Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia
Année Universitaire : 2016-2017

11,50

نماذج امتحانات

EXEMPLE EXAMENS

ANALYSE 3
&
[redacted]

CORR[illegible]ER

MIP – S3

5

FSTM C[illegible] RE

UH2 | FST

Faculté des Sciences et Techniques - Mohammedia

Université Hassan II de Casablanca

UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Faculté des Sciences et Techniques- Mohammedia

Département de Mathématiques
Module M135

A.U: 2018/2019
Semestre S3

Examen d'analyse 3
Décembre 2018 (1H 45 mn)

Exercice 0.1 9,5

1. Soit l'intégrale double $I = \iint_D yx^2 dxdy$; où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq x\}$.

   (a) *Représentation de D* **(0.5 point)**

   (b) *Calculer l'integrale double* $I = \iint_D yx^2 dxdy$ **(1.5 points)**.

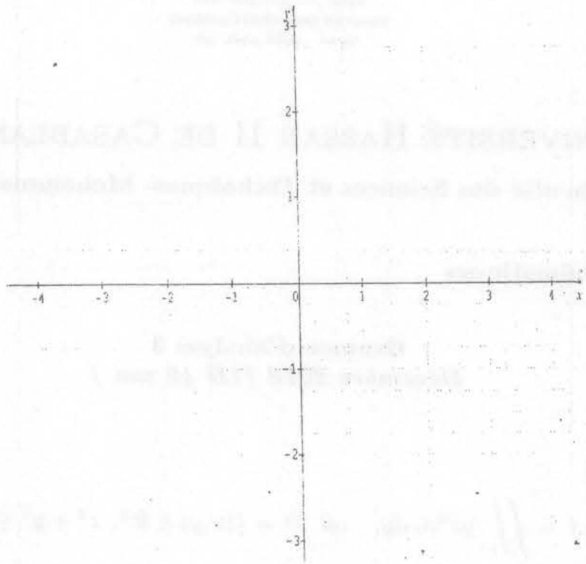
....

....

....

2. Soit l'intégrale double $I = \displaystyle\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$; où $D : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

(a) *Représentation de D* **(0.5 point)**.



(b) *Donner un changement de variables en (r,θ)* **(0.5 pt+0.5 pt)**.

$x = r\cos(\theta)$, ... $\leq r \leq$ ....

$y = r\sin(\theta)$, ... $\leq \theta \leq$ ....

(c) *Ecrire l'intégrale sous forme $I = \displaystyle\iint_U \varphi(r,\theta)\,drd\theta$, où le domaine U et la fonction φ sont à déterminer* **(0.5pt+ 0.5pt)**.

....

....

....

(d) *Calculer I* **(0.5 pt)**.

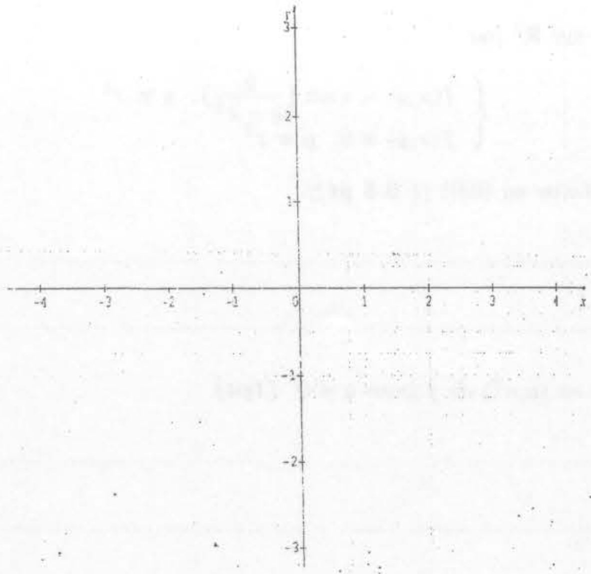
....

....

....

3. Soit l'integrale double $I = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy$; où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 9,\ x^2 + y^2 \geq 2x,\ x \geq 0\}$

(a) Représentation de D **(1 pt)**. .



(b) Donner un changement de variables en (r,θ) **(0.5pt+ 0.5pt)**.

$x = r\cos(\theta)$, ... $\leq r \leq$ ....

$y = r\sin(\theta)$, ... $\leq \theta \leq$ ....

(c) Ecrire l'intégrale sous forme $I = \iint_U \varphi(r,\theta)drd\theta$, où le domaine U et la fonction φ sont à déterminer **(0.5 pt+ 0.5 pt)**.

....

....

....

....

(d) Calculer I **(1.5 pts)**.

....

....

....

On rappelle: $\cos^4(\theta) = \frac{1}{8}(3 + 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta))$.

Exercice 0.2 B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{cases} f(x,y) = x\sin\left(\frac{y}{y-x^2}\right), & y \neq x^2 \\ f(x,y) = 0, & y = x^2 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en $(0,0)$ ((**0.5 pt**)).

....

....

2. Etudier la continuité en (a,a^2) de f pour $a \neq 0$ (**1pt**).

....

....

....

3. Calculer pour $y \neq x^2$ (**1pt+ 1pt**).

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=$...

....

....

(b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=$...

....

....

4. Calculer (**0.5 pt+ 0.5 pt**).

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0.0)=$...

....

(b) $\frac{\partial f}{\partial y}(0.0)=$...

....

5. *Etudier la différentiabilité de f en $(0,0)$* (**1.5 pt**).

Exercice 0.3

4,5

Soit l'équation aux dérivées partielles

$$(E): \quad (x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2f(x,y).$$

On suppose que $f(x,y) = u(x).v(\ln(y))$, *où* u *et* v *sont de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $]1,+\infty[$ *et* $]0,+\infty[$ *respectivement.*

1. *Calculer* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ *en fonction de* u, v *et leurs dérivées premières et secondes* **(0.5pt+0.5pt+ 1pt)**.

2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$

   $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$

   $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) =$

3. *En deduire une équation différentielle vérifiée par* u *et* v *(On ne demande pas la résolution)* **(2.5 pts)**.

4. Étudier la $\mathscr{C}^1$-régularité de f sur $\mathbb{R}^2$. (1.5 pts)

Exercice 6.3

Soit l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad (x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y).$$

On suppose que $f(x,y) = g(u,v)$, où u et v sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times]0,+\infty[$.

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ en fonction de u, v et leurs dérivées partielles.

2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$

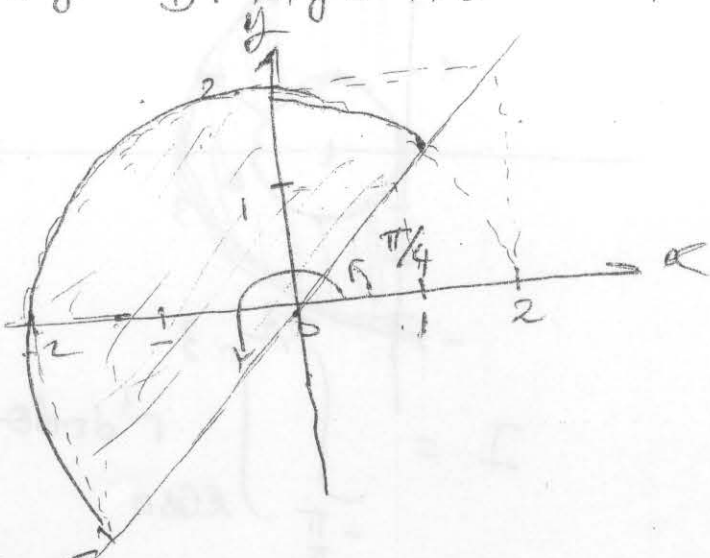
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) =$

3. En déduire une équation différentielle vérifiée par g en u. (On ne demande pas la résolution). (1.5 pts)

M135

EXO-1 1 - $I=\iint_D yx^2\,dx\,dy$ $D:\ x^2+y^2\leq 4;\ y\geq x$

$$\begin{cases} x=r\cos\theta,\ 0\leq r\leq 2\\ y=r\sin\theta,\ \frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{5\pi}{4}\end{cases}$$



$$I=\int_0^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{5}} r^4\cos^2\theta.\sin\theta\,dr\,d\theta$$

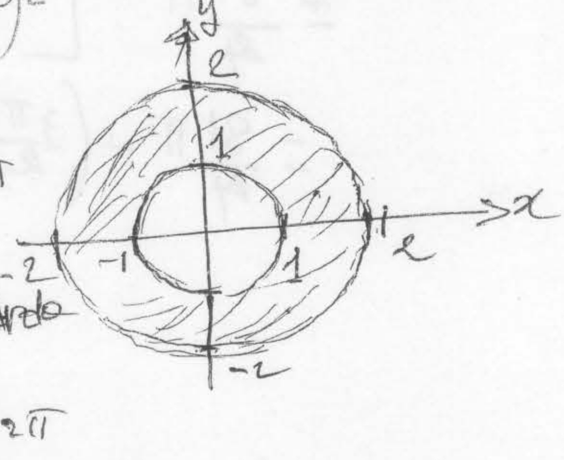
$$=\int_0^2 r^4dr.\int_{\pi/4}^{\frac{5\pi}{4}}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$=\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{5\pi/4}=\frac{32}{15}\left(\cos^3\frac{\pi}{4}-\cos^3\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{32}{15}\left(\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^3-\left(\frac{-\sqrt2}{2}\right)^3\right)$$

$$=\frac{32}{15}.2\frac{(\sqrt2)^3}{2^3}=\frac{32.2.2\sqrt2}{15.8}=\frac{16\sqrt2}{15}$$

2. $I=\iint_D\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$; $D:\ 1\leq x^2+y^2\leq 4$

$$\begin{cases} x=r\cos\theta,\ 1\leq r\leq 2\\ y=r\sin\theta,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\end{cases}$$

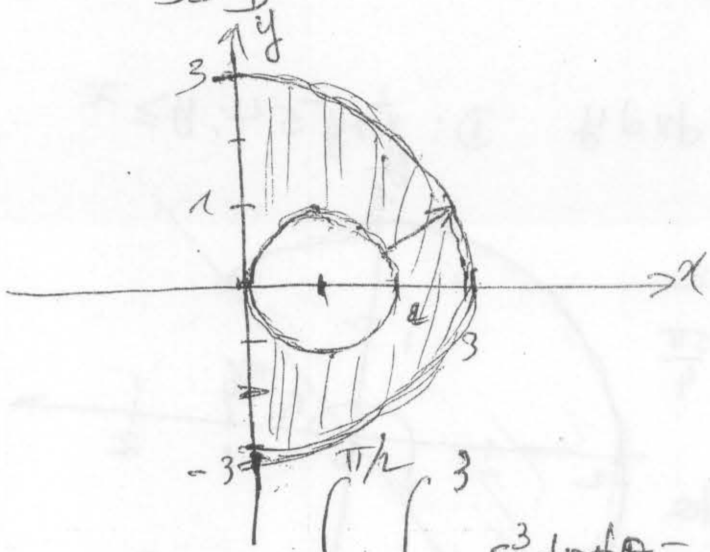


$$I=\int_1^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\cos\theta\sin\theta\,dr\,d\theta$$

$$=\left[\frac{\ln r}{2}\right]_1^2\left[\frac{\sin\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=0$$

$$=\frac{1}{2}\ln(2).(\sin 2\pi-\sin 0)=0$$

$$3.\quad I = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy \qquad D \begin{cases} x^2+y^2 \le 9 \\ x^2+y^2 \ge 2x, \\ x \ge 0. \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$2r\cos\theta \le r^2 \le 9$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\int_{2\cos\theta}^{3} r^3\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int_{2\cos\theta}^{3} r^3\,dr\right]d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{2\cos\theta}^{3} d\theta = \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(81 - 16\cos^4\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(81 - 16\cos^4\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{81}{4}\pi - \int_0^{\pi/2}\left(3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{81}{4}\pi - \left[3\theta + 2\sin(2\theta) + \frac{1}{4}\sin(4\theta)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{81}{4}\pi - \left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{75}{4}\pi$$

EXO-2

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{y}{y-x^2}\right) & , y\neq x^2 \\ 0 & y=x^2 \end{cases}$$

1 - $\forall (x,y) : y \neq x^2$ $\quad \left|f(x,y)-f(0,0)\right| = |x|\left|\sin\left(\frac{y}{y-x^2}\right)\right|$

$$\leq |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

D'où la continuité en $(0,0)$

2- soit (a,a^2) ; $a \neq 0$

$$\left|f(x,y)-f(a,a^2)\right| = |x|\left|\sin\left(\frac{y}{y-x^2}\right)\right|$$

pour $(x,y) \to (a,a^2)$ $\quad \left|\frac{y}{y-x^2}\right| \longrightarrow +\infty$

et $|x| \longrightarrow |a|$ donc la limite n'existe pas

3- soit (x,y) : $y \neq x^2$

a/ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin\left(\frac{y}{y-x^2}\right) + x\cdot\left(\frac{y}{y-x^2}\right)'_x \cos\left(\frac{y}{y-x^2}\right)$

$$= \sin\left(\frac{y}{y-x^2}\right) + \frac{2x^2y}{(y-x^2)^2}\cdot\cos\left(\frac{y}{y-x^2}\right)$$

b/ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\left(\frac{y}{y-x^2}\right)'_y \cos\left(\frac{y}{y-x^2}\right)$

$$= x\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -x^2 \end{vmatrix}}{(y-x^2)^2}\cos\left(\frac{y}{y-x^2}\right)$$

$$= \frac{-x^3}{(y-x^2)^2}\cos\left(\frac{y}{y-x^2}\right)$$

4- a/ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$

b/ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$

5- $\lim_{\substack{(h,k) \to (0,0) \\ k = 2h}} \frac{|f(h,k) - f(0,0)|}{\sqrt{h^2+k^2}} =$

$\lim_{\substack{(h,k) \to (0,0) \\ k = 2h}} \frac{|h| \left|\sin\left(\frac{k}{k - h^2}\right)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h \to 0} \frac{|h| \left|\sin\left(\frac{2h}{3h^2}\right)\right|}{\sqrt{5h^2}}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\left|\sin\left(\frac{2}{3h}\right)\right|}{\sqrt{5}}$ pas de limite

<u>EXO-3</u> (E) : $(x-1) f'_x + y^2 f''_{y^2} + y f'_y = 2f$

$f(x,y) = u(x) \cdot v(\ln(y))$

$f'_x = v(\ln(y)) \cdot u'(x)$

$f'_y = \frac{u(x)}{y} \cdot v'(\ln(y))$

$f''_{y^2} = u(x) \cdot \left(\frac{v'(\ln(y))}{y}\right)'_y$

$= u(x) \cdot \frac{y \frac{v''(\ln(y))}{y} - v'(\ln(y))}{y^2}$

$= u(x) \cdot \frac{v''(\ln(y)) - v'(\ln(y))}{y^2}$

(E) $\Leftrightarrow$ $(x-1)\, v(\ln(y)) \cdot u'(x) + u(x) \cdot v''(\ln(y)) - \cancel{u(x)\, v'(\ln(y))}$
$+ \cancel{u(x)\, v'(\ln(y))} = 2u(x) \cdot v(\ln(y))$

$$(E) \iff u(x).v''(\ln(y)) + (x-1)u'(x).v'(\ln(y)) = 2u(x).v(\ln(y))$$

$$(E) \iff \boxed{(x-1)\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v''(\ln(y))}{v(\ln(y))} = 2}$$

M135
Amphi V remplacé par

F1S3 44 étudiants
(Fahssi.A + Abchir)

F1S4 43 étudiants
Amine + Moussaoud

UNIVERSITÉ HASSAN-II -CASA-MOHAMMEDIA
Faculté des Sciences et Techniques
Mohammedia

Département de Mathématiques

A.U: 2014/2015

Premier partiel du 11.11.2014: durée 2 h

Exercice 0.1
(1+1+1=3 pts)

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \to f(x,y)$.
et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par: $g(u,v,w) = \sin\left(f(v^2,u.w) - e^v\right)$.
Calculer les dérivées partielles premières de g au moyen de celles de f.

Exercice 0.2
(4.5 pts).

soit f la fonction de trois variables définie par:

$$\begin{cases} f(x,y) = (x^2 - y^2)\sin\left(\dfrac{x}{x-y}\right), & \text{si } x \neq y \\ f(x,y) = 0, & \text{si } x = y \end{cases}$$

1. Donner D_f le domaine de définition de f et étudier la continuité au point (a,a) pour $a \in \mathbb{R}$. (0. pts)
2. Calculer les dérivées partielles premières par rapport à x et y en tout point (x,y) pour $x \neq y$ de (0.5+0.5 pts)
3. Calculer les dérivées partielles premières par rapport à x et y en tout point (a,a) pour $a \in$ (0.5+0.5 pts)
4. Étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$. (1 p

Exercice 0.3
(2+2 pts).

1. $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1} \frac{xe^{2y}}{4-y}dxdy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$.
2. $I_2 = \displaystyle\iiint_{\Omega} (x^2+y^2)dydxdz$, où Ω set le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par les paraboloides $z = 8 - x^2 -$ et $z = x^2 + y^2$

Exercice 0.4
(3.5 pts)

Soit la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2 - e^{2\arctan(y/x)}$.

1. Montrer que l'équation $f(x,y) = 0$ définit, au voisinage de $x = 1$, une fonction implicite $y = \phi(x)$ pts) $y=0$
2. Calculer la dérivée de ϕ. (0.5 p
3. Donner le développement limité à l'ordre de 3 de ϕ en 1. (2 p

ercice 0.5
pts).

Soit f la fonction donnée par: $f(x,y) = x\ln(x) + y\ln(y) + (3-x-y)\ln(3-x-y)$.

1. *Donner D_f le domaine de définition de f.* (0.5 pts)
2. *Démontrer que f est de classe C^2 sur D_f et expliciter les dérivées partielles de f d'ordre 1 et d'ordre 2 en tout point (x,y) de D_f.* (2 pts)
3. *Déterminer les points critiques de f et étudier les extrema locaux éventuels de f.* (1.5 pts)
4. *Soient les applications f et h données par:* $\begin{cases} g(x,y,z) = x\ln(x) + y\ln(y) + z\ln z \\ h(x,y,z) = x+y+z-3. \end{cases}$

   Étudier les extremums locaux liés de g par la contrainte $h(x,y,z)=0$? (0.5 pts)

Groupe: M.HARFAOUI- S. SAJID

UNIVERSITE HASSAN-II -CASA-MOHAMMEDIA
Faculté des Sciences et Techniques
Mohammedia

Départemnet de Mthématiques **A.U: 2014/2015**

Corrigé du premier partiel du 11.11.2014: durée 2 h

Exercice 0.1
(1+1+1=3 pts)

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \to f(x,y)$.
et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par: $g(u,v,w) = \sin\left(f(v^2,u.w) - e^v\right)$.
Calculer les dérivées partielles premières de g au moyen de celles de f.

Solution 0.1

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \to f(x,y)$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par: $g(u,v,w) = \sin\left(f(v^2,u.w) - e^v\right)$.

$$* \quad \begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v,w) &= \left(f(v^2,u.w) - e^v\right)'_u \cos\left(f(v^2,u.w) - e^v\right)\\ &= \left(w.\frac{\partial f}{\partial y}(v^2,u.w)\right)\cos\left(f(v^2,u.w) - e^v\right).\end{aligned}$$

$$* \quad \begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v,w) &= \left(f(v^2,u.w) - e^v\right)'_v \cos\left(f(v^2,u.w) - e^v\right)\\ &= \left(2v.\frac{\partial f}{\partial x}(v^2,u.w) - e^v\right)\cos\left(f(v^2,u.w) - e^v\right)\end{aligned}$$

$$* \quad \begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial vw}(u,v,w) &= \left(f(v^2,u.w) - e^v\right)'_w \cos\left(f(v^2,u.w) - e^v\right)\\ &= \left(u.\frac{\partial f}{\partial y}(v^2,u.w))\right)\cos\left(f(v^2,u.w) - e^v\right)\end{aligned}$$

Exercice 0.2
(4.5 pts).

soit f la fonction de deux variables définie par:

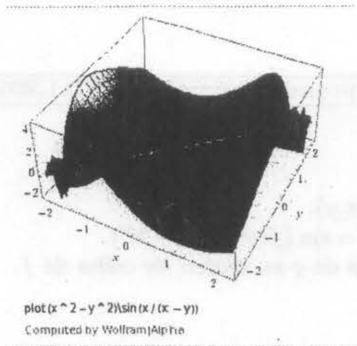
$$f(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y) = (x^2 - y^2)\sin\left(\dfrac{x}{x-y}\right), & si\ x \neq y\\ f_2(x,y) = 0, & si\ x = y\end{cases}$$

1. *Donner D_f le domaine de définition de f et montrer que f et étudier la continuité au point (a,a) pour $a \in \mathbb{R}$. (0.5+1 pts)*
2. *Calculer les dérivées partielles premières par rapport à x et y en tout point (x,y) pour $x \neq y$ de $\mathbb{R}^2$. (0.5+0.5 pts)*
3. *Calculer les dérivées partielles premières par rapport à x et y en tout point (a,a) pour $a \in \mathbb{R}^*$. (0.5+0.5 pts)*
4. *Etudier la différentiabilité de f en $(0,0)$. (1 pts)*

9

Solution 0.2

Le graphe de la fonction est:



1. **Domaine de définition de f.**
   On a $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} = \mathbb{R}^2$. En effet
   $D_{f_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$ et $D_{f_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$.
   Continuité au point (a,a) pour $a \in \mathbb{R}$.
   Au voisinage de (a,a) on a
   $$\left|f(x,y) - f(a,a)\right| = \left|(x^2 - y^2)\sin\left(\frac{x}{x-y}\right)\right| \leq \left|x^2 - y^2\right|,$$
   mais comme $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)} = 0$ alors la fonction est continue en (a,a).
2. **Calcul des dérivées partielles premières.**
   Pour tout (x,y) tel que $x \neq y$
   $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x(x-y)\sin(x/(x-y)) - y(x+y)\cos(x/(x-y))}{x-y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-2y(x-y)\sin(x/(x-y)) + x(x+y)\cos(x/(x-y))}{x-y} \end{array}\right.$$
3. Calculer les dérivées partielles premières par rapport à x et y en tout point (a,a) pour $a \in \mathbb{R}^*$.
   $$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,a) - f(a,a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{((a+h)^2 - a^2)\sin\left(\frac{a+h}{h}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(ah+h^2)\sin\left(\frac{a+h}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}(a+h)\sin\left(\frac{a+h}{h}\right) \end{aligned},$$
   cette limite n'existe pas donc f n'est pas dérivable par rapport à x au point $a(,a)$ pour $a \neq 0$.
   $$\begin{aligned} \lim_{k\to 0} \frac{f(a,a+k) - f(a,a)}{k} &= \lim_{k\to 0} \frac{(a^2 - (a+k)^2)\sin\left(\frac{a}{k}\right)}{k} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(-ak-k^2)\sin\left(\frac{a}{k}\right)}{k} = \lim_{k\to 0}(-a-k)\sin\left(\frac{a}{k}\right) \end{aligned},$$
   de même cette limite n'existe pas donc f n'est pas dérivable par rapport à x au point $a(,a)$ pour $a \neq 0$.
4. **Différentiabilité de f en** $(0,0)$.
   $$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin\left(\frac{h}{h}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(h)\sin(1) = 0 \end{aligned},$$
   $$\lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}(-k)\sin\left(\frac{0}{-k}\right) = 0.$$

et comme

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\mid f(h,k) - f(0,0) \mid}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\mid (h^2-k^2)\sin\big(h/(h-k)\big) \mid}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

car

$$\begin{aligned}\frac{\mid (h^2-k^2)\sin\big(h/(h-k)\big) \mid}{\sqrt{h^2+k^2}} &\leq \frac{\mid (h^2-k^2) \mid}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &\leq \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 2.\sqrt{h^2+k^2},\end{aligned}$$

alors f est différentiable en $(0,0)$ et de différentiel $df(0,0) = 0$.

Autr méthode.
On utilise les inégalités: $\mid h \mid \leq \sqrt{h^2+k^2}$ et $\mid \sin(t) \mid \leq \mid t \mid$ au voisinage de 0.
On obtient alors l'inégalité:

$$\begin{aligned}\frac{\mid (h^2-k^2)\sin\big(h/(h-k)\big) \mid}{\sqrt{h^2+k^2}} &\leq \frac{\mid (h^2-k^2) \mid . \mid (h/(h-k) \mid)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &\leq \frac{\mid (h+k) \mid . \mid h \mid}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \mid h+k \mid,\end{aligned}$$

avec $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \mid h+k \mid = 0$.

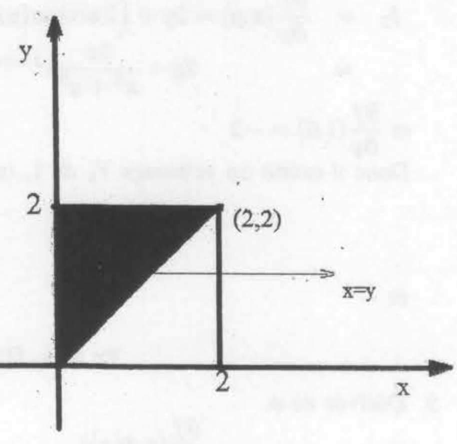
Exercice 0.3
(2+2 pts).

1. $I_1 = \iint_{D_1} \frac{xe^{2y}}{4-y} dxdy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$.
2. $I_2 = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dydxdz$, où Ω set le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par les paraboloides $z = 8 - x^2 - y^2$ et $z = x^2 + y^2$

Solution 0.3

1. Calcul de I_1. L'astuce dans cette intégrale c'est d'intervertir les bornes.

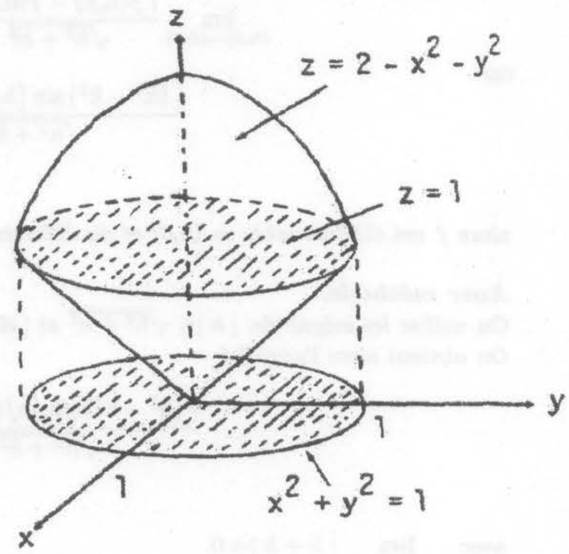
$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x.e^{2y}}{4-y} dxdy \\ &= \int_0^4 \Big[\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y} dx\Big] dy \\ &= \int_0^4 \Big[\frac{x^2e^{2y}}{2(4-y)}\Big]_0^{\sqrt{4-y}} dy \\ &= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2} dy = \Big[\frac{e^{2y}}{4}\Big]_0^4 = \frac{e^8-1}{4} \end{aligned}$$



3

2. *Calcul de I_2. On fixe (x,y) dans le disque $D : x^2+y^2 \leq 4$, projection de Ω sur le palan (xOy).*

$$\begin{aligned}
I_2 &= \iiint_\Omega (x^2+y^2)dydxdz \\
&= \iint_D \Big[\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} (x^2+y^2)dz\Big]dxdy \\
&= 2.\iint_D \Big[(x^2+y^2)(4-x^2-y^2)\Big]dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2)(4-r^2)rdrd\theta \\
&= 4\pi.\int_0^1 r^3(4-r^2)dr = 4\pi.\Big[r^4-\frac{1}{6}r^6\Big]_0^2 \\
&= \frac{64}{3}\pi
\end{aligned}$$



Exercice 0.4
(3.5 pts)

Soit la fonction $f(x,y) = x^2+y^2-e^{2\arctan(y/x)}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

1. *Montrer que l'équation $f(x,y)=0$ définit, au voisinage de $x=1$, une fonction implicite $y=\phi(x)$.* *(1 pts)*
2. *Calculer la dérivée de ϕ.* *(0.5 pts)*
3. *Donner le développement limité à l'ordre de 3 de ϕ en 1.* *(2 pts)*

Solution 0.4

1. *La fonction f est de classe C^∞ comme produit et composé de fonctions de classe C^∞, avec $f(1,0)=0$.*

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + \Big(2\arctan(y/x)\Big)'_y e^{2\arctan(y/x)} ; \\
&= 2y - \frac{2x}{x^2+y^2}e^{2\arctan(y/x)}
\end{aligned}$$

et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -2$.

Donc il existe un voisinage V_1 de 1, un voisinage V_O de 0 et une fonction ϕ de V_1 à V_0 tels que

$$\begin{cases} \phi : V_1 \to V_0 \\ ,x \to y = \phi(x); \end{cases}$$

et

$$\forall x \in V_1, f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x) \Leftrightarrow x^2 + (\phi(x))^2 = e^{2\arctan(\phi(x)/x)}. \quad (1)$$

2. *Dérivée de ϕ.*

$$\forall x \in V_1,\ \phi(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x))},$$

Or $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\Big(x + \frac{y}{x^2+y^2}e^{2\arctan(y/x)}\Big)$ et

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\Big(y - \frac{x}{x^2+y^2}e^{2\arctan(y/x)}\Big).$
Donc

$$\forall x \in V_1,\ \phi'(x) = -\frac{x + \frac{y}{x^2+y^2}e^{2\arctan(y/x)}}{y - \frac{x}{x^2+y^2}e^{2\arctan(y/x)}}.$$

3. *En dérivant 3 fois la relation (1) on obtient*

$$x + \phi(x)\phi'(x) - \frac{x\phi'(x) - \phi(x)}{x^2}\frac{x^2}{x^2+(\phi(x))^2}e^{2\arctan(\phi(x)/x)} = 0,$$

soit

$$x + \phi(x)\phi'(x) - x\phi'(x) + \phi(x) = 0, \tag{2}$$

car $e^{2\arctan(\phi(x)/x)} = x^2 + \phi^2(x)$.

les dérivées de la relation (1) donnent le système

$$\begin{cases} x + \phi(x)\phi'(x) - x\phi'(x) + \phi(x) = 0 \\ 1 + \big(\phi(x)\big)^2(x) + \phi(x).\phi''(x) - x\phi''(x) = 0 \\ 3\phi'\phi''(x) + \phi(x).\phi'''(x) - x\phi'''(x) - \phi''(x) = 0 \end{cases}$$

Dans la première équation on obtient $\phi(1) = 0$ *et* $\phi'(1) = 1$, *puis dans la deuxième,* $\phi''(1) = 2$, *puis dans la troisième,* $6 - \phi'''(1) - 2 = 0$, *soit* $\phi'''(1) = 4$.
Le développement limité à l'ordre 3 est donc

$$\phi(x) = \phi(1) + \phi'(1).(x-1) + \frac{1}{2}\phi''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3),$$

soit

$$\phi(x) = (x-1) + (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

Exercice 0.5
(5 pts).

Soit f la fonction donnée par: $f(x,y) = x\ln(x) + y\ln(y) + (3-x-y)\ln(3-x-y)$.

1. *Donner* D_f *le domaine de définition de f.* (0.5 pts)
2. *Démontrer que f est de classe* C^2 *sur* D_f *et expliciter les dérivées partielles de f d'ordre 1 et d'ordre 2 en tout point* (x,y) *de* D_f. (2 pts)
3. *Déterminer les points critiques de f et étudier les extrema relatifs éventuels de f.* (1.5 pts)
4. *Soient les applications f et h données par:* $\begin{cases} g(x,y,z) = xln(x) + y\ln(y) + z\ln z \\ h(x,y,z) = x + y + z - 3. \end{cases}$

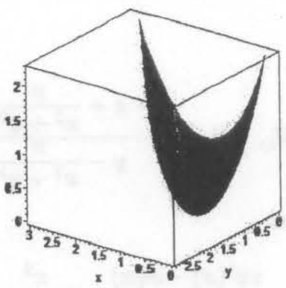
   Étudier les extremums relatifs lié de g par la contrainte $h(x,y,z) = 0$? (0.5 pts)

Solution 0.5

Soit f la fonction donnée par:

$$f(x,y) = x\ln(x) + y\ln(y) + (3-x-y)\ln(3-x-y).$$

21



1. *Le domaine de définition de f est le triangle:*
   $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, y > 0, x + y < 3\}$.
2. ***f est de classe C^2 sur D_f.***
   L'application f est définie en tout point de D puisqu'alors les arguments des fonctions logarithmes qui interviennent dans la définition de f sont strictement positifs. En tout point où son argument est strictement positif, la fonction logarithme est de classe C^2. Les fonctions polynomiales sont aussi de classe C^2. Donc l'application f, composée d'applications de classe C^2 sur D, est elle-même de classe C^2 sur D. Donc f est de classe C^2 sur D_f.
   Les dérivées partielles de f sur D_f.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + \ln(x) - (1 + \ln(3 - x - y)) = \ln(x) - \ln(3 - x - y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 + \ln(y) - 1 + \ln(3 - x - y)) = \ln(y) - \ln(3 - x - y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3 - x - y} = \dfrac{3 - y}{x(3 - x - y)} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{1}{3 - x - y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{3 - x - y} = \dfrac{3 - x}{y(3 - x - y)} \end{cases}$$

3. *Les points critiques de f sont donnés par le système:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + \ln(x) - (1 + \ln(3 - x - y)) = \ln(x) - \ln(3 - x - y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 + \ln(y) - 1 + \ln(3 - x - y)) = \ln(y) - \ln(3 - x - y) = 0 \end{cases}$$

   Ceci est équivalent au système:

$$\begin{cases} x = 3 - x - y \\ y = 3 - x - y \end{cases}$$

   dont la solution est $(1,1)$. Le point critique est donc $(1,1)$.
   Nature du point $(1,1)$.

   Le déterminant de la matrice héssienne est: $detH_f(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{3 - y}{x(3 - x - y)} & \dfrac{1}{3 - x - y} \\ \dfrac{1}{3 - x - y} & \dfrac{3 - x}{y(3 - x - y)} \end{vmatrix}$,

   donc $detH_f(1,1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2 > 0$ *et donc f admet un minimum relatif au point $(1,1)$.*
4. *Soient les applications f et h données par:*

$$\begin{cases} g(x,y,z) = xln(x) + y\ln(y) + z\ln z \\ h(x,y,z) = x + y + z - 3. \end{cases}$$

Etudier les extremums relatifs lié de g par la contrainte $h(x,y,z) = 0$?
La contrainte $h(x,y,z) = 0$ impose que le point (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ est dans le plan d'équation $x + y + z = 3$. Dans ce plan, $z = 3 - x - y$, et la valeur de g au point (x,y,z) est $f(x,y) = x\ln(x) + y\ln(y) + (3 - x - y)\ln(3 - x - y)$. Donc g est minimum au point d'abscisse 1 et d'ordonnée 1. En ce point, z vaut 1 et g est nul.

Groupe: M.HARFAOUI- S. SAJID

U

Université Hassan II- Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia
Département de Mathématiques

Année 2016/2017
Parcours: MIP
Module: M135

Examen de rattrapage d'analyse 3 (M 135)

Janvier 2017- S3 (1 H 30)

Exercice 0.1

Étudier l'existence des limites suivantes:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{1}{x-y}$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{y^3}{(x-1)^2+y^2}$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\sin^2(y)}{x^2+3y^2}$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xe^{x/y}$.

Exercice 0.2

Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonctionf définie sur $\mathbb{R}^2$par:

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}.$$

1. *Établir que l'équation $e^{-x} = x$ admet une solution et une seule sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que f admet un seul point critique sur $\mathbb{R}^2$.*
3. *Étudier la nature de ce point (maximum ou minimum).*

$\dfrac{e^{-x}}{x} = 1$ $\quad \dfrac{1}{xe^x} = 1$ $\quad xe^x = 1$

Exercice 0.3

Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales doubles suivantes

1. $I_1 = \iint_{D_1} (x\sin(y))dxdy$, où $D_1 : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le x$.
2. $I_2 = \iint_{D_4} 3y^3 e^{xy} dxdy$, où $D_2 =: 0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le 1$.
3. $I_3 = \iint_{D_3} \dfrac{xe^{2y}}{4-y} dxdy$, où $D_3 : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4 - x^2$.

Exercice 0.4

Déterminer les extrema de la fonction f définie par $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ dans la couronne

$$\frac{1}{4} \le x^2 + y^2 \le 1.$$

$x(e^x - \frac{1}{x})e^{-1} = 1$ $\quad xe^x - 1 = 0$ $\quad xe^x = 1$ $\quad \dfrac{1}{e^x} = x$

$x = 0$ $\quad e^0 = 1$ $\quad e^x = 1$ $\quad 0 \times e^0 = 0$ $\quad y = x$ $\quad \boxed{x = 0}$ $\quad e^{-x} = x$ $\quad e^x = 0$

$x = 1$ et $\boxed{x = 0}$ $\quad e^{-x} = x$ $\quad e^{-0} = 0$ $\quad \boxed{x = 0}$ $\quad \cancel{xe^x = 0}$ $\quad x = 0$ ou $e^x = e^{-x}$ $\quad x = e^{-e}$ $\quad \ln(1) = 0$

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{2x}$$

$x = -y$ $\quad \frac{1}{x-y} = \frac{1}{0} = \infty$

$$\frac{y^3}{y^2} = y = 0$$

$(x-1)^2 + y^2$ $\quad$ si $|y| < 1$ $\quad -|y| < y$

$x = y$

$$\frac{x^3}{(x-1)^2 + x^2} = \frac{x^3}{x^2+2x+1+x^2} = \frac{x^3}{2x^2} = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$$

$x = -y$ $\quad y = -x$

$$\frac{-x^3}{(x-1)^2 + x^2} = \frac{-x^3}{2x^2} = -\frac{1}{2}x = -0{,}5$$

$\frac{x^2}{x^2+3y^2}$

$\frac{x^2 \sin^2(x)}{4x^2} = \frac{\sin^2(x)}{4}$

$x^2 \leq x^2 + 3y^2$

$$\frac{x^2}{x^2+3y^2} \leq 1$$

$x = \ln e^{\ln(e^{-x})}$

e^{-x}

$\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{e^x}\right)$

$\ln(x) = \ln(1) - \ln(e^x)$

$\ln(x) = -\ln(e^x)$

$y = x^2$

$e^{x/y} \leq 1$ $\quad x \leq y^2$

$x e^{x/y}$

$e^{x} = x e^{1} = 0$

$\frac{y^2}{y}$ $\quad \frac{x}{x^2}$

$e^{-x} = x$ $\quad x = e^{-x}$

$x e^{-x} = +\infty$

$$\frac{e^{-x}}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x e^{x}}$$

$e^{-x} = x$ $\quad e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} - 0$

$x = e^{-x}$

$e^{0} = 1$ $\quad e^{-\infty} = 0$

$0 < y < 4 - x^2$

0	1	2	-1
4	3	0	3

$$\begin{cases} 2x - 2y - e^{-x} = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x - e^{-x} = 0 \Rightarrow x - e^{-x} = 0 \Rightarrow x = e^{-x} \\ 4y = 2x \Rightarrow 2y = x \end{cases}$$

0	1	2	3
0	1	4	9

$0 < x < \sqrt{4-y}$

$0 \leq y \leq 4 - x^2$

$0 < x < y^2$

$0 < x < y = \sqrt{x}$

$0 \leq x \leq 2$

$0 < x < y^2$

$\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{xy} \, dx \, dy$

$\cos(x) + x\cos(x)$

Rattrapage M135 : 2016/2017

Ex1 :

1- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{1}{x-y}$

1er direc : $y = x$

$$\lim_{x\to1} \frac{1}{x+x} = \lim_{x\to1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$$

2eme dire : $y = 0$

$$\lim_{x\to1} \frac{1}{x} = 1$$

Donc la limite n'existe pas.

2- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{y^3}{(x-1)^2+y^2}$

1er dir : $y = x$

$$\lim_{x\to1} \frac{x^3}{(x-1)^2+x^2} = \frac{1}{1} = 1$$

2e dir : $x = 0$

$$\lim_{y\to0} \frac{y^3}{1+y^2} = 0$$

Donc la limite n'existe pas.

3- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\sin^2(y)}{x^2+3y^2}$

1er dire : $y = x+1$

$$\lim_{x\to0} \frac{x^2\sin^2(x+1)}{x^2+3(x+1)^2} = 0$$

2e dire : $x = 1$

$$\lim_{y\to0} \frac{\sin^2(y)}{1+3y^2} = 0$$

4- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x e^{x/y}$

1er dir : $x = 1$

$$\lim_{y\to0} e^{1/y} = e^0 = 1$$

2e dir : $x = y$

$$\lim_{x\to0} x e^{x/x} = \lim_{x\to0} x e = 0$$

donc la limite n'excite pas.

3- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\sin^2(y)}{x^2+3y^2}$

on a : $\dfrac{x^2\sin^2(y)}{x^2+3y^2} \leqslant x^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$$

Donc la limite existe

Ex 2 :

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$$

1 - $e^{-x} = x \iff \dfrac{1}{e^x} = x$

$\iff \dfrac{1}{xe^x} = 1$

$\iff xe^x = 1$

$\iff xe^x - 1 = 0$

on pose $g(x) = xe^x - 1$

$g'(x) = e^x(1+x)$

$g'(x) = 0 \iff x = 1$ ou $x = -1$

x	$-\infty$		-1		1	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

Donc l'equation admet une seule et unique solution α

2 - $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y - e^{-x}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2x + 4y$

$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y - e^{-x} = 0 & (1) \\ -2x + 4y = 0 & (2) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2y - e^{-x} = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2y = e^{-x} \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2e^x} \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2e^x} \\ -2x + 4\dfrac{1}{2e^x} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2e^x} \\ -2x + \dfrac{2}{e^x} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2e^x} \\ 2\left(\dfrac{1}{e^x} - x\right) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2e^x} \\ \dfrac{1}{e^x} - x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2e^x} \\ 1 - e^x x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \dfrac{1}{2e^\alpha} \end{cases}$

Donc f admet un seul pt critique $(\alpha, \dfrac{1}{2e^\alpha})$ sur $\mathbb{R}^2$

3 - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + e^{-x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha, \dfrac{1}{2e^\alpha}) = 2$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$

$Hf = \begin{vmatrix} 2+e^{-\alpha} & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4(2+e^{-\alpha}) - 4$

$= 4(2+e^{-\alpha} - 1$

$= 4(e^{-\alpha} + 1) = 4(\dfrac{1}{e^\alpha} + 1$

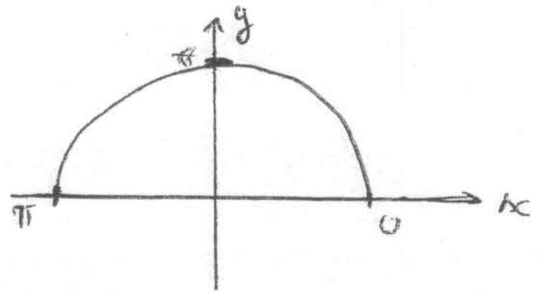
donc $Hf > 0$ et $r_0 = 2 + e^{-\alpha} > 0$

Donc la nature de ce point est un mi
local

Ex 3:

1- $I_1 = \iint_{D_1} (x\sin(y))\,dx\,dy$

$D_1 : 0 \leq x \leq \pi \ , \ 0 \leq y \leq x$



$$I_1 = \int_0^{\pi}\int_0^{x} (x\sin(y))\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\pi} \left[-x\cos(y)\right]_0^{x} dx$$

$$= -\int_0^{\pi} (x\cos(x) - x)\,dx$$

$$= -\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx + \int_0^{\pi} x\,dx$$

$$= -\left[x\sin(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\sin(x)\,dx + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\pi\sin(\pi) - \left[\cos(x)\right]_0^{\pi} + \frac{\pi^2}{2}$$

$$= -(\cos(\pi) - \cos(0)) + \frac{\pi^2}{2}$$

$$= -(-1-1) + \frac{\pi^2}{2} = 2 + \frac{\pi^2}{2}$$

2- $I_2 = \iint_{D_2} 3y^3 e^{xy}\,dx\,dy$

$D_2 : 0 \leq x \leq 1 \ , \sqrt{x} \leq y \leq 1$

Donc : $0 \leq x \leq y^2 \ , \ 0 \leq y \leq 1$

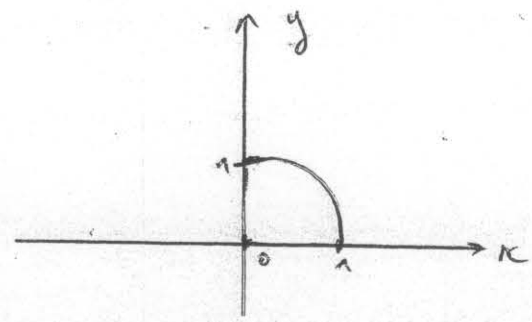
$$I_2 = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} (3y^3 e^{xy})\,dx\right) dy$$

$$I_2 = \int_0 \left[3y^2 e^{xy}\right]_0 dy$$

$$= \int_0^1 \left(3y^2 e^{y^3} \cancel{dy} - 3y^2\right) dy$$

$$= \left[e^{y^3} - y^3\right]_0^1 = e^1 - 1 - 1$$

$$= e - 2$$



3- $I_3 = \iint_{D_3} \frac{x e^{2y}}{4-y}\,dx\,dy$

$D_3 : 0 \leq x \leq 2 \ , \ 0 \leq y \leq 4 - x^2$

Donc : $0 \leq x \leq \sqrt{4-y} \ , \ 0 \leq y \leq 4$

$$I_3 = \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{x e^{2y}}{4-y}\,dx\right) dy$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{x^2}{2}\,\frac{e^{2y}}{4-y}\right]_0^{\sqrt{4-y}} dy$$

$$= \int_0^4 \frac{4-y}{2}\,\frac{e^{2y}}{4-y}\,dy$$

$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2}\,dy = \frac{1}{4}\int_0^4 2e^{2y}\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{2y}\right]_0^4 = \frac{1}{4}(e^8 - 1)$$

$$I_2 = \int_0^1 [\,3y^2 e^{y^3}\,]\, dy$$

$$= \int_0^1 (3y^2 e^{y^3}\, dy - 3y^2)\, dy$$

$$= \left[e^{y^3} - y^3 \right]_0^1 = e - 1 - 1$$

$$= e - 2$$

$$I = \iint_D (x \cos(y))\, dx\, dy$$

$D : 0 \le x \le \pi \,,\ 0 \le y \le x$

Université Hassan II- Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia
Département de Mathématiques

Année 2016/2017
Parcours: **MIP**
Module: **M135**

Partiel 1 d'analyse 3 (M 135)
Session janvier 2017 S4 (Durée:2 H)
Date: 30.12.2016

Exercice 0.1
(6 points)

Partie.I- *On considère l'équation* $x^2 + 4y^2 + 2y^4 + z^2 + \sin(z) = 0$.

1. *Montrer que l'équation définie une et une seule fonction* $z = \varphi(x,y)$ *au voisinage de* $(0,0,0)$. *(1 pt)*
2. *Montrer que le point* $(0,0)$ *est un point stationnaire pour la fonction* φ *et en établir sa nature.* *(1.5 pts)*

Partie.II- *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $f(x,y) = ye^x + e^y \sin(2x)$ *et* $(\mathcal{C})$ *la courbe définie par* $f(x,y) = 0$.

1. *Montrer que l'équation* $f(x,y) = 0$ *admet une solution* $y = \varphi(x)$ *d'un voisinage* U *de* 0 *vers un voisinage* V *de* 0. *(1 pts)*
2. *Calculer la dérivée première de* φ *en tout* x *de* U. *(1.5 pts)*
3. *Calculer la limite de* $\dfrac{y}{x}$ *quand* (x,y) *tend vers* $(0,0)$ *en étant sur la courbe* $(\mathcal{C})$. *(1 pt)*

Exercice 0.2
(5 points)

1. *Soit le domaine* D_1 *de* $\mathbb{R}^2$ *défini par* $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ |y| \leq x\}$.
Représenter le domaine D_1 *et calculer* $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1} x^{1/3} y\,dxdy$. *(2.5 pt)*
2. *Soit* Ω *le domaine de* $\mathbb{R}^3$ *limité par le cylindre* $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$; $1 \leq z \leq 2$, *la paraboloide* $z = x^2 + y^2$; $0 \leq z \leq 1$ *et la couronne* $\dfrac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 1$. *Représenter le domaine* Ω *et calculer* $J = \displaystyle\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) z\,dxdydz$. *(2.5 pt)*

Exercice 0.3
(9.5 points)

Partie.I- *Soit les fonctions f et g de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{*2}$ avec*

$$f(x,y) = g(u,v) = g\big(x^2 - y^2, \sqrt{x^2+y^2}\big)$$

et soit l'équation aux dérivées partielles:

$$(E): \quad y.\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x.\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xyf^2(x,y).$$

1. *Calculer les dérivées partielles premières de f par rapport à x et y au moyen de celles de g par rapport à u et v.* *(1 pt)*
2. *Donner une équation aux dérivées partielles (E') vérifiée par g.* *(1.5 pt)*
3. *Résoudre(E') puis (E).* *(1.5 pt)*

Partie.II- *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$\begin{cases} f(x,y) = (x^2-y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x+y}\right), & si\ x+y \neq 0 \\ f(x,y) = 0, & si\ x+y = 0 \end{cases}$$

1. *Montrer que f est continue sur son domaine de définition que l'on déterminera.* *(1.5 pt)*
   (a) *Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout $x \neq y$.* *(1 pt)*
   (b) *Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,-a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,-a)$, pour tout a de $\mathbb{R}$ (distiguer les cas $a \neq 0$ et $a = 0$).* *(1.5 pt)*
2. *Etudier la différentiabilité la fonction f en $(a,-a)$(distiguer les cas $a \neq 0$ et $a = 0$). (1.5 pt)*

Partiel M135 : 2016/2017

Ex 1 :

Partie I :

$x^2+4y^2+2y^4+z^2+\sin(z)=0$

1 - $f(x,y,z)=x^2+4y^2+2y^4+z^2+\sin(z)=0$

$\frac{\partial f}{\partial z}=2z+\cos(z)$

$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)=\cos(0)=1\neq 0$

$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)\neq 0 \\ f \text{ est de classe } C^1 \end{cases}$

Donc : $\exists U_0, U_0' : \exists V_0$ ~~et φ~~

$f(x,y,\varphi(x,y))=0 \quad \forall (x,y)\in U_0\times U_0'$

2- $\varphi'_x(x,y)=-\frac{f'_x(x,y,z)}{f'_z(x,y)}$

$=-\frac{2x}{2z+\cos(z)}$

$\varphi'_y(x,y)=-\frac{f'_y(x,y,z)}{f'_z(x,y)}$

$=-\frac{8y+8y^3}{2z+\cos(z)}$

$\begin{cases}\varphi'_x=0\\ \varphi'_y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2x}{2z+\cos z}=0 \\ -\frac{8y+8y^3}{2z+\cos(z)}=0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x=0 \\ -8y+8y^3=0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 8y(1+y^2)=0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \text{ ou } y^2=-1\end{cases}$

Donc $(0,0)$ est un pt stationnaire pour φ.

- $\varphi'_{x^2}(x,y)=-\frac{2}{2z+\cos(z)}$

$\varphi'_{y^2}(x,y)=-\frac{8+24y^2}{2z+\cos(z)}$

$\varphi'_{xy}(x,y)=0$

~~$H\varphi=\begin{vmatrix} -\frac{2}{2z+\cos(z)} & 0 \\ 0 & -\frac{8+24y^2}{2z+\cos(z)}\end{vmatrix}$~~

~~$=\frac{2}{2z+\cos(z)}\times$~~

$\varphi'_{x^2}(0,0)=-\frac{2}{2\varphi(0,0)+\cos(\varphi(0,0))}$

$=-2$

$\varphi'_{y^2}(0,0)=-8$

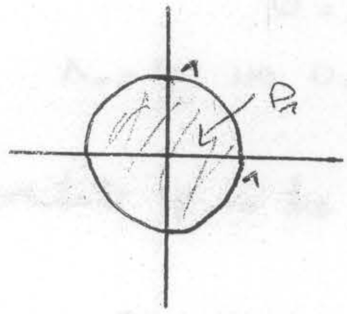
$H\varphi=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & -8\end{vmatrix}=16>0$

et $r_0=-2<0$

Donc le pt $(0,0)$ est maximum loca

Exercice 2:

$1-\ D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 1,\ |y|\leqslant x\}$



$$I_1=\iint_{D_1} x^{1/3}y\ dx\,dy$$

On pose : $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

$0\leqslant r\leqslant 1$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$

$$I_1=\int_0^1\int_0^{2\pi}(r\cos\theta)^{1/3}\ r\sin\theta\ r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^1\int_0^{2\pi} r^{7/3}\cos^{1/3}\theta\ \sin\theta\ dr\,d\theta$$

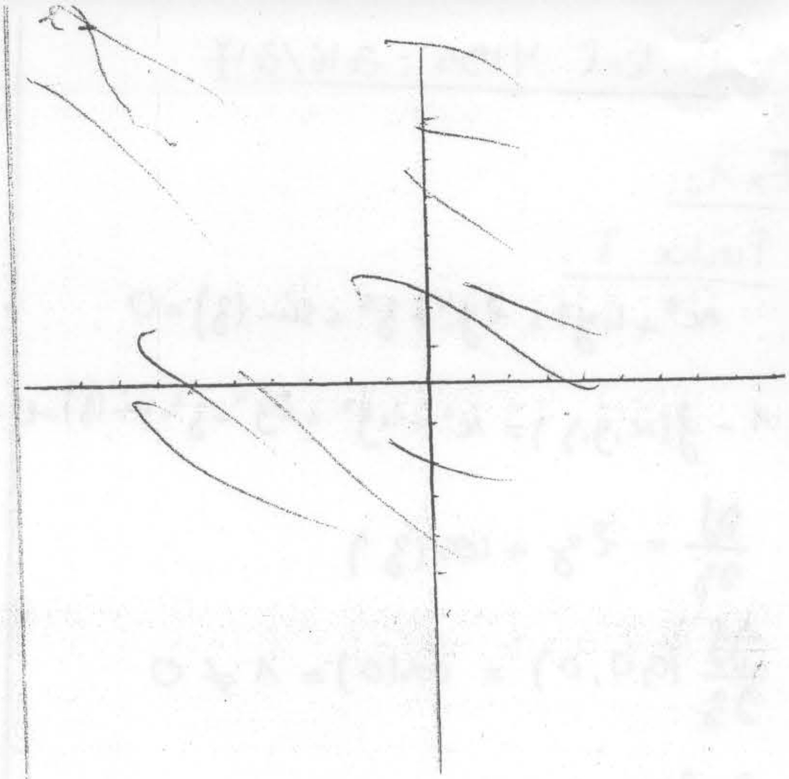
$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^{\frac{7}{3}+1}}{\frac{7}{3}+1}\Big]_0^1\cos^{1/3}\theta\sin\theta\right]d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{3}{10}\cos^{1/3}\theta\sin\theta\ d\theta$$

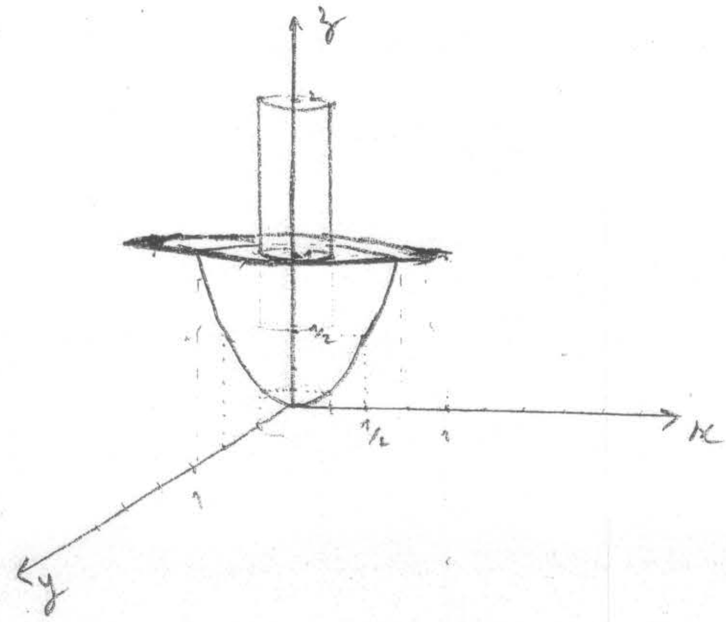
$$=-\frac{3}{10}\int_0^{2\pi}-\sin\theta\cos^{1/3}\theta\ d\theta$$

$$=-\frac{3}{10}\left[\frac{\cos^{4/3}\theta}{\frac{4}{3}}\right]_0^{2\pi}$$

$$=-\frac{3}{10}\left[\frac{3}{4}(1-1)\right]=0$$



2-



Ex 1.

partie II :

$f(x,y) = ye^x + e^y \sin(2x)$

1- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x + e^y \sin(2x)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = e^0 + e^0 \sin 0 = 1 \neq 0$

on a : - $f(x,y) = 0$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$

- f de classe C^1

Donc :

$\exists U_0 \; \exists V_0 \; , \; \varphi : U_0 \longrightarrow V_0$

$y = \varphi(x)$

$f(x, \varphi(x)) \; \forall x \in U_0$

2- $\varphi'(x) = - \frac{f'_x(x, \varphi(x))}{f'_y(x, \varphi(x))}$

$= - \frac{ye^x + 2e^y \cos(2x)}{e^x + e^y \sin(2x)}$

3-

Ex 3 :

Partie I :

$$f(x,y) = g(u,v) = g(x^2-y^2, \sqrt{x^2+y^2})$$

1 - $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x}$

$= \frac{\partial g}{\partial u} 2x + \frac{\partial g}{\partial V} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y}$

$= \frac{\partial g}{\partial u}(-2y) + \frac{\partial g}{\partial V} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2 - (E) : $y \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 2xyf^2$

(E') : $y \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial u}(2x) + \frac{\partial g}{\partial V} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$+ x\left(-\frac{\partial g}{\partial u} 2y + \frac{\partial g}{\partial V} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 2xy g^2$

$\Leftrightarrow 2xy \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial V} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$- 2xy \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial V} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2xy g^2$

$\Leftrightarrow 2 \frac{\partial g}{\partial V} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2xy g^2$

~~$\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial V} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = g^2$~~

~~$\Leftrightarrow \frac{g'_v}{g^2} = \sqrt{x^2+y^2}$~~

(E') : $\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial g}{\partial V} = 2xy g^2$

(E') : $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial g}{\partial V} = g^2$

2 -

(E') : $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial g}{\partial V} = g^2$

$\Leftrightarrow \frac{g'_v}{g^2} = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow \int \frac{g'_v}{g^2} dV = \int \sqrt{x^2+y^2}\, dV$

$\Leftrightarrow \int \frac{g'_v}{g^2} dV = \int V dV$

$\Leftrightarrow -\int \frac{-g'}{g^2} dV = \int V dV$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{g} = \frac{V^2}{2} +$

$\Leftrightarrow g = -\frac{2}{V^2} + f(u)$

$\Leftrightarrow g(u,v) = -\frac{2}{V^2} + f(u)$

- $f(x,y) = -\frac{2}{x^2+y^2} + f(x^2-y^2)$

Partie II :

$$\begin{cases} f(x,y) = (x^2-y^2)\sin\left(\frac{1}{x+y}\right) & (x+y \neq 0) \\ f(x,y) = 0 & (x+y) = 0 \end{cases}$$

1 -

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2-y^2) \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}} \sin\left(\frac{1}{x+y}\right)$

$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{(x^2-y^2)}{x+y} \frac{\sin\left(\frac{1}{x+y}\right)}{\frac{1}{x+y}}$

$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{(x-y)(x+y)}{x+y}$

$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} x - y = 0$

f est continue sur $Df = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

1- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin\left(\frac{1}{x+y}\right) + (x^2-y^2)\frac{-1}{(x+y)^2} \cancel{\cos}$

$= 2x \sin\left(\frac{1}{x+y}\right) - \frac{x^2-y}{x+y} \cos\left(\frac{1}{x+y}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y \sin\left(\frac{1}{x+y}\right) - \frac{x-y}{x+y} \cos\left(\frac{1}{x+y}\right)$

cas : $a \neq 0$

b- $\frac{\partial f}{\partial x}(a,-a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,-a) - f(a,-a)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{((a+h)^2 - a^2)\sin\left(\frac{1}{a+h-a}\right)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(2ah + h^2)\sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2a+h)}{h} \underbrace{h \sin\left(\frac{1}{h}\right)}_{\to 1}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2a}{\cancel{h}} \cancel{h} \sin\left(\frac{1}{h}\right) + h \sin\left(\frac{1}{h}\right)$

$= \lim_{h\to 0} 2a \sin\left(\frac{1}{h}\right) + h \sin\left(\frac{1}{h}\right)$

$= 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(a,-a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,h-a) - f(a,-a)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 - (h-a)^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(a^2 - h^2 + 2ah - a^2)\sin(1/h)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(2ah - h^2)\sin(1/h)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \cancel{h}\,\cancel{ah}(2a-h)\sin\left(\frac{1}{h}\right)$

$= \lim_{h\to 0} 2a \sin\left(\frac{1}{h}\right) - h \sin\left(\frac{1}{h}\right)$

$= -1$

cas $a = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{(2a+h)\cancel{h}}{\cancel{h}} \sin\left(\frac{1}{h}\right)$

$= \lim_{h\to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right)$

$= 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$

2-

$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x+a, y-a)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{((x+a)^2 - (y-a)^2)\sin\left(\frac{1}{x+a-y+a}\right.}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{[(x^2+2ax+a^2) - (y^2 - 2ay + a^2)]\sin\left(\frac{1}{2a+\right.}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2 + 2ax + a^2 - y^2 + 2ay - a^2)\sin\left(\frac{1}{2a+x}\right.}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2 - y^2 + 2ax + 2ay)\sin\left(\frac{1}{2a+x}\right.}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - y^2 + 2ax + 2ay}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{2a+x}\right.$

$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x-y)(x+y) + 2a(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{2a}\right.$

$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - y^2 + 2a(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{2a+x}\right.$

on a : $x^2 - y^2 + 2a(x+y) \overset{\sin\left(\frac{1}{2a+\dots}\right)}{\leqslant} x^2 + y^2$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{x^2+y^2}$

$= 0$

Donc f est différentiable.

P_1, P_2

$a=3$ $b=5$

$P_1 \times P_2$ 15

P_1 / P_2

Université Hassan II- Mohammedia
Faculté des Sciences et Techniques

Département de Mathématiques — *Année Universitaire :2008/2009*
Option :MIP(Module :M311) — *M.Harfaoui et R.Morchadi*

Premier contrôle
Durée : Une heure

Exercice 0.0.1 *(7 pts)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = (x^2+y^2-8)(x^2+y^2)$$

1. *Déterminer les points stationnaires de f.* *(1 pt+2 pts)*
2. *Donner la nature des points trouvés en 1.* *(1,5 pt+2,5 pts)*

Exercice 0.0.2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = y^3 + (x^2+1)y + x^4$$

1. *Montrer que l'équation $f(x,y)=0$ définit implicitement y comme fonction de x sur $\mathbb{R}$, qu'on notera $\varphi(x)$.* *(2 pt)*
2. *Déterminer en fonction de x et $\varphi(x)$ la dérivée $\varphi'(x)$ sur $\mathbb{R}$.* *(1,5 pts)*

Exercice 0.0.3

soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3(y-1)^2}{x^4+(y-1)^4}, & si\ (x,y) \neq (0,1) \\ f(0,1) = 0 \end{cases}$$

1. *Donner D_f le domaine de définition.* *(0,5 pt)*
2. *Montrer que f est continue sur D_f.* *(1 pts+1,5 pts)*
3. *Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout (x,y) de D_f.* *(1,5 pts+1,5 pts)*
4. *Étudier la différentiabilité de f sur D_f.* *(1,5 pts+2 pts)*

Bon courage

13

Université Hassan II- Mohammedia
Faculté des Sciences et Techniques

Département de Mathématiques *Année Universitaire :2008/2009*
Option :MIP(Module :M311) *M.Harfaoui et R.Morchadi*

Premier contrôle : Corrigé
Durée : Une heure

==

correction 0.0.1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = (x^2+y^2-8)(x^2+y^2)$$

1. *Déterminer les points stationnaires de f.* *(1 pt+2 pts)*

   La fonction f est un polynôme, donc elle est de classe C^∞.
   Les points stationnaires de f sont les points (x,y) tels que
   $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x(x^2+y^2-4) = 0$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y(x^2+y^2-4) = 0$.
   Ces points sont l'origine $O(0,0)$ et tous les points du cercle de centre O et de rayon 2 $(x^2+y^2=4)$.

2. *Donner la nature des points trouvés en 1.* *(1,5 pt+2,5 pts)*

   Les dérivées partielles secondes de f sont :
   $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4(3x^2+y^2-4)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4(x^2+3y^2-4)$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 8xy$.
   La matrice héssienne est donc $\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4(3x^2+y^2-4) & 8xy \\ 8xy & 4(x^2+3y^2-4) \end{pmatrix}$
   et son déterminant est $det\mathcal{H}_f(x,y) = 16(3x^2+y^2-4).(x^2+3y^2-4) - 64x^2y^2$.

   Natures des points stationnaires :

   (a) *Pour le point O, puisque $det\mathcal{H}_f(0,0) = 16^2 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) - 16 < 0$, f admet un maximum en O qui est $f(0,0) = -8$*

   (b) *Pour les points du cercle de centre O et de rayon 2 $(x^2+y^2=4)$, puisque $det\mathcal{H}_f(x,y) = 0$, le théorème ne s'applique pas. On utilise donc le formule de Taylor à l'ordr 2.*
   En effet, pour tout point (a,b) du cercle on a :
   $$\begin{aligned} f(a+h,b+k) - f(a,b)) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right) + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= Q(h,k) + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$
   Mais $a^2+b^2=4$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = 8a^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) = 16ab$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = 8b^2$ et donc $Q(h,k) = 8a^2h^2 + 16abhk + 8b^2k^2 = 8(ah+bk)^2 \geq 0$

Ce qui prouve que f admet un minimum en tout point du cercle.

==

correction 0.0.2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = y^3 + (x^2+1)y + x^4$$

1. *Montrer que l'équation $f(x,y)=0$ définit implicitement y comme fonction de x sur $\mathbb{R}$, qu'on notera $\varphi(x)$.* *(2 pt)*

   La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Comme $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + x^2 + 1 \neq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ alors d'après le th'orème des fonctions implicites l'équation $f(x,y)=0$ définit implicitement y comme fonction de x sur $\mathbb{R}$.

2. *Déterminer en fonction de x et $\varphi(x)$ la dérivée $\varphi'(x)$ sur $\mathbb{R}$.* *(1,5 pts)*

   Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $\varphi'(x) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = -\dfrac{2x\varphi(x) + 4(\varphi(x))^2 + 1}{3(\varphi(x))^2 + x^2 + 1}$

==

correction 0.0.3

soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3(y-1)^2}{x^4+(y-1)^4}, & si\ (x,y) \neq (0,1) \\ f(0,1) = 0 \end{cases}$$

1. *Donner D_f le domaine de définition.* *(0,5 pt)*

   $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y) \neq (0,1)\} \bigcup \{(0,1)\} = \mathbb{R}^2$

2. *Montrer que f est continue sur D_f.* *(1 pts+1,5 pts)*

   (a) *Pour $(x,y) \neq (0,1)$ la fonction est une fonction rationnelle de domaine de définition $\mathbb{R}^2 - \{(0,1)\}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,1)\}$.*

   (b) *Pour $(x,y) = (0,1)$ on a :* $\mid f(x,y) - f(0,1) \mid = \mid \dfrac{x^3(y-1)^2}{x^4+(y-1)^4} \mid$.

   On sait que $ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ donc

   $\mid x^3(y-1)^2 \mid = \mid x^2(y-1)^2 \mid . \mid x \mid \le \frac{1}{2}(x^4+(y-1)^4). \mid x \mid$ *et on a alors :*

   $\mid f(x,y) - f(0,1) \mid \le \mid x \mid$ *et* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \mid x \mid = 0$ *d'où la continuité de f* $(0,1)$.

3. *Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout (x,y) de D_f.* *(1,5 pts+1,5 pts)*

(a) *Pour* $(x,y) \neq (0,1)$ *faire les calculs.*

(b) *Pour* $(x,y) = (0,1)$ *on a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,1)-f(0,1)}{h} = 0$$

et $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,1+k)-f(0,1)}{k} = 0$$

4. *Étudier la différentiabilité de* f *sur* D_f. *(1,5 pts+2 pts)*

(a) *Pour* $(x,y) \neq (0,1)$ f *est différentiables car les fonction* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *sont continues pour tout* $(x,y) \neq (0,1)$.

(b) *Pour* $(x,y) = (0,1)$ *on a :*

$$\left| \frac{f(h,1+k) - f(0,1) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \left| \frac{h^3(k-1)^2}{(h^4+(k-1)^4)(\sqrt{h^2+k^2})} \right|$$

dont la limite, quand (h,k) *tend vers* $(0,0)$, *n'est pas nulle. Ce qui prouve que la fonction n'est pas différentiable en* $(0,1)$.

==

$1\frac{1}{2}$ nov

D

Université Hassan II- Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia
Département de Mathématiques

Année 2015/2016
Parcours: **MIP**
Module: **M135**

Partiel 1 d'analyse 3 (M 135)
Session printemps 2015- S4 (Durée:2 H)

Date: 30.03.2016

Exercice 0.1

I- *Soit les fonctions f et g de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{*2}$ avec $f(x,y) = g(u,v) = g(x^2 - y^2, \sqrt{x^2+y^2})$ et soit l'équation aux dérivées partielles:*

$$(E): \quad y.\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x.\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xyf^2(x,y).$$

1. *Calculer les dérivées partielles premières de f par rapport à x et y au moyen de celles de g par rapport à u et v.*
2. *Donner une équation aux dérivées partielles (E') vérifiée par g.*
3. *Résoudre(E') puis (E).*

II- *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \ln(1+y^2) + xe^y - 1$ et (C) la courbe définie par $f(x,y) = 0$.*

1. *Montrer que l'équation $f(x,y) = 0$ admet une solution $y = \varphi(x)$ d'un voisinage U de 1 vers un voisinage V de 0.*
2. *Calculer la dérivée de φ en tout x de U.*
3. *Donner le développement limité à l'ordre 2 de la fonction φ au voisinage 1.*

15

Exercice 0.2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

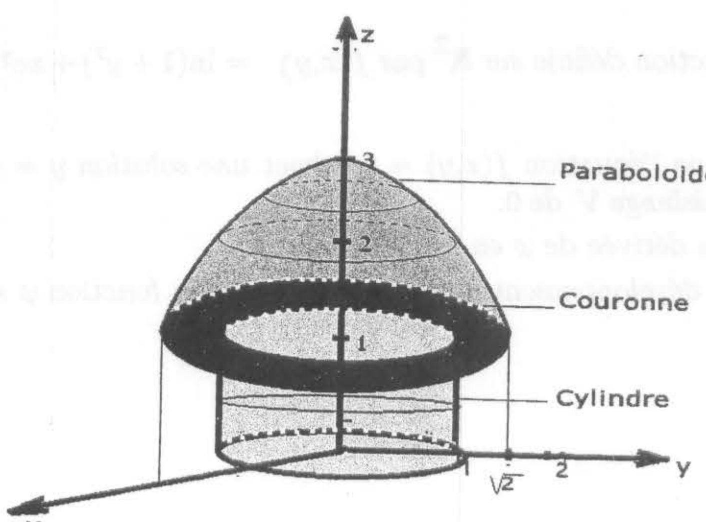
$$\begin{cases} f(x,y) = (x-1)\sin\left(\dfrac{y}{x-1}\right), & si\ x > 1 \\ f(x,y) = 0, & si\ x \leq 1 \end{cases}$$

1. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *(a) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout $x \neq 1$.*

   (b) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,b)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,b)$, pour tout b de $\mathbb{R}$.
3. *Étudier la différentiabilité en $(1,0)$.*

Exercice 0.3

1. *Soit le domaine D_1 de $\mathbb{R}^2$ défini par $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \leq x, y \geq 0\}$.*
   Représenter le domaine D_1 et calculer $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1} xy^2 dxdy$.
2. *Soit $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x,\ y \geq x-1,\ y \geq 0\}$.*
   Représenter le domaine D_2 et calculer $I_2 = \displaystyle\iint_{D_1} (x-1)y^2 dxdy$
3. *Soit Ω le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par le cylindre $x^2 + y^2 = 1;\ 0 \leq z \leq 1$, la paraboloide $z = 3 - x^2 - y^2;\ \ 1 \leq z \leq 3$ et la couronne $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$, $z = 1$ (voir figure ci-après).*
   Calculer $J = \displaystyle\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) z dxdydz$.



Partie I: Ex 1

4,00

Question de cours : Voir verso

ANALYSE III

1/2

Université Hassan II
Faculté des Sciences
Techniques- Mohammadia
Département de mathématiques

03- Janvier -2012
M 311............
09 H.................
....

EXAMEN MIP, D'ANALYSE module M311

Exercice 1

On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application suivante :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f ;
2. f admet-elle des dérivés partielles en $(0,0)$?
3. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Faite

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

A) $I = \displaystyle\int\int_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\, dxdy$, $D : \{(x,y) \in R^2 / x^2+y^2 \geq 1;\ 0 \leq y \leq 1;\ 0 \leq x \leq 1\}$.

B) $J = \displaystyle\int\int\int_B \frac{1}{x^2+y^2+(z-a)^2}\, dxdydz$ où B est la boule unité de R^3 et $a > 1$.

Exercice 3

A) Calculer l'intégrale curviligne $\int_C \omega$ où $\omega = y^2 dx + x^2 dy$, où C est la ~~demi~~ partie ellipse suprieure $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

B) Calculer en utilisant la formule de Green Riemann l'intégrale :

$$\int\int_D (2x^3 - y)\, dxdy$$

où $D : \{(x,y) \in R^2 / \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1;\ x \geq 0;\ y \geq 0\}$

MORCHADI ; SAJID

16

Question de cours

Donner les différentes implications possibles entre les assertions suivantes

(1) f est continue en (x,y)

(2) f est différentiable en (x,y)

(3) f admet des dérivées partielles premières en (x,y)

(4) f de classe C^1 en (x,y)

1) Donner une paramétrisation de chacunes des surfaces.

2) Soit Σ la surface définie par : $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

Calculer τ le volume du domaine Ω limité par Σ.

3) Soit $\vec{V} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 4z\,\vec{k}$.

a) Calculer Φ_1 le flux de $\vec{V}$ à travers S_1^+.

b) Calculer Φ_3 le flux de $\vec{V}$ à travers S_3^+.

c) Calculer Φ_2 le flux de $\vec{V}$ à travers S_2^+.

Bon courage

Université Hassan II — 13 Janvier 2010

Faculté des Sciences et Techniques — M311

Mohammadia — 14h

Département de mathématiques — 2 H

Examen - MIP-M311

UNE BONNE REDACTION ET EXIGIBLE

Exercice 1.

Considérons l'équation aux dérivés partielles suivante :

$$(E) \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - 3\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1$$

Soit g la fonction définie par $g(u,v) = f(x,y)$, posons $u = x$ et $v = 3x + y$.

a) Déterminer l'équation aux dérivés partielles vérifiée par g.

b) Chercher la forme générale de toutes les fonctions f de classe C^1 vérifiant l'équation (E).

Exercice 2.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

a- Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.

b- Etudier la différentiabilité de f sur son domaine de définition.

Exercice 3.

Soient S_1, S_2 et S_3 les surfaces de $\mathbb{R}^3$ définies par :

$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 2z, \quad 0 \leq z \leq 1$

$S_2 : x^2 + y^2 = z^2, \quad 1 \leq z \leq 2$

$S_3 : x^2 + y^2 \leq 4, \quad z = 2$

Asmaâ Elrhazi

Université Hassan II
Faculté des Sciences
Techniques- Mohammadia
Département de mathématiques

01- Novembre -2010
M 311............
9 H.................
1 H 15 mn........

Contrôle 1 d'analyse

Exercice 1

Soit g la fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} g(x,y) = \dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}, & si(x,y) \neq (0,0) \\ g(0,0) = 0 \end{cases}$$

1- Etudier la continuité de g, sur son domaine de définition.

2- Calculer les dérivées partielles de $\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}$, pour $(x,y) \neq (0,0)$.

3- Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

4- g est -elle différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2

1- Enoncer le théorème des fonctions implicites.

2- Montrer que la relation $xy - \sin(y) + 2x - y = 0$ définie implicitement une fonction $x \to y = \varphi(x)$ au voisinage de 0, puis donner le DL_0^2 de φ.

Exercice 3

On considère les fonctions

$$f(x,y) = (x^2+y; x^2-y^2; 1); \qquad g(x,y) = (e^{x-y}; 2xy)$$

1- Dterminer les matrices Jacobiennes de f et celle de g.

2- Calculer La matrice Jacobienne de $f \circ g$.

MORCHADI ; SAJID

18

Université Hassan II
Faculté des Sciences
Techniques- Mohammadia
Département de mathématiques

06- Dcembre -2010
M 311........
12h 30 mn .
1 H.........

Contrôle 2 d'analyse- MIP-M311

Exercice 1

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^{*2}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Dterminer et prciser la nature des extremums lis ventuels de la fonction f sous la contrainte $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$, ou a est un réel strictement positif.

Exercice 2

Calculer les intgrales double et triple suivantes :

– $I = \int\int_D xy^2dxdy$, $D : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$.

– Soit Ω la partie du cylindre $x^2 + y^2 - ay \leq 0$, intrieure à la sphère de centre O et de rayon a. Calculer le volume de Ω.

MORCHADI ; SAJID

Université Hassan II
Faculté des Sciences et Techniques
Mohammadia
Département de mathématiques

14- Novembre -2011
M 311............
9h...............

Contrle 1 - MIP-M311

UNE BONNE REDACTION ET EXIGIBLE

$\mathcal{E}$xercice 1

Soit g la fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$\ln(x)$

$$\begin{cases} g(x,y) = \frac{1}{2}xy\ln(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ g(0,0) = 0 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de g.

b) Etudier la continuité des dérivées partielles de $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$

c) Etudier la différentiabilité g

$\mathcal{E}$xercice 2

Soit $c \neq 0$. Soit f une fonction de classe C^2 qui vérific l'éuation aux dérivées partielles suivantes :

$$(E) \qquad c^2\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$$

Posons $f(x,t) = g(u,v)$, à l'aide du changement de variables de la forme $u = x + ct, v = x - ct$.

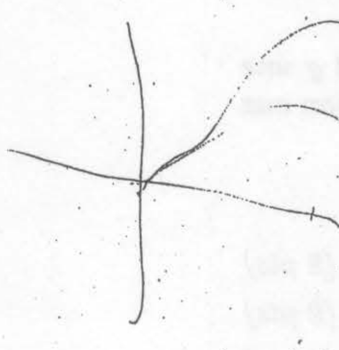
Chercher les solutions générales de classe C^2 de l'éuation aux dérivées partielles (E) :

$\mathcal{E}$xercice 3

Dterminer le développement limité de $f(x,y) = cos(x)sin(y)$ d'ordre 4 au voisinage de $(0,0)$.

Bon courage

$\ln(x^2+y^2) < x^2+y^2$



$\frac{1}{2}|x||y|\ln(x^2+y^2) < \frac{1}{2}|x||y|(x^2+y^2)$

$< \frac{1}{2}(x^2+y^2)^3$.

Université Hassan II- Mohammedia
Faculté des Sciences et Techniques

Département de Mathématiques — Année Universitaire :2012/2013
Option :MIP- Module :M311 — M.HARFAOUI et S. SAJID

Premier partiel : 5 Avril 2013
Durée : Une heure 30 mn

Exercice. 1 *(7 pts)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^{*\,2}$ par : $f(x,y) = \dfrac{xe^{-x}}{y} + \dfrac{y}{e}$

1. *Déterminer les points stationnaires de f.* *(1.5 pts)*
2. *Donner la nature des points trouvés en 1.* *(1.5 pts)*
3. (a) *Monter que l'équation $f(x,y) = 0$ admet une solution $x = \varphi(y)$ pour tout $(x,y) \neq (1,0)$.* *(1.5 pts)*
   (b) *Exprimer $\varphi'(y)$ en fonction de $\varphi(y)$.* *(1.5pts)*
   (c) *Donner l'équaion de la tangente de la courbe de φ au point d'abscisse 1.* *(1 pts)*

Exercice. 2 *(8 pts)*

soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3(y-1)^2}{x^4+(y-1)^4}, & si\ (x,y) \neq (0,1) \\ f(0,1) = 0 \end{cases}$$

1. *Donner D_f le domaine de définition.* *(0.5 pt)*
2. *Montrer que f est continue sur D_f.* *(1 pts+1.5 pts)*
3. *Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout (x,y) de D_f.* *(1.5 pts+1.5 pts)*
4. *Étudier la différentiabilité de f en $(0,1)$.* *(1 pts)*
5. *Donner l'équation du plan tangent au point $(0,1)$* *(1 pts)*

Exercice. 3 *(5 pts)*

soit f une fonction de deux variables de classe C^2 définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et g une fonction d'une seule variable de classe C^2 définie sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation aux dérivées partielles :

(E) : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \dfrac{1}{2x}\dfrac{\partial f}{\partial x}\overset{g(u)}{(x,y)} = \dfrac{1}{x^2+1}$. *On pose* $f(x,y) = g(\overset{u}{\dfrac{y}{x^2+1}})$

1. *Calculer les dérivées premières f en fonctions de celles de g.* *(2 pts)*
2. *Donner l'équation différentelle (E') vérifiée par g.* *(2 pts)*
3. *Résoudre (E') puis (E).* *(1 pts)*

Bon courage et bons résultats

Université Hassan II
Faculté des Sciences et Techniques
Mohammadia
Département de mathématiques

26- Dcembre -2011
M 311............
12h...............

Contrle 2 - MIP-M311

UNE BONNE REDACTION ET EXIGIBLE

$\mathcal{E}$xercice 1

Soit g la fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} g(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ g(0,0) = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de g, et montrer que g est de classe C^1.

$\mathcal{E}$xercice 2

Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int\int_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\, dxdy.$$

$D : \{(x,y) \in R^2/x^2+y^2 \geq 1;\ 0 \leq y \leq 1;\ -1 \leq x \leq 1\}$.

$\mathcal{E}$xercice 3

Etudier les extremums de

$$f(x,y) = x^2 + y^3$$

Bon courage

$\frac{\partial^2 f}{\partial x}(x,y) \longrightarrow 0 \Rightarrow 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y}(x,y) \longrightarrow 0 \Rightarrow$

$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} \Rightarrow 0$

$rt - s^2$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$f(0,y) = 1^3$

جامعة الحسن الثاني
المحمدية الدار البيضاء
UNIVERSITE HASSAN II
MOHAMMEDIA CASABLANCA

Département de Mathématiques.

Module : Analyse 3 MIP, 2010-2011

EPREUVE DE MATHEMATIQUE
02 JUIN 2011
(DUREE : 3H)

Profs. I. Aounil & N-E. Fahssi

Exercice 1. (8 points)

Soit f la fonction 2π-périodique impaire définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & \text{sur} \quad]0, \pi], \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier et la série de Fourier de f.
3. Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
4. Calculer les sommes des séries :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \; ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$$

On considère la fonction 2π-périodique impaire g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - 1}{2} x & \text{pour} \quad x \in [0,1] \\ f(x) & \text{pour} \quad x \in [1, \pi] \end{cases}$$

5. Tracer le graphe de la fonction g sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2} \sin nx$$

7. Déduire de ce qui précède

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$$

21

Exercice 2. (6 points)

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe des réels positifs A et B, et un entier naturel m tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq A + B|z|^m$$

1. Enoncer et démontrer les inégalités de Cauchy.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer, à l'aide des inégalités de Cauchy, que

$$\forall r \in]1, +\infty[, \quad \left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!\,(A+B)}{r^{n-m}}$$

3. En déduire que

$$\forall n \geq m+1, \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

4. Conclure que f est une fonction polynôme.
5. Qu'en est-il lorsque $m = 0$?

Exercice 3. (6 points)

Soit g la fonction à variable complexe définie par

$$g(z) = \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{-6z^4 + 20z^3 - 6z^2}$$

1. Déterminer les pôles de g et les résidus en ces pôles.
2. Calculer

$$\int_\gamma g(z)\,dz$$

où γ est le cercle de centre l'origine et de rayon 1 (préciser le théorème utilisé).

3. En utilisant ce qui précède, calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin^2\theta}{5 - 3\cos\theta}\,d\theta$$