$. En déduire que : $h_n = o((\frac{2}{3})^n)$.

b) Conclure que : $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}} + o(\frac{1}{2^n})$.

Bonne chance.

Examen d'analyse 1
Janvier 2020.

Exercice 1 :

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

1) Il faut calculer $\lim_{x \to 0} f(x)$.

On a : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$

$\Rightarrow \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$

avec $u = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$

et $u^2 = \frac{x^4}{36}$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + o(x^4)$

$= \frac{-x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4)$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{x}{6} - \frac{x^3}{180} + o(x^3)$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} -\frac{x}{6} - \frac{x^3}{180} + o(x^3) = 0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f est prolongeable par continuité en 0

par g tq : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D_f \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

* g dérivable en 0 ??

$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$

$= \lim_{x \to 0} -\frac{1}{6} - \frac{x^2}{180} + o(x^2)$

$= -\frac{1}{6} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ g dérivable en 0.

conclusion: on peut prolonger f par une fonction continue et dérivable en 0.

e) La position de la courbe:

* l'equation de la tangente en 0:

$$y = -\frac{1}{6}x.$$

on a: $f(x) - y = -\frac{x^3}{180} + o(x^3)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)-y > 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x)-y < 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ { la courbe est en dessus de la tangente si $x < 0$
la courbe est en dessous de la tangente si $x > 0$.

Exercice 2:

1) soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2xy$

$\Rightarrow x^2+y^2+2xy \geq 4xy \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$

$\Rightarrow \frac{(x+y)^2}{2} \geq 2xy \Rightarrow \frac{(x+y)^2}{2} \geq \frac{2xy}{x+y}$

$\Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \frac{2xy}{x+y} = \frac{2y}{1+\frac{y}{x}} = \frac{2}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}$

$\Rightarrow \forall x,y \in \mathbb{R}_+^*\ \frac{x+y}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

* $\frac{x+y}{2} = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \Rightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{2xy}{x+y} \Rightarrow (x+y)^2 = 4xy$

$\Rightarrow x^2+y^2+2xy = 4xy \Rightarrow x^2+y^2-2xy = 0$

$\Rightarrow (x-y)^2 = 0 \Rightarrow x = y$

2)
a- u_n et v_n sont bien défini si :
$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$ et $v_n > 0$
pour $n = 0$ $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$
Supposons que $u_n > 0$ et $v_n > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{u_n + v_n}{2} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}\right) > 0 \Rightarrow v_{n+1} > 0 \end{cases}$$

Donc D'après le principe de récurence
$\forall n \in \mathbb{N}$ u_n et $v_n > 0$.
$\Rightarrow$ les nombre u_n et v_n sont bien définis.
* Montrons que $\forall n \geq 1$ $u_n \geq v_n$.
Démonstrations par récurence :
pour $n = 1$:
on a $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ $\Rightarrow$ D'après Q1 $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

$$\Rightarrow \frac{u_0 + v_0}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{u_0} + \frac{1}{v_0}}$$

$$\Rightarrow u_1 \geq v_1$$

Supposons $u_n \geq v_n$:
comme u_n et $v_n > 0$ $\Rightarrow$ $\frac{u_n + v_n}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}}$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq v_{n+1}$$

$\Rightarrow$ D'après le principe de récurence $\forall n \geq 1$
$u_n \geq v_n$.

b)

* la suite (u_n) décroissante :

on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2}$

$= \frac{v_n - u_n}{2} \leq 0$ car $u_n \geq v_n$.

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0 \Rightarrow (u_n)$ décroissante.

* la suite (v_n) croissante :

$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} - v_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - v_n = \frac{2u_n v_n - u_n v_n - v_n^2}{u_n + v_n}$

$= \frac{u_n v_n - v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{v_n(u_n - v_n)}{u_n + v_n}$

Comme $\frac{v_n}{u_n + v_n} \geq 0$ et $u_n - v_n \geq 0$

$\Rightarrow v_{n+1} - v_n \geq 0 \Rightarrow (v_n)$ croissante.

c) montrons que $n \geq 0$ $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n - v_n|$

pour $n = 0$:

$|a - b| \leq |a| + |b| = a + b = |a + b| \Rightarrow \left|\frac{a-b}{a+b}\right| \leq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{(a-b)^2}{(a+b)}\right| \leq \frac{1}{2}|a - b|$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a + b}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a + b} - \frac{4ab}{a+b}\right| \leq \frac{1}{2}|a - b|$

$\Rightarrow \left|\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b}\right| = \left|\frac{a+b}{2} - \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right| \leq \frac{1}{2}|a - b|$

$\Rightarrow |u_1 - v_1| \leq \frac{1}{2}|u_0 - v_0|$

pour $n \geq 1$:

$|u_{n+1} - v_{n+1}| = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}}$

$= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$

$\Rightarrow |u_{n+1} - v_{n+1}| = \frac{1}{2(u_n+v_n)} \left((u_n+v_n)^2 - 4u_nv_n \right)$

$= \frac{1}{2(u_n+v_n)} (u_n - v_n)^2$

aussi on a $\frac{1}{2}|u_n - v_n| = \frac{1}{2}(u_n - v_n)$

$\Rightarrow |u_{n+1} - v_{n+1}| - \frac{1}{2}|u_n - v_n| = \frac{1}{2(u_n+v_n)} \times (u_n - v_n)^2 - \frac{1}{2}(u_n - v_n)$

$= \frac{1}{2}(u_n - v_n)\left(\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n} - 1 \right)$

$= \frac{1}{2}(u_n - v_n)\left(\frac{u_n - v_n - u_n - v_n}{u_n + v_n} \right) = \frac{1}{2}(u_n - v_n) \times \frac{1}{u_n+v_n}(-2v_n)$

$= -v_n \frac{(u_n - v_n)}{u_n + v_n} \leqslant 0$

$\Rightarrow |u_{n+1} - v_{n+1}| - \frac{1}{2}|u_n - v_n| \leq 0$

$\Rightarrow |u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n - v_n|$

conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \; |u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n - v_n|$.

on a $|u_n - v_n| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - v_{n-1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |u_{n-2} - v_{n-2}| \leq \cdots$

$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - v_0|$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} |u_n - v_n| \leq \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - v_0| = 0$ car $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Dun $\lim_{n \to +\infty} |u_n - v_n| = 0$

D'ou $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

conclusions:

$u_n \geqslant v_n$, (u_n) décroissante et (v_n) croissante,

$(u_n - v_n) \to 0 \Rightarrow u_n$ et v_n sont adjacente.

Donc u_n et v_n sont convergente et ont la même limite ℓ.

3) Calculons le produit $u_n v_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

posons $w_n = u_n v_n$.

pour $n = 0$ $w_0 = u_0 v_0 = ab$.

pour $n \geq 0$

$$w_{n+1} = u_{n+1} \times v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \times \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} = \frac{u_n + v_n}{2} \times \frac{2 u_n v_n}{u_n + v_n}$$

$$= u_n v_n.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_0 = u_0 v_0 = ab. \\ w_{n+1} = u_{n+1} v_{n+1} = u_n v_n = w_n \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $w_n = u_n v_n = ab$.

4) on a $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = ab$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = \ell^2 = ab$.

$\Rightarrow \ell = \mp \sqrt{ab}$.

comme $u_n > 0 \Rightarrow \ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geq 0$

$\Rightarrow \ell = \sqrt{ab}$.

Exercice 3 :

$n \geq 1$, $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$.

1) a : posons $g_n(x) = f_n(x) - 2 = -1 + x + x^2 + \dots + x^n$.

- g_n est continue sur $[0, +\infty[$.
- $g_n(0) = -1 < 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty > 0$

TVI $\Rightarrow \exists\, x_n \in [0, +\infty[$ tq $g_n(x_n) = 0$

or $g_n'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + n x^{n-1} > 0 \;\; \forall n \in [0, +\infty[$

$\Rightarrow g_n$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

$\Rightarrow x_n$ est unique.

$\Rightarrow \exists!\, x_n \in [0, +\infty[$ tq $g_n(x_n) = 0$

$\Rightarrow \exists!\, x_n \in [0, +\infty[$ tq $f_n(x_n) - 2 = 0$

$\Rightarrow \exists!\, x_n \in [0, +\infty[$ tq $f_n(x_n) = 2$.

* calculons x_1 et x_2 :

- x_1 solution de $f_1(x) = 2 \iff 1 + x_1 = 2$

  $\Rightarrow x_1 = 1$

- x_2 solution de $f_2(x) = 2 \iff 1 + x_2 + x_2^2 = 2$

  $\iff x_2^2 + x_2 - 1 = 0 \qquad \Delta = 1 + 4 = 5$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \\ \text{ou} \\ x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0 \end{cases}$$

comme $x_2 \in [0,+\infty[$

$\Rightarrow x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

b) . Montrons que si $n \geq 2$ $x_n \in]0,1[$:

posons $g_n(x) = f_n(x) - 2 = -1 + x + x^2 + \dots + x^n$ continue sur $[0,1]$

- $g_n(0) = -1 < 0$

- $g_n(1) = -1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n-1 > 0$ car $n \geq 2$.

TVI $\Rightarrow \exists x_n \in]0,1[$ tq $g_n(x_n) = 0$

Comme $g_n'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} > 0$ sur $]0,1[$

$\Rightarrow g_n$ strictement croissante sur $]0,1[$

$\Rightarrow x_n$ est unique.

Donc $\exists! x_n \in]0,1[$ tq $g_n(x_n) = 0$

$\Rightarrow \exists! x_n \in]0,1[$ tq $f_n(x_n) - 2 = 0$

$\Rightarrow \exists! x_n \in]0,1[$ tq $f_n(x_n) = 2$.

c) x_{n+1} est solutions de $f_{n+1}(x) = 2 \Rightarrow f_{n+1}(x_{n+1}) = 2$.

x_n est solution de $f_n(x_n) = 2 \Rightarrow f_n(x_n) = 2$.

$f_n(x_{n+1}) = 1 + x_{n+1} + x_{n+1}^2 + \dots + x_{n+1}^n$.

$f_{n+1}(x_{n+1}) = 2 = 1 + x_{n+1} + x_{n+1}^2 + \dots + x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n+1}$

$\Rightarrow 2 - x_{n+1}^{n+1} = 1 + x_{n+1} + \dots + x_{n+1}^n = f_n(x_{n+1})$

$\Rightarrow f_n(x_{n+1}) = 2 - x_{n+1}^{n+1} \leq 2$ car $x_{n+1} \geq 0$

$\Rightarrow f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1})$

* on a $f_n'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} > 0 \ \forall x \in [0, +\infty[$

$\Rightarrow f_n$ est croissante sur $[0, +\infty[$.

comme : $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$

f_n croissante $\Rightarrow x_{n+1} \leq x_n$

$\Rightarrow (x_n)$ est décroissante.

comme (x_n) décroissante minoré par 0

$\Rightarrow (x_n)$ est convergente.

e) a :

on a (x_n) décroissante

$\Rightarrow \forall n \geq 2 \quad 0 \leq x_n \leq x_2 < 1$

$\Rightarrow \forall n \geq 2 \quad 0 \leq (x_n)^{n+1} \leq (x_2)^{n+1} < 1$

$\Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} (x_n)^{n+1} \leq 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} (x_2)^{n+1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (x_n)^{n+1} = 0$

b) $f_n(x)$ est la somme des termes d'une suite géomé-trique :

$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \dfrac{1 - x_n^{n+1}}{1 - x}$

c) $f_n(x_n) = 2 = \dfrac{1 - (x_n)^{n+1}}{1 - x_n}$

$\Rightarrow 2 - 2x_n = 1 - (x_n)^{n+1}$

$\Rightarrow \dfrac{1 + (x_n)^{n+1}}{2} = x_n$.

$\Rightarrow l = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 + (x_n)^{n+1}}{2} = \dfrac{\cancel{2}}{2}$

car $(x_n)^{n+1} \longrightarrow 0$

$\Rightarrow l = 1/2$

3) on pose $h_n = x_n - \frac{1}{2}$:

a - on a $\begin{cases} (\frac{1}{2} + h_n)^{n+1} = (\frac{1}{2} + x_n - \frac{1}{2})^{n+1} = x_n^{n+1} \\ 2h_n = 2x_n - 1 = 2 \times \left(\frac{1 + (x_n)^{n+1}}{2}\right) - 1 = x_n^{n+1} \end{cases}$

$\Rightarrow (\frac{1}{2} + h_n)^{n+1} = 2h_n$.

* $h_n = o((\frac{2}{3})^n) \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{h_n}{(\frac{2}{3})^n} = 0$

$\iff \lim\limits_{n\to+\infty} h_n \times (\frac{3}{2})^n = 0$

on a $\begin{cases} h_n = x_n - \frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0 \\ h_n \text{ décroissante} \Rightarrow h_n \geq 0 \end{cases}$

$h_n \to 0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ tq $n \geq n_0$ $|h_n| < \varepsilon$

pour $\varepsilon = \frac{1}{8}$, $\exists n_0$ tq $n \geq n_0$ $|h_n| = h_n < \frac{1}{8}$

$\Rightarrow \exists n_0$ tq $n \geq n_0$ $0 \leq h_n < \frac{1}{8}$

$\Rightarrow \exists n_0$ tq $n \geq n_0$ $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + h_n < \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$

$\Rightarrow \exists n_0$ tq $n \geq n_0$ $0 < (\frac{1}{2} + h_n)^{n+1} < (\frac{5}{8})^{n+1}$

$\Rightarrow \exists n_0$ tq $n \geq n_0$ $0 < 2h_n < (\frac{5}{8})^{n+1}$

$\Rightarrow \exists n_0$ tq $n \geq n_0$ $0 < h_n \times (\frac{3}{2})^n < \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} \times (\frac{5}{8} \times \frac{3}{2})^n$

$\Rightarrow \exists n_0$ tq $n \geq n_0$ $0 < h_n \times (\frac{3}{2})^n < \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} \times (\frac{15}{16})^n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} h_n (\frac{3}{2})^n = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{h_n}{(\frac{2}{3})^n} = 0$

$\Rightarrow h_n = o((\frac{2}{3})^n)$

On a $x_n = \frac{1}{2} + h_n$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}} + h_n - \frac{1}{2^{n+2}}$$

il suffit de mq $h_n - \frac{1}{2^{n+2}} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$

c-à-d $2^n\left(h_n - \frac{1}{2^{n+2}}\right) \longrightarrow 0$

c-à-d $\frac{1}{4}\left(2^{n+2} h_n - 1\right) \longrightarrow 0$

c-à-d $2^{n+2} h_n - 1 \longrightarrow 0$

On $2^{n+2} h_n = 2^{n+2}\left(\frac{1}{2} + h_n\right)^{n+2} = (1 + 2h_n)^{n+2}$

$$= e^{(n+2)\ln(1+2h_n)}$$

alors il suffit de mq $(n+2)\ln(1+2h_n) \longrightarrow 0$

On a $\ln(1+2h_n) = 2h_n + o(2h_n)$

alors $(n+1)\ln(1+2h_n) = 2(n+1)h_n + o((n+1)h_n)$

On a $2(n+1)h_n = (n+1)\left(\frac{1}{2} + h_n\right)^{n+1} = (n+1)e^{(n+1)\ln\left(\frac{1}{2}+h_n\right)}$

On $h_n \longrightarrow 0$ alors $\exists N_0$ tq $h_n < \frac{1}{4}$ $\forall n \geq N_0$

alors $(n+1)e^{(n+1)\ln\left(\frac{1}{2}+h_n\right)} \leq (n+1)e^{(n+1)\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \longrightarrow 0$

alors $(n+1)e^{(n+1)\ln\left(\frac{1}{2}+h_n\right)} \longrightarrow 0$ donc $(n+1)\ln(1+2h_n) \longrightarrow 0$

donc $2^{n+2} h_n = e^{(n+2)\ln(1+2h_n)} \longrightarrow 1$

alors $h_n - \frac{1}{2^{n+2}} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$