



Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques de
Mohammed VI
Année Universitaire : 2016-2017

جامعة الحسن الثاني بالدار البيضاء
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA
U 2

EXAMEN

Analyse 4

MIP – S3

FSTM COPIE CENTRE



EXAMEN

4 Analyse



Faculté des Sciences et Techniques - Mohammedia

جامعة الحسن الثاني - الدار البيضاء

Université Hassan II de Casablanca

كلية العلوم والتقنيك - المحمدية

Faculté des Sciences et Techniques- Mohammedia

Département de Mathématiques
Module M136

A.U: 2018/2019
Semestre S3

Nom:.....
Code:.....

Examen d'analyse 4
Décembre 2018 (1 H 45 mn)

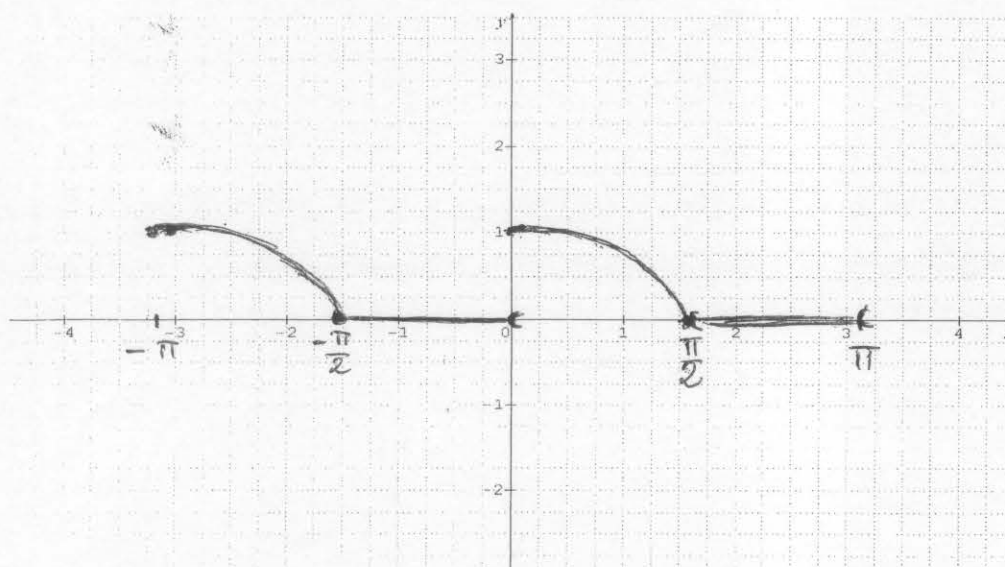
Exercice 0.1

Soit la fonction f périodique de période $T = \pi$, définie par

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ f(x) = \cos(x), & \text{si } 0 \leq x < \pi/2 \end{cases}$$

1. Donner la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

(1 pts)



Exercice 0.2

Soit la série de fonctions $\sum \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+x^2}$, $n \geq 1$

1. Montrer que cette série converge simplement sur un intervalle I que l'on déterminera. (2 pt)

Pour $x < 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+x^2} \right| \neq 0$ la série

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{e^{-x} e^{-nx} \cdot n+x^2}{(n+1)+x^2 \cdot e^{-nx}} \rightarrow e^{-x} \begin{cases} < 1 \\ = 1 \\ > 1 \end{cases} \begin{matrix} \text{cv} \\ ? \\ \text{div} \end{matrix}$$

Donc cv pour $x \geq 0$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ (S.E)
 $I = [0, +\infty[$

2. Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+x^2}$ la somme de la cette série. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$. (2pt)

$$\forall n \geq 0 \quad |R_n(x)| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot e^{-(n+1)x}}{n+x^2} \right| \leq \frac{1}{n}$$

$\sup_{x \geq 0} |R_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ D.M. la cv

Une fonction

3. Calculer, en justifiant l'existence, les limites. (1 pt)

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ finie

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Exercice 0.3

Soit l'équation différentielle (E) : $xy' - y = \frac{x^2}{1+x}$. On suppose que la solution f est développable en série

entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Calculer, pour $n \geq 0$, a_n en fonction n . (2 pt)

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} \quad x f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n \quad \text{Donc} \quad \sum_{n \geq 1} n a_n x^n - \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{n+2}$$

$$(E) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (n a_n - a_n) x^n - a_0 = \sum_{n \geq 2} (-1)^n x^n$$

$$f(x) = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^n$$

$$f'(x) = x \ln(1+x)$$

$$f(0) = 0$$

Pour $n \geq 2$ $a_n = \frac{(-1)^n}{n-1}$, $a_0 = 0$, a_1 quel

2. Donner sous forme de fonction usuelle la solution f_0 de (E) ~~qui vérifie $f_0(0) = 0$~~ . (1 pt)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n-1} x^n$$

$$f(x) = a_1 x + \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n} x^{n+1} = a_1 x + x \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} x^n$$

Exercice 0.4

$$= a_1 x - (x \ln(1+x) - x) = (a_1 + 1)x - x \ln(1+x)$$

Soit la suite de fonction $(f_n)_{n \geq 1}$ définie sur $[-1, 1]$ par $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2}$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[-1, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera. (0.5 pt)

2. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction f que l'on déterminera. (2 pt)

3. Étudier simple et converge uniformément sur $[-1, 1]$ de la suite $(f'_n)_{n \geq 1}$ (suite des dérivées) vers une fonction g que l'on déterminera. (1.5 pt)



Université Hassan II- Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia
Département de Mathématiques

Année 2016/2017
Parcours: MIP
Module: M136

Partiel d'analyse 4 (M 136)
Session janvier 2017 S4 (Durée: 2 H)

Date: 04.01.2017

Exercice 0.1

(5 pts)

Soit la fonction $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^{-x}}{\ln(n)}$.

1. Donner le domaine de définition D de f (on peut exploiter la série de Bertrand). (1 pt)
2. Montrer que f est continue sur D . (2 pts)
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D . (2 pts)

Exercice 0.2

(7 pts).

Partie.I. On considère l'équation différentielle suivante: $(E) : xy' - 2y = x^3 e^{-x}$.

et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa solution développable en série entière au voisinage de 0.

1. Déterminer a_n en fonction de n pour $n \geq 0$. (1.5 pts)
2. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles. (1.5 pts)
3. Déterminer la solution de (E) sachant $f(1) = 1$. (1 pts)

Partie.II. Soit la fonction $f(x) = \sum \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^n$.

1. Donner le domaine de définition de f . (0.5 pt)
2. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles sur $] -1, 1[$. (1.5 pts)
3. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$. (1 pts)

Exercice 0.3**(8 points)**Soit f la fonction périodique de période $T = 2$ définie par:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

1. Donner l'expression de $f(x)$ sur l'intervalle $] -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. (1.5 pts)
2. Tracer la courbe de f sur $] -3, 4]$. (1.5 pts)
3. Donner la nature de la convergence de la série de Fourier associée à f , en justifiant votre réponse. (1 pts)
4. Donner le développement en série de Fourier de f . (2.5 pts)
5. En déduire les sommes (1.5 pts)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$



Université Hassan II- Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia
Département de Mathématiques

Année 2015/2016
Parcours: MIP
Module: M136

Partiel 2 d'analyse 4 (M 136)

Session Printemps 2016- S3 (2 H)

NB:

Les trois exercices doivent être rédigés séparément chacun dans un cahier d'examen.

Exercice 0.1

Dans la partie.I les questions 1) et 2) sont au choix et la partie.II est obligatoire.

Partie.I

1. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définie par $f_n(x) = \frac{ne^x + xe^{-x}}{x+n}, x \geq 0$.
 - (a) Étudier la convergence simple et uniforme de la suites $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $[0,1]$. (1+1 pts)
 - (b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$. (justifier votre réponse.) (1 pt)
2. **Question de cours.**
 - (a) Énoncer la définition d'une fonction holomorphe sur un domaine et la définition d'une fonction analytique. (0.5+0.5 pt)
 - (b) Énoncer la formule intégrale de Cauchy et le théorème des résidus. (1+1 pts)

Partie.II

Soit la série de fonctions de terme général $(f_n)_{n \geq 2}$ définie par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\ln(n+x^2)}$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur un intervalle I que l'on déterminera (on pose $f(x)$ sa somme). (0.5 pts)
2. Montrer que f est continue sur I . (1 pts)
3. La convergence sur I est-elle normale? (1 pts)
4. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $|f'_n(x)| \leq \frac{2}{\ln^2(n)}$ et déduire que f est dérivable sur $[1, +\infty[$. (0.5+0.5+0.5 pts)

Exercice 0.2

Soit la fonction f périodique de période $T = 2$, définie par

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ f(x) = 1 - x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

1. Donner la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2, 3]$. (1 pts)
2. Donner l'expression de f sur l'intervalle $[2, 3]$. (1 pts)
3. Montrer que la somme de la série de Fourier associée à f , $S_f(x)$, est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad S_f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x) + \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x).$$

4. Étudier la convergence de la série de Fourier. (2.5 pts)
5. Calculer les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. (1 pt)
6. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{\pi^2(2n+1)^4} + \frac{1}{(2n+1)^2} \right) = \frac{5}{24} \pi^2$. (0.5+0.5 pt)
7. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{\pi^2(2n+1)^4} + \frac{1}{(2n+1)^2} \right) = \frac{5}{24} \pi^2$. (1 pt)

Exercice 0.3

1. Donner les rayons R_1 et R_2 de convergence des séries $\sum \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ et $\sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, et rappeler leurs sommes. (2 pts)

2. Soit l'équation différentielle (E) : $x^2 y'' - 6xy' + (12 + x^2)y = 0$. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, les solutions de (E) développable en série entière.

- (a) Donner une relation de récurrence liant les coefficients a_n pour $n \geq 1$. (1.5 pts)
- (b) En déduire que pour $k \geq 1$.

$$a_{2k+3} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_3 \quad \text{et} \quad a_{2k+4} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_4.$$

- (c) Exprimer, en fonction de a_3 et a_4 , la fonction $f(x)$ à l'aide de fonctions élémentaires. (1 pts)
- (1.5 pts)

Module M136 : Épreuve d'Analyse 4

Durée : 2h

L'épreuve comprend 3 parties indépendantes.
Chaque partie doit être rédigée sur un cahier d'examen à part.

PARTIE I

Exercice 1 (6 points)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\ln(nx)}.$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction f_n .
2. Soit $a > 1$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement et uniformément sur l'intervalle $[a, +\infty[$ vers une fonction f que l'on déterminera.
3. Montrer que la série de terme général f_n converge simplement vers une fonction F pour $x > 1$.

On note $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$

4. Montrer que la série $\sum_n f_n$ converge uniformément vers F sur $]1, +\infty[$ (Utiliser le reste).
5. Montrer que F est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$.

Exercice 2 (3 points)

Soit f la fonction complexe définie par :

$$f(z) = \frac{z^2 e^{-iz}}{(z-i)^2},$$

et soit $I = \int_{\gamma^+} f(z) dz$. Où γ^+ est le cercle de centre O et de rayon $R = \frac{3}{2}$.

1. Calculer I de deux façons différentes (par le théorème des résidus, puis en utilisant l'intégrale de Cauchy).
2. Soit $g(z) = \frac{f(z)}{z^2}$. Donner le développement en série de Laurent de g au voisinage de i .

Module M136 : Épreuve d'Analyse 4

Durée : 2h

L'épreuve comprend 3 parties indépendantes.

Chaque partie doit être rédigée sur un cahier d'examen à part.

PARTIE II

Exercice 3 (7 points)

Soit f la fonction, de période 2, définie par

$$f(x) = 1 - |x|, \quad \forall x \in [-1, 1[.$$

1. Dessiner la courbe de f sur l'intervalle $[-3, 3]$?
2. Calculer la série de Fourier $S_f(x)$ de f .
3. Étudier les convergences simple et uniforme de la série de Fourier de f .
4. Calculer la valeur de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

En déduire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Module M136 : Épreuve d'Analyse 4

Durée : 2h

-
- L'épreuve comprend 3 parties indépendantes. Les parties 1 et 2 sont obligatoires. La partie 3 est constituée de 2 exercices; traiter au choix un exercice parmi les deux proposés.
 - Chaque partie doit être rédigée dans une feuille à part.
-

PARTIE I (7 points)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ dont le terme général est défini par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{n+1} \ln(x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.
2. Calculer, pour tout n , le maximum de la fonction $x \mapsto |f_n(x)|$ sur l'intervalle $[0, 1]$, et déduire que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
3. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement vers une fonction que l'on explicitera.
4. La convergence de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ est-elle uniforme?

Module M136 : Épreuve d'Analyse 4

Durée : 2h

L'épreuve comprend 3 parties indépendantes.

Chaque partie doit être rédigée sur un cahier d'examen à part.

PARTIE III

Exercice 4 (5 points). On se propose de calculer la somme de la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^3 + n^2 + n + 1}{n!} z^n; \quad z \in \mathbb{C}.$$

1. Quel est le rayon de convergence de cette série.
2. Démontrer qu'il existe des réels α, β, γ et δ tels que

$$X^3 + X^2 + X + 1 = \alpha + \beta X + \gamma X(X - 1) + \delta X(X - 1)(X - 2).$$

3. En déduire que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad S(z) = P(z)e^z,$$

où $P(z)$ est un polynôme de degré 3 que l'on explicitera.

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 4 \\ \delta = 1 \end{cases}$$

Module M136 : Épreuve d'Analyse 4

Durée : 2h

-
- L'épreuve comprend 3 parties indépendantes. Les parties 1 et 2 sont obligatoires. La partie 3 est constituée de 2 exercices; traiter au choix un exercice parmi les deux proposés.
 - Chaque partie doit être rédigée dans une feuille à part.
-

(A)
PARTIE II (7 points)

Soit f la fonction paire, de période π , définie par

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - x, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

1. Dessiner la courbe de f sur l'intervalle $[-3\pi/2, 3\pi/2]$. Que peut-on dire de la continuité et la dérivabilité de f ?
2. Définir $f(x)$ sur l'intervalle $[\pi/2, \pi]$.
3. Calculer la série de Fourier $S_f(x)$ de f .
4. Étudier les convergences simple et uniforme de la série de Fourier de f .
5. Calculer la valeur de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

En déduire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

27

Module M136 : Épreuve d'Analyse 4

- L'épreuve comprend 3 parties indépendantes. Les parties 1 et 2 sont obligatoires. La partie 3 est constituée de 2 exercices ; traiter au choix un exercice parmi les deux proposés.
- Chaque partie doit être rédigée dans une feuille à part.

PARTIE III (7 points)

Exercice 1. Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

Q1. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x).$$

- (a) Trouver une solution f de (E) développable en série entière au voisinage de 0.
- (b) Vérifier que : $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$.
- (c) Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

On donne : $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad \forall x \in]-1, 1[.$

Q2. Soit g la fonction $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

- (a) Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?
- (b) Exprimer $g'(x) + g(x)$ à l'aide d'une fonction élémentaire.
- (c) En déduire que $g(x) = \sinh(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On rappelle que : $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$

Exercice 2. Soit la fonction $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z(z^2 + 4iz - 1)}$.

1. Déterminer les pôles de f .
2. Calculer les résidus en ces pôles.
3. On pose $z = e^{i\theta}$ et on rappelle que $\sin(\theta) = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$.

(a) Montrer que $I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{2 + \sin(\theta)} d\theta = \frac{1}{i} \int_{\gamma^+} f(z) dz.$

où γ^+ est le cercle de centre O et de rayon $R = 1$ orienté dans le sens positif.

(b) En déduire l'intégrale $I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{2 + \sin(\theta)} d\theta.$

Module M136 : Épreuve de rattrapage

Durée : 1h30

Exercice 1 Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme

$$S(z) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$$

Que se passe-t-il si $|x| = R$.

Exercice 2 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x^2 + n)^2}$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f .
2. Montrer que f est continue sur D .
3. Montrer que f est de classe C^1 sur tout intervalle de la forme $] -a, a[$?

Exercice 3 Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}$$

1. Montrer que l'on peut écrire I sous la forme

$$I = \int_{\gamma^+} f(z) dz,$$

où $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction que l'on déterminera, et γ^+ le cercle unitaire orienté positivement.

2. Calculer alors I par la méthode des résidus.

Épreuve de rattrapage

Durée : 1h30

Exercice 1.

Préciser le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)},$$

et calculer sa somme.

Exercice 2.

On considère la suite de fonctions (f_n) définies par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \geq 0.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) .
2. On pose

$$g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x$$

- a. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} |g_n(n)|$.
- b. Que peut-on déduire quant à la convergence uniforme de la suite (f_n) .

Exercice 3.

On considère la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$, où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{(n+x)^2}$$

1. Étudier la convergence de cette série sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que la somme $S(x)$ de cette série est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Prouver que la fonction S est décroissante et positive sur $\mathbb{R}^+$.
4. Préciser la valeur de S à l'origine et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$.
5. Établir que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.