Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia

23, —

نماذج امتحانات

exemple examens

ANALYSE-1

CORRIGER

MIP –S1

FSTM COPIE CENTRE

Partiel Analyse1 - 30 Décembre 2019

Nom et Prénom...

Exercice 1. *Les questions suivantes sont indépendantes. Pour chaque question 4 affirmations sont proposées parmi lesquelles 1 seule est vraie. Pour chaque question,* **cochez puis expliquez** *la réponse que vous pensez vraie:*

1. *Soient* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $(u_n)_n$ *la suite définie par:* $u_0 = a$ *et* $u_{n+1} = u_n \exp(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

   ☐ $u_0 \geq u_1$ ☐ $(u_n)_n$ *est décroissante*

   ☐ $(u_n)_n$ *est croissante* ☐ $(u_n)_n$ *est bornée*

   Explication:..

   ....

2. *Soit* $A = \{\frac{2n+1}{n+2},\ n \in \mathbb{N}\}$

   ☐ $\sup(A) = 2$ *et* $\inf(A) = 0$ ☐ $\min(A) = \frac{1}{2}$ *et* $\sup(A) = 2$

   ☐ $\inf(A) = 1$ *et* $\sup(A) = \frac{1}{2}$ ☐ $\max(A) = 2$ *et* $\inf(A) = 1$

   Explication:..

   ....

3. *On considère* F *la fonction définie par:* $F(x) = x - E(x)$, *où* $E(x)$ *désigne la partie entière de* x.

   ☐ $F(x) = 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$ ☐ $7 \leq x < 8 \Rightarrow F(x) = 7$

   ☐ $x = -0.2 \Rightarrow F(x) = -0.2$ ☐ $F(x) = F(y) \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

   Explication:..

   ....

4. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

   ☐ $argch(ch(x)) = x$ ☐ $ch(argsh(x)) = \sqrt{x^2+1}$

   ☐ $argsh(ch(x)) = \sqrt{x^2-1}$ ☐ $th(argsh(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

   Explication:..

   ....

5. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$. Alors*

☐ *Si $f(x) < 0$ pour tout $x \in]0,1[$ alors $f(1) < 0$.*

☐ *Si $f(0).f(1) > 0$ alors $\exists c \in]0,1[\ / \ f(c) = 0$.*

☐ *Il existe un unique réel c tel que $f(c) = \inf\{f(x),\ x \in [0,1]\}$.*

☐ *Si $f(0) < f(1)$ alors $\forall y \in]f(0), f(1)[,\ \exists c \in]0,1[\ / \ f(c) = y$.*

Explication:..

....

6. *Soient $0 < a < b$ et f une fonction réelle continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $g : x \longmapsto \frac{f(x)}{x+1}$. Alors*

☐ *Le théorème de Rolle ne s'applique pas à g sur $[a,b]$.*

☐ *La dérivée de g est $g'(x) = \frac{f'(x)}{(x+1)^2}$.*

☐ *$\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)}{c+1}$.*

☐ *$\exists c \in]a,b[$ tel que la tangente à la courbe (C_f) en c passe par le point $A(-1,1)$.*

Explication:..

....

7. *On considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par: $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Alors*

☐ *f est bijective et $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}$* ☐ *$f$ est bijective et $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{3}$*

☐ *$\exists c \in \mathbb{R} \ / \ f'(c) = 0$* ☐ *$f$ bijective et $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$.*

Explication:..

....

8. *Soient f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et F la primitive de f telle que $F(0) = 1$. On suppose qu'au voisinage de 0, $f(x) = 3 + 2x + x^2 + o(x^4)$.*

☐ *$F(x) = 3x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^5)$* ☐ *La dérivée troisième de F en 0 est nulle*

☐ *$F(x) = 1 + 3x + x^2 + o(x^2)$* ☐ *$f'(x) = 2 + 2x + o(x^4)$*

Explication:..

....

Exercice 2. *On considère a un réel tel que $0 < a < 1$ et $(u_n)_n$ la suite de terme général*

$$u_n = (1+a)(1+a^2)...(1+a^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1. *Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$.*
2. *Soit $(v_n)_n$ la suite de terme général: $v_n = a + a^2 + ... + a^n$*
   (a) *Calculer v_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
   (b) *Déduire que la suite $(v_n)_n$ est majorée.*
3. *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, en utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $1 + x \leq e^x$.*
4. *Déduire que $u_n \leq e^{v_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*
5. *Que peut-on conclure.*

Exercice 3.

1. *Comment la fonction $u : x \mapsto \arcsin(x)$ est - elle définie? Montrer qu'elle est dérivable sur $]-1, 1[$ et que sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.*
2. *Donner le Développemnt limité de la fonction u en 0 à l'ordre 3.*
3. *Soit f la fonction définie sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$ par*

$$f(x) = \frac{e^{\arcsin(x)} - \sqrt{1-x^2}}{x}$$

   (a) *Calculer le développement limité de la fonction f en 0 à l'ordre 2.*
   (b) *f est-elle prolongeable par continuité en 0? Si oui étudier la dérivabilité de ce prolongement en 0.*

On pourra utiliser, sans démonstration, les développements limités au voisinage de 0 des fonctions suivantes:

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$,

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$.

Corrigé partiel - Analyse 1
Décembre 2019

Exercice 1: 8pts

0,5 1. ☒ $(U_n)_n$ est croissante.

0,5 Explication : . $f : x \mapsto xe^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

. $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n > 0$ et $\frac{U_1}{U_0} = e^a > 1$.

0,5 2. ☒ $\min(A) = \frac{1}{2}$ et $\sup(A) = 2$

0,5 Explication : . la suite $\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)_n$ est croissante majorée par 2

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2 = \sup(A)$

. pour $n = 0$ $U_0 = \frac{1}{2} \leqslant \frac{2n+1}{n+2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{2} = \min(A)$

0,5 3. ☒ $F(x) = F(y) \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

0,5 Explication : $F(x) = F(y) \Rightarrow x - y = \underset{\in\mathbb{Z}}{E(x)} - \underset{\in\mathbb{Z}}{E(y)} \in \mathbb{Z}$

0,5 4. ☒ $ch(argsh(x)) = \sqrt{x^2+1}$

0,5 Explication : $ch^2(argsh(x)) - sh^2(argsh(x)) = 1$

$ch(argsh(x)) = \sqrt{1+x^2}$ puisque $ch(t) > 0\ \forall t$.

0,5 5. ☒ Si $f(0) < f(1)$ alors $\forall y \in]f(0), f(1)[,\ \exists c \in]0,1[\ /\ f(c) = y$.

0,5 Explication : c'est le T. V. I.

0,5 6. ☒ $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)}{c+1}$.

0,5 Explication : g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $g(a) = g(b)$

$\underset{\text{Th de Rolle}}{\Longrightarrow}$ $\exists c \in]a,b[\ /\ g'(c) = 0 = \frac{f'(c)(c+1) - f(c)}{(c+1)^2}$

0,5 7. ☒ f est bijective et $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{3}$.

0,5 Explication : Etant continue et strictement croissante, f est bijective

$[f^{-1}(1) = 0 \Leftrightarrow 1 = f(0)]$ f est dérivable en 0 et $f'(0) = 3 \neq 0$

donc $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$.

0,5 8. ☒ $F(x) = 1 + 3x + x^2 + o(x^2)$

0,5 Explication : $F(x) = F(0) + \int_0^x (3 + 2t)\,dt + o(x^2)$

$= 1 + 3x + x^2 + o(x^2)$.

Exercice 2: 6pts

Soient $0 < a < 1$, $(U_n)_n$: $U_n = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1 1. Monotonie de $(U_n)_n$: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = (1 + a^{n+1}) > 1 \Rightarrow (U_n)_n$ est croissante.

2. Soit $(v_n)_n$: $v_n = a + a^2 + \dots + a^n$

0,5 2-a: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $v_n = a \cdot \frac{1-a^n}{1-a}$

0,5 2-b: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < a^n < 1 \Rightarrow 0 < 1 - a^n < 1 \Rightarrow v_n \leqslant \frac{a}{1-a}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; la fonction $t \mapsto e^t$ est dérivable sur $[0,x]$ donc, d'après le T.A.F, il existe $c_x \in]0,x[$ tel que

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^{c_x} \quad 0,5$$

1 Or $0 < c < x \Rightarrow 1 < e^c \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} > 1 \Rightarrow e^x > 1 + x$.

4. D'après la question 3) on a

$$1 + a^k \leqslant e^{a^k} \quad \forall k \in [\![1,n]\!],$$

donc $\prod\limits_{k=1}^{n} (1 + a^k) \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n} e^{a^k} = e^{\sum_{k=1}^{n} a^k}$

1

$$U_n \leqslant e^{v_n}$$

5. D'après la question 2-b on a $v_n \leqslant \frac{a}{1-a}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

donc $e^{v_n} \leqslant e^{\frac{a}{1-a}}$

1 Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_n \leqslant e^{\frac{a}{1-a}}$

0,5 Ainsi $(U_n)_n$ est une suite croissante et majorée ce qui implique qu'elle est convergente.

3) $\quad f(x) = \dfrac{e^{\arcsin(x)} - \sqrt{1-x^2}}{x} \quad ; \quad x \in [-1,0[\cup]0,1]$

3-a) On a :

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$e^{\arcsin(x)} = e^{x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}$$

$$= 1 + \left(x + \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2!}\left(x + \frac{1}{6}x^3\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x + \frac{1}{6}x^3\right)^3 + o(x^3)$$

0,5 $\quad = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

0,5 $\quad \sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$

0,5 $\quad \boxed{\dfrac{e^{\arcsin(x)} - \sqrt{1-x^2}}{x} = 1 + x + \dfrac{1}{3}x^2 + o(x^2)}$

3-b)

$* \quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 + x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$

$= 1$

Donc f admet un prolongement par continuité $\tilde{f}$ en 0

1 $\quad$ défini par : $\quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [-1,0[\cup]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$* \quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} 1 + \frac{1}{3}x + o(x)$

0,5 $\quad = 1$

Donc $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}'(0) = 1$

Exercice 3 : 5,5 pts

1. * puisque $v : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$ est une fonction

$\quad x \longmapsto \sin(x)$

0,5 $\quad$ continue et strictement croissante, elle définit donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$.

La fonction $u : x \longmapsto \arcsin(x)$ est définie comme étant

0,5 $\quad$ la fonction réciproque de v. Elle est définie de $[-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

* La fonction v est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$v'(x) = \cos(x) \neq 0$.

Donc u est dérivable sur $]-1,1[$ et on a :

0,5 $\quad u'(x) = \dfrac{1}{\sin'(\arcsin(x))}$

$= \dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2. La fonction u est dérivable au vois de 0 et on a

$u'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

1 $\quad = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

Donc $\quad u(x) = \underset{0}{\underbrace{u(0)}} + \displaystyle\int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2\right) dt + o(x^3)$

$$\boxed{\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}$$

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia
Département de Mathématiques

Parcours MIP
Module M111: Analyse1
Année 2018 - 2019
Durée: 1heure45min

Partiel Analyse1 - 25 Décembre 2018

Nom et Prénom..

Exercice 1. *Les questions suivantes sont indépendantes. Pour chaque question 4 affirmations sont proposées parmi lesquelles 1 seule est vraie. Pour chaque question,* **cochez** *puis* **expliquez** *la réponse que vous pensez vraie:*

1. *Soient x et y deux nombres rationnels strictement positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels. Parmi les nombres réels suivants lesquels sont aussi des nombres rationnels?*

   ☐ $x + \sqrt{y}$ ☐ $y\sqrt{x}$
   ☐ $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ ☐ $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

   Explication:..
   ....

2. *Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $F(x) = E(10x)$:*

   ☐ $F(\frac{2}{3}) = 66$ ☐ $F(x) = 10 \Leftrightarrow x \in \{10, 11, 12, ..., 19\}$
   ☐ $\forall x > 0, F(x) \geq 1$ ☐ $F(x) = F(y) \Rightarrow |x - y| < \frac{1}{10}$

   Explication:..
   ....

3. *On considère l'ensemble $A = \{1 + (-1)^{n+1} + (-\frac{1}{2})^n, n \in \mathbb{N}\}$*

   ☐ *A possède un maximum* ☐ *1 est un minorant de A*
   ☐ $\sup(A) = 2$ ☐ $\inf(A \cap \mathbb{R}^+) = -1$

   Explication:..
   ....

4. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles vérifiant: $u_0 = a$, $v_0 = b$ avec $a < b$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \leq v_n$, $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leq v_n$. Alors (u_n) et (v_n) sont*

   ☐ *adjacentes* ☐ *divergentes*
   ☐ *convergentes* ☐ *non bornées*

   Explication:..
   ....

5. *Soient (u_n) et (v_n) les suites de termes généraux $u_n = \sin(\frac{2n\pi}{3})$, $v_n = \sin(\frac{3}{2n\pi})$, alors*

   ☐ *(u_n) diverge et (v_n) converge* ☐ *(u_n) croissante et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
   ☐ *(u_n) et (v_n) sont divergentes* ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

   Explication:..
   ....

6. *Soit f la fonction définie par: $f(x) = \tan(x)$, alors*
   - ☐ $f(0) = f(\pi)$ *donc il existe $c \in]0, \pi[$ tel que $f'(c) = 0$.*
   - ☐ $f(0) = f(\pi)$ *mais il n'existe pas de $c \in]0, \pi[$ tel que $f(c) = 0$.*
   - ☐ *Le théorème de Rolle ne s'applique pas à f sur $[0, \pi]$ car $f(0) \neq f(\pi)$.*
   - ☐ *Le théorème de Rolle ne s'applique pas à f sur $[0, \pi]$.*

   Explication:...
   ....

7. *Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $[0, 1]$, alors*
   - ☐ f^{-1} *est une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.*
   - ☐ *La courbe de f^{-1} est symétrique à celle de f par rapport à l'axe des abscisses.*
   - ☐ *Pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = y$ alors $f(y) = x$.*
   - ☐ f *est une bijection de $[0, 1]$ vers $[f(0), f(1)]$.*

   Explication:...
   ....

8. *Au voisinage de 0*
   - ☐ $\sin(2x) = 2x + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$
   - ☐ $\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3)$
   - ☐ $e^{1+2x} = e(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3))$
   - ☐ $\sqrt{1+2x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$

   Explication:...
   ....

Exercice 2. *On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^3+6x+1}{9}$ et la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x + 1$.*

1. *Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $[0, \frac{1}{2}]$.*
2. *Déduire que x_0 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[0, \frac{1}{2}]$, et que $f(x) \geq x$ pour tout $x \in [0, x_0]$.*
3. *On définit la suite récurrente (u_n) par: $u_0 = 0$, et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   - (a) *Montrer que $0 \leq u_n \leq x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   - (b) *Etudier la monotonie de la suite (u_n), est-elle convergente? Si oui déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.*

Exercice 3.

1. *Comment la fonction $u : x \mapsto arctan(x)$ est - elle définie? Montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.*
2. *En utilisant la formule de Taylor-young, déterminer le développement limité de la fonction arctan à l'ordre 3 au point 1.*
3. *Soit f la fonction définie par $f(x) = arctan(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}})$*
   - (a) *Donner le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de la fonction $t \mapsto \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$.*
   - (b) *Déduire le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de la fonction $t \mapsto arctan(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}})$.*
   - (c) *Déduire le développement asymptotique de la fonction f en $+\infty$.*
   - (d) *Donner l'équation de l'asymptote, en pécisant sa position relative par rapport à la courbe de f en $+\infty$.*

On pourra utiliser, sans démonstration, les développements limités au voisinage de 0 des fonctions suivantes:

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$,

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$.

$$\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)\right)' = \left(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)' \frac{1}{1 + \frac{1-t}{1+t}} = \frac{\left(\frac{1-t}{1+t}\right)'}{2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}} \quad \frac{1+t}{\cancel{1+t}\ 2}$$

$$\left(\frac{1-t}{1+t}\right)' = \frac{-(1+t)-(1-t)}{(1+t)^2} = \frac{-2}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{-2}{2(1+t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{1-t^2}}$$

Corrigé du partiel - Analyse 1.
25 - Déc - 2018

Exercice 1 : (8pts)

1) ☒ $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = \sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2 = x-y \in \mathbb{Q}$ (0,1) (0,1)

(0,1) 2) ☒ $F(x)=F(y) \Rightarrow |x-y| < \frac{1}{10}$

→ justification : $E(10x) \leq 10x < E(10x)+1$ et $-E(10y)-1 < -10y \leq -E(10y)$

(0,1) donc : $-1 < 10(x-y) < 1 \Rightarrow |x-y| < \frac{1}{10}$.

(0,1) 3) ☒ $\sup(A) = 2$

→ justification : $A = \Big\{ \underbrace{\frac{1}{2^n},\ n\in\mathbb{N}}_{\inf=0,\ \sup=1} \Big\} \cup \Big\{ \underbrace{2-\frac{1}{2^{n+1}},\ n\in\mathbb{N}}_{\inf=\frac{3}{2},\ \sup=2} \Big\}$

(0,1)

(0,1) 4) ☒ Convergentes.

→ Justif : $u_0 < \cdots < u_n \leq v_n < \cdots < v_0$, (u_n) croissante majorée par v_0

(0,1) et (v_n) décroissante minorée par u_0.

(0,1) 5) ☒ (u_n) diverge et (v_n) converge.

→ Justification : $\left.\begin{array}{l} u_{3n} = 0 \\ u_{3n+1} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n)$ diverge ; $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

(0,1)

(0,1) 6) ☒ Le Th de Rolle ne s'applique pas à f sur $[0,\pi]$.

(0,1) → Justification : la fonction f n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$ et donc elle n'est pas continue sur $[0,\pi]$.

(0,1) 7) ☒ f est une bijection de $[0,1]$ vers $[f(0), f(1)]$

(0,1) → Justification : f est continue et est strictement croissante sur $[0,1]$ donc f est bijective sur $[0,1]$ dans $f([0,1]) = [f(0), f(1)]$

(0,1) 8) ☒ $e^{1+2x} = e\, e^{2x}$

$= e\left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3)\right)$

(0,1) $= e\left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)\right)$.

Exercice 2:

g et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^3+6x+1}{9}$, $\quad g(x) = x^3 - 3x + 1.$

1- . La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est (0,1) continue sur $[0, \frac{1}{2}]$.

2pts

. $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1) < 0 \quad \forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ donc,

g est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$. (0,1)

. $g(0) = 1$ et $g(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8}$, $\quad g(0) \times g(\frac{1}{2}) < 0$ (0,1)

(0,1) Donc d'après le théorème de bijection (corollaire du T.V.I)

l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$.

2- * $f(x) = x \iff \dfrac{x^3+6x+1}{9} = x$

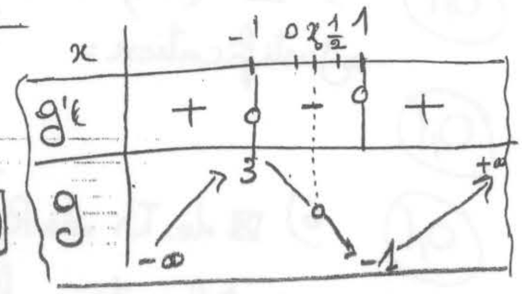
$\iff x^3 - 3x + 1 = 0$ (0,1)

$\iff g(x) = 0$

1pt

puisque l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique x_0 dans $[0, \frac{1}{2}]$ alors l'equation $f(x) = x$ admet aussi x_0 comme une solution unique dans $[0, \frac{1}{2}]$.

* $f(x) - x = \frac{1}{9} g(x)$ (0,1)



g est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ donc $g([0, x_0]) = [g(x_0), g(0)]$

$= [0, 1]$

$\forall x \in [0, x_0] \quad g(x) \geq 0 \quad$ càd $\quad f(x) \geq x$.

3) $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) On procède par récurrence:

pour $n = 0$, $\quad 0 \leq U_0 = 0 \leq x_0$

1pt

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\quad 0 \leq U_n \leq x_0$, alors

$f(0) \leq f(U_n) \leq f(x_0) \quad$ (puisque $f'(x) = \frac{1}{9}(3x^2+6) > 0$)

Donc $0 < \frac{1}{9} \leq u_{n+1} \leq x_0$

Ainsi, d'après le principe de récurrence, $0 \leq u_n \leq x_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2pts) b) * f étant strictement croissante sur $[0, x_0]$ et $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{9}$

1pt c.à.d $u_0 < u_1$, alors la suite (u_n) est croissante.

* La suite (u_n) est croissante et est majorée par x_0, elle

0,5 est donc convergente vers une limite $\ell \in [0, x_0]$ et qui

vérifie $f(\ell) = \ell$. (puisque f est continue sur $[0, x_0]$ et $f([0, x_0]) \subset [0, x_0]$)

0,5 Or l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique

$x_0 \in [0, x_0]$, donc $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$.

Exercice 3: (6pts)

1) * la fonction $h :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \tan(x)$ est continue et strictement croissante, elle définie donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.

1 Sa fonction réciproque est appelée arctan et elle est définie de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

* la fonction h est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

2pts 0,1 on a $h'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$.

Donc $h^{-1} \equiv \arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))}$$

0,1

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}.$$

2) La formule de Taylor-young sur un intervalle $[1, a]$, pour $x \in [1, a]$ s'écrit:

$$\arctan(x) = \arctan(1) + \frac{\arctan'(1)}{1!}(x-1) + \frac{\arctan''(1)}{2!}(x-1)^2 + \arctan^{(3)}(1)\frac{(x-1)^3}{3!} + (x-1)^3 \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 0$

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan'(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$$

$$\arctan''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \arctan''(1) = -\frac{1}{2}$$

$$\arctan^{(3)}(x) = \frac{-2+4x^2+6x^4}{(1+x^2)^4} \Rightarrow \arctan^{(3)}(1) = \frac{1}{2}$$

Finalement:

1pt $$\boxed{\arctan(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o((x-1)^3)}$$

3) $f : x \longmapsto \arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

a) $DL_3(0)$ de la fonction $t \longmapsto \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$

$$\frac{1-t}{1+t} = (1-t)\left(1-t+t^2-t^3+o(t^3)\right)$$
$$= 1-2t+2t^2-2t^3+o(t^3)$$

$$\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = \left(1-2t+2t-2t^3+o(t^3)\right)^{\frac{1}{2}}$$

0,5 $$\boxed{\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = 1-t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t^3+o(t^3)}$$

b) $DL_3(0)$ de la fonction $t \longmapsto \arctan\left(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)$:

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right) = \arctan\left(1-t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t^3+o(t^3)\right)$$
$$= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left(-t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t^3\right)-\frac{1}{4}\left(-t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t^3\right)^2$$
$$+\frac{1}{12}\left(-t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t^3\right)^3+o(t^3)$$

0,5 $$\boxed{\arctan\left(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right) = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{12}t^3+o(t^3)}$$

c) $$f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$$
$$= \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}}\right)$$

On pose $t = \frac{1}{x}$ $\quad \underset{x\to+\infty}{t \longrightarrow 0}$

$$f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)$$

1pt $$\boxed{f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}-\frac{1}{12}\times\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

d) 1pt

0,5 * $y = \frac{\pi}{4}$ est une équation de l'asymptote à (C_f) en $+\infty$.

0,5 * $f(x) - y \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{2x}$, donc (C_f) se trouve en-dessous de son asymptote en $+\infty$.

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia
Département de Mathématiques

Parcours MIP
Module M111: Analyse1
Année 2017 - 2018
Durée: 2 heures

Responsables: A.ABASSI, A.BALAYADI, M.MALIKI

Partiel Analyse1 - 03 Janvier 2018

Exercice 1:

1. Rappeler le théorème des accroissements finis.
2. Montrer que
$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} < ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$$
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles définies par
$$u_1 = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1} - ln(n), \quad \forall n \geq 2$$
$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - ln(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$
   (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Conclure.
   (b) Soit $E = \{v_n, n \in \mathbb{N}^*\}$. Déterminer, en les justifiant, $\sup E$ et $\inf E$.

Exercice 2:

1. Comment la fonction $x \mapsto argthx$ est-elle définie? Justifier pourquoi elle est définie et est dérivable sur $]-1,1[$, puis montrer que $argth'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.
2. Soit f la fonction définie par: $f(x) = argth(\frac{x^2-1}{x^2+1})$
   (a) Donner le domaine de définition de la fonction f.
   (b) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \in D_{f'}$.
   (c) Déduire que:
$$f(x) = \ln(|x|), \quad \forall x \in D_f.$$

Exercice 3: Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to e}\frac{x^e - e^x}{1-\cos(x-e)}.$$

Exercice 4: Soit f la fonction définie par: $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2-1}$

1. Donner le développement asymptotique de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.
2. Déduire l'équation de l'asymptote ainsi que sa position relativement à la courbe de f en $+\infty$.
3. Donner l'équation de l'asymptote à la courbe de f en $-\infty$ en montrant leurs positions relatives.

On pourra utiliser, sans démonstration, les développements limités au voisinage de 0 des fonctions suivantes:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3), \qquad \cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4),$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3), \qquad \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Corrigé du partiel Janvier 2018

Exercice 1

1) Le T.A.F : Pour toute fct réelle d'une variable réelle,

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad (a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$$

supposée continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe un réel $c \in]a,b[$ vérifiant

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

2) Soit $x > 0$. On considère la fonction $f : [x, x+1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \ln(t)$

f étant continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$,

alors, il existe un réel $c_x \in]x, x+1[$ qui vérifie

$$f'(c_x) = \frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}$$

càd $\quad \frac{1}{c_x} = \ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$

Or $\quad x < c_x < x+1,$

donc $\quad \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c_x} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$

3) Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ deux suites définies par :

$$u_1 = \frac{1}{4}, \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln(n) \ \forall n \geq 2$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \ \forall n \geq 1$$

3-a) On a $u_1 - u_2 = \frac{1}{4} - 1 + \ln 2 = \ln(2) - \frac{3}{4} < 0 \Rightarrow u_1 < u_2$

Soit $n \geq 2$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0 \quad \text{(d'après question 2)}$$

Donc, la suite (u_n) est croissante.

* Soit $n \geq 1$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0$ (d'après 2)

Donc la suite $(v_n)_n$ est décroissante.

3_b)
* La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

* Soit $n \geq 2$, on a $u_n - v_n = -\frac{1}{n} < 0$

et $u_1 - v_1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0$

Donc $\forall n \geq 1 \quad u_n < v_n$

* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$

Ainsi les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Elles convergent, donc, vers la même limite ℓ.

3_c) Soit $E = \{ v_n,\ n \in \mathbb{N}^* \}$

* E est un ensemble non vide ~~et~~ borné puisque :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_1 < \ < u_n < \ell < v_n < \ < v_1$

Donc $\inf E$ et $\sup E$ existent.

* De plus $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leq v_1 \Rightarrow \sup E = v_1 = 1$

* $(v_n)_n$ est une suite décroissante et minorée donc $\inf E = \lim\limits_{+\infty} v_n = \ell$.

Exercice 2 :

1) La fonction : $x \longmapsto th(x)$ est définie de $\mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$.
Elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, c'est donc une bijection de $\mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$.

* Alors la fonction $x \longmapsto argth$ est définie comme étant sa fonction réciproque. Elle est donc définie sur $]-1,1[$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
* La fonction $x \longmapsto argth(x)$ est dérivable sur $]-1,1[$,

et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$argth'(x) = \frac{1}{th'(argth\,x)} = \frac{1}{1 - th^2(argth\,x)}$$

$$= \frac{1}{1-u^2}.$$

2) $$f(x) = argth\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

2-a) $$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, -1 < \frac{x^2-1}{x^2+1} < 1 \right\}$$

* $$\frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1} < 1$$
* $$\frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{-x^2-1+2x^2}{x^2+1} = -1 + \frac{2x^2}{x^2+1} \geqslant -1$$

$$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1} = -1 \iff x = 0 \right)$$

Donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}^*}$

2 - b) * La fonction argth est dérivable sur $]-1,1[$ et la fct $x \longmapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc sur $\mathbb{R}^*$) et vérifie

$$-1 < \frac{x^2-1}{x^2+1} < 1 \quad \underline{\text{ssi}} \quad x \in \mathbb{R}^*$$

Donc $D_{f'} = \mathbb{R}^*$

* Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' \times \frac{1}{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}$

$$= \frac{4x}{(x^2+1)^2} \times \frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2-(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{4x}{4x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x}}$$

2-c) + Sur $]0,+\infty[$ f est continue, dérivable de dérivée égale à $\frac{1}{x}$ donc $f(x) = \ln x + cte$

Or $f(1) = 0$ donc $cte = 0$

+ Sur $]-\infty,0[$, f est continue et dérivable de dérivée égal à $\frac{1}{x}$ donc $f(x) = \ln|x| + cte$

Or $f(-1) = 0$ donc $cte = 0$

Finalement $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \ln|x|}$

Exercice 3:

1) * $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$?

$$(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}(\ln(\cos x))\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + o(x^2)$$

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$\frac{1}{x} \ln(\cos(x)) = -\frac{1}{2} x + o(x)$$

$$\exp\left(\frac{1}{x}(\ln(\cos x))\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} x + o(x)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} x + o(x)$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1.$

2) $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{x^e - e^x}{1 - \cos(x - e)} = -e^{e-1}$

On pose $t = x - e \iff x = t + e$

$$x^e = (t+e)^e = e^e \left(1 + \frac{t}{e}\right)^e = e^e\left(1 + e \times \frac{t}{e} + \frac{e(e-1)}{2!}\left(\frac{t}{e}\right)^2 + o(t^2)\right)$$

$$= e^e + e^e t + \frac{e^{e-1}(e-1)}{2} t^2 + o(t^2)$$

$$e^x = e^{e+t} = e^e e^t$$

$$= e^e\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + o(t^2)\right)$$

$$= e^e + e^e t + \frac{e^e}{2} t^2 + o(t^2)$$

$$x^e - e^x = \left(\frac{e^{e-1}(e-1)}{2} - \frac{e^e}{2}\right) t^2 + o(t^2)$$

$$= \frac{-e^{e-1}}{2} t^2 + o(t^2) = \frac{-e^{e-1}}{2}(x-e)^2 + o((x-e)^2)$$

$$1 - \cos(x - e) = 1 - \cos(t) = \frac{t^2}{2!} + o(t^2) = \frac{(x-e)^2}{2} + o((x-e)^2)$$

$$\frac{x^e - e^x}{1 - \cos(x-e)} \underset{e}{\sim} \frac{-\frac{e^{e-1}}{2}(x-e)^2}{\frac{1}{2}(x-e)^2} = -e^{e-1}$$

Donc $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{x^e - e^x}{1 - \cos(x-e)} = -e^{e-1}$

Exercice 4:

1) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2-1}$, $D_f =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$

* Au voisinage de ∞ :

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$\cancel{2-a)}$

Au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$= \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

2) D'après la question 2-a), au vois de $+\infty$ on a :

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Donc $f(x) = 1 + x - \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Ainsi $y = x+1$ est une équation de l'asymptote (Δ) à (C_f) en $+\infty$.

De plus $f(x) - y = -\frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

< 0

Donc (C_f) se trouve en dessous de son asymptote en $+\infty$

3) Au vois de $-\infty$ on a :

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$= -\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\frac{f(x)}{x} = -1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= -1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$f(x) = -x - 1 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc $y = -x-1$ est une équation de l'asymptote (Δ') à (C_f) en $-\infty$.

$$* \quad f(x) - y = \frac{1}{3}\times\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc la courbe de f est au-dessus de son asymptote en $-\infty$.

FST

Faculté des Sciences et Techniques - Mohammedia

Université Hassan II de Casablanca

ANNÉE UNIVERSITAIRE
2017-2018

$MIP(M111) - S1$

UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Examen d'Analyse: M111 : durée $1h45$, 29-Mai-2018

Exercice 1

1. *Démontrer que pour tout réel x, $E(x+p) = E(x)+p$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x et $p \in \mathbb{Z}$.*
2. *Montrer qu'une suite $(U_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si les deux sous-suites $(U_{2n})_n$ et $(U_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite l.*
3. *Etudier la convergence de la suite $(U_n)_n$ définie par*

$$\begin{cases} U_0 = 1, \\ U_{n+1} = 1 + \frac{1}{U_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Exercice 2

1. *A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que*

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}.$$

2. *Montrer que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim_{n\to\infty} \ln n.$$

3. *Soit h la fonction définie par $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ pour $x > 1$.*
   (a) *Montrer que*

   $$f(x) = 2 + (x-1)(1+\frac{1}{c})^c(\ln(1+c) - \ln(c) - \frac{1}{1+c})$$

   pour un certain c vérifiant $1 < c < x$.

   (b) *Montrer que $f(x) \geq 2$.*

   (c) *Déterminer le développement limité à l'ordre 2 à l'infini de f.*

   (d) *En déduire*

   $$\lim_{x\to 1} x^2((1+\frac{1}{x})^x - 4(1+\frac{1}{2x})^{2x} + 3(1+\frac{1}{3x})^{3x})$$

   (e) *Etudier à l'infini : asymptote à la courbe représentative de f, position par rapport à l'asymptote.*

Exercice 3

1. *Comment la fonction $h : x \mapsto argchx$ est-t-elle définie? montrer qu'elle est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer h'.*
2. *Déterminer le domaine de définition de la fonction $h(\sqrt{2+x^2})$, puis déterminer son développement limité à l'ordre 5 au point 0.*

Bon courage

(1)

Ex 1 : (5,5)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$

on a : $E(x)+p \leq x+p < E(x)+p+1$ (1pt)

ainsi $E(x)+p$ verifie la caractérisation de la partie entière de $x+p$, Donc $E(x+p)=E(x)+p$

2) $\lim\limits_{+\infty} u_n = \ell \iff \begin{cases} \lim\limits_{+\infty} u_{2n}=\ell \\ \lim\limits_{+\infty} u_{2n+1}=\ell \end{cases}$

($\Rightarrow$) (0,75) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=\ell \iff$ soit $\varepsilon>0$, $\exists N$, tq $\forall n \geq N \Rightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon$

On pose $\phi(n)=2n$ ou $2n+1$

comme ϕ est strictement croissante positive, alors $\phi(n) \geq n$, celà implique en particulier que si $n \geq N$, alors aussi $\phi(n) \geq N$.

et donc $|u_{\phi(n)}-\ell|<\varepsilon$, alors

$\lim\limits_{+\infty} u_{\phi(n)} = \lim\limits_{+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{+\infty} u_{2n+1} = \ell$

$\Leftarrow$ (1pt) soit $\varepsilon>0$, comme $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ et $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ qui verifient

$\forall n \geq N_1$, $|u_{2n}-\ell|<\varepsilon$ et $\forall n \geq N_2$, $|u_{2n+1}-\ell|<\varepsilon$

posons $N=\max(2N_1, 2N_2+1)$

②

Soit $n \geq N$ alors : si n est pair, alors $n = 2k$ avec $k \geq N_1$

donc $|u_n - \ell| = |u_{2k} - \ell| < \varepsilon$

si n est impair, alors $n = 2k+1$ avec

$k \geq N_2$, donc $|u_n - \ell| = |u_{2k+1} - \ell| < \varepsilon$

Ainsi, $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$ càd $\lim\limits_{+\infty} u_n = \ell$

3) Convergence de la suite (u_n) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

0,75

$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $g = f \circ f$

f est decroissante, g est croissante 0,5

on considère les suites $(u_{2n})_n$ (v_n) et $(u_{2n+1})_n$ (w_n) définies par :

$\begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$ 0,25 et $\begin{cases} w_0 = w_1 \\ w_{n+1} = g(w_n) \end{cases}$ 0,25

$(v_n) \equiv (u_{2n})$ $(w_n) = (u_{2n+1})$

0,25 on a : $v_0 = u_0 = 1$ et $v_1 = u_2 = \frac{3}{2}$, $v_0 < v_1$, donc (v_n) est ↗

0,25 on a : $w_0 = u_1 = 2$ et $w_1 = u_3 = \frac{5}{3}$, donc (w_n) est décroiss.

0,25 Deplus comme $u_0 \leq u_1$, en appliquant f un nombre pair de fois, on obtient que $u_{2n} \leq u_{2n+1}$

0,25 Donc, $u_0 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_{2n} \leq \cdots \leq u_{2n+1} \leq \cdots \leq u_3 \leq u_1$

$f([1, \frac{3}{2}]) \subset [1, \frac{3}{2}]$

- (U_{2n}) est croissante et majorée par U_1, donc elle converge vers $\ell = f\circ f(\ell) \in [1, \frac{3}{2}]$ 0,25
- (U_{2n+1}) est decroissante et minorée par U_0, donc elle converge vers $\ell' = f\circ f(\ell') \in [1, \frac{3}{2}]$ 0,25

$f\circ f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$, donc $f\circ f(x) = x \Leftrightarrow$

$x \in \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$ 0,5

Comme limite doit être positive,

Alors $\lim U_{2n} = \lim U_{2n+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

d'après la question 2) $\lim U_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ex2. (9 pts)

1) On considère la fct f definie par :

$f(x) = \ln x \quad , \quad x > 0$

$t \longmapsto \ln t$ est continue sur $[x, x+1]$

$t \longmapsto \ln t$ est dérivable sur $]x, x+1[$

d'après T.A.F (1pt)

$\exists c \in]x, x+1[$ tq

$\frac{1}{c} = f'(c) = \ln(x+1) - \ln x$

or $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$, ~~donc~~

D'où $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$

2) Soit $n>0$ d'après la question 1 :

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$$

Donc $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 < \ln n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$$

Alors $$\lim_{+\infty} \frac{\ln n}{\sum \frac{1}{k}} = 1$$ (1pt)

D'où $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n$$

3)

a) $$f'(x) = \left(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}\right)'$$

$$= \left(x\ln(1+\tfrac{1}{x})\right)'\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$ (0,5)

$$= \left(\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

Comme f est continue sur $[1, x]$
f est dérivable sur $]1, x[$ (0,5)

d'après T.A.F

$\exists\, c\,]1, x[$ tq $$f'(c) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$ (0,5)

D'où $$f(x) - 2 = (x-1)\left(1+\frac{1}{c}\right)^{c}\left(\ln(1+c) - \ln c - \frac{1}{1+c}\right)$$

5

b) d'après la question 1).

on a $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$

Donc $\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{1+x} > 0$

et $x-1>0$ 1

D'où $f(x) - 2 > 0$

c)

On pose $h = \frac{1}{x}$, Donc $f(x) = f\left(\frac{1}{h}\right) = (1+h)^{\frac{1}{h}}$

$= e^{\frac{\ln(1+h)}{h}}$ 0,5

$x \to +\infty$

$h \to 0^+$

0,5

$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$

Donc $e^{\frac{\ln(1+h)}{h}} = e^{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)}$ 0,5

$= e\, e^{-\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)}$

$e^{-\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)} = 1 + \left(-\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3}\right) + \left(-\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3}\right)^2 + o\left(\left(-\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3}\right)^2\right)$

$= 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + \frac{h^2}{8} + o(h^2)$

0,5 $= 1 - \frac{1}{2}h + \frac{11}{24}h^2 + o(h^2)$

D'où $e^{\frac{\ln(1+h)}{h}} = e - \frac{e}{2}h + \frac{11}{24}e\,h^2 + o(h^2)$

conclusion :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d) d'après c)

$$x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]$$

$$= x^2\left[e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 4\left(e - \frac{e}{2\cdot 2x} + \frac{11e}{24\cdot(2x)^2}\right.\right.$$

$$\left.\left. + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + 3\left(e - \frac{e}{2*3x} + \frac{11e}{24(3x)^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]$$

$$= x^2\left[\frac{11e}{24*3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = \frac{11e}{72} + o(1)$$

Donc $\lim\limits_{+\infty} x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]$

$$= \frac{11}{72}e$$

(1pt)

e) asymptote à la courbe de f.

d'après c) : on a $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Donc la courbe admet comme asymptote à $+\infty$ la droite d'équation $y = e$ et se trouve au-dessous de l'asymptote car (1pt)

$$f(x) - e \simeq -\frac{e}{2x}.$$

(0,5)

EX 3 (5,5) (7)

1) on a : $ch :]-\infty, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$

$x \longmapsto ch(x)$

est continue sur $\mathbb{R}$, La restriction de $ch\,x$ sur $\mathbb{R}^+$ est strictement croissante

(1pt) Alors $x \mapsto ch\,x$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$

Elle admet donc une fct reciproque définie sur $[1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

$$ch^{-1}(x) = \operatorname{argch}(x) \quad , x \geq 1$$

Dérivabilité de f

f est dérivable sur $]1, +\infty[$

et $\forall x > 1, \quad ch(\operatorname{argch} x) = x$

(1pt) donc $\operatorname{argch}' x \cdot ch'(\operatorname{argch} x) = 1$

$\operatorname{argch}' x \cdot sh(\operatorname{argch} x) = 1$

(car $ch^2 x - sh^2 x = 1$) $\operatorname{argch}' x \cdot \sqrt{x^2-1} = 1$

D'où $\operatorname{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

2) $f(\sqrt{2+x^2}) = \operatorname{argch} \sqrt{2+x^2}$

$D_{f_{\sqrt{2+x^2}}} = \{ x \in \mathbb{R} \;/\; \sqrt{2+x^2} \geq 1 \}$

$= \mathbb{R}$ (0,5)

(8)

* $DL_5(0)$

on cherche un D.L à l'ordre 4 de la dérivée

$$\left(\arg ch\sqrt{2+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (1pt)$$

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad (0,5)$$

$$\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3) \quad (0,5)$$

D'où $\left(\arg ch\sqrt{2+x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{3x^2}{4} + o(x^3)\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{3}{4}x^3 + o(x^4)\right) \quad (0,5)$$

Donc $\arg ch\sqrt{2+x^2} = \arg ch(\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{32}x^4 + o(x^5)$.

" $\arg ch\sqrt{2+x^2} = \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 - \frac{3}{32}\sqrt{2}x^4 + o(x^5)$ (0,5) "

" $\arg ch x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ "

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia
Département de Mathématiques

Parcours MIP
Module M111: Analyse1
Année 2016 - 2017

Examen d'Analyse1

30 Décembre 2016 - Durée 2h00

Exercice 1:

1. Rappeler la caractérisation de la borne inférieure d'une partie A de $\mathbb{R}$, puis l'appliquer pour montrer que
$$\inf\{1+\frac{1}{4n^2},\ n\in\mathbb{N}^*\}=1.$$
2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $0\leq E(2x)-2E(x)\leq 1$.

Exercice 2: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$f(x)=4-\frac{1}{4}\ln x$$

1. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique $l\in]3,4[$.
2. Montrer que $f([3,4])\subset[3,4]$, et que pour tout $x\in[3,4]$, $|f'(x)|\leq\frac{1}{12}$.
3. Ecrire en la justifiant l'inégalité des accroissements finis vérifiée par la fonction f sur l'intervalle $[3,4]$.
4. On considère la suite réelle $(x_n)_n$ définie par
$$\begin{cases} x_0\in[3,4] \\ x_{n+1}=f(x_n), \quad \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$
   (a) Dire pourquoi la suite $(x_n)_n$ est-elle bien définie.
   (b) Montrer que $|x_{n+1}-l|\leq\frac{1}{12}|x_n-l|$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
   (c) Déduire que $|x_n-l|\leq(\frac{1}{12})^n|x_0-l|$, $\forall n\in\mathbb{N}$, puis conclure $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

Exercice 3: Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$ par
$$f(x)=\frac{e^{\sqrt{1+\sin x}}-e}{\tan x}$$

1. Donner le développement limité de la fonction f d'ordre 2 au voisinage de 0.
2. Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en 0 qu'on note $\tilde{f}$.
3. Etudier la dérivabilité de $\tilde{f}$ en 0.
4. Déterminer l'équation et la position relativement à $(C_{\tilde{f}})$ de la tangente à $(C_{\tilde{f}})$ en 0.

Exercice 4:

1. Comment la fonction $g: x\mapsto argshx$ est-elle définie? Déterminer, en justifiant son domaine de dérivabilité, l'expression de sa dérivée.
2. Soit f la fonction définie par
$$f(x)=argsh(\sqrt{\frac{ch(x)-1}{2}})$$
   (a) Donner les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction f.
   (b) Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.
   (c) Montrer que
$$\begin{cases} f(x)=\frac{\pi}{2} & si\ x\geq 0, \\ f(x)=-\frac{\pi}{2} & si\ x<0.\end{cases}$$

Corrigé _ Examen d'analyse 1 - 30 Décembre 2011.

Exercice 1 4pts

1. La caractérisation de la borne inférieure :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, non vide et minorée. La borne inférieure de A est l'unique réel β ($\beta = \inf A$) qui vérifie

1pt $\begin{cases} * \ \forall x \in A \quad x \geq \beta, \\ * \ \forall \varepsilon > 0, \exists x' \in A \ / \ \beta \leq x' < \beta + \varepsilon. \end{cases}$

1pt

* Montrons que $\inf\left\{1 + \frac{1}{4n^2} \ / n \in \mathbb{N}^*\right\} = 1$

* $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{4n^2} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{4n^2} \geq 1.$

* soit $\varepsilon > 0$, d'après la propriété d'Archimède, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0 > \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$. Donc $\frac{1}{4n_0^2} < \varepsilon$ et $1 + \frac{1}{4n_0^2} < 1 + \varepsilon$

Ainsi $\inf\left\{1 + \frac{1}{4n^2} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\right\} = 1.$

les Met
0,5 +0,5

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $k = E(x)$, donc $k \leq x < k+1$.

1pt * si $k \leq x < k + \frac{1}{2}$ alors $\begin{cases} 2k \leq 2x < 2k+1 \Rightarrow E(2x) = 2k \\ E(x) = k \end{cases}$

donc $E(2x) - 2E(x) = 0$

1pt * si $k + \frac{1}{2} \leq x < k+1$ alors $\begin{cases} 2k+1 \leq 2x < 2k+2 \Rightarrow E(2x) = 2k+1 \\ E(x) = k \end{cases}$

donc $E(2x) - 2E(x) = 1.$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq E(2x) - 2E(x) \leq 1$

Exercice 2 :

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 4 - \frac{1}{4}\ln x$$

1- Existence : On considère $g : x \longmapsto f(x) - x$.

0,5pt

• g est continue sur $[3,4]$,

• $g(3) = 1 - \frac{1}{4}\ln(3) > 0$; $g(4) = -\frac{1}{4}\ln 4 < 0$.

Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution $\ell \in]3,4[$.

0,5pt

Unicité :

g est dérivable sur $[3,4]$ et $\forall x \in [3,4]$ $g'(x) = -\frac{1}{4x} - 1 < 0$.

Donc g est strictement décroissante sur $[3,4]$.

Ainsi la racine ℓ de g est unique dans $]3,4[$.

2) * f étant une fonction continue et strictement décroissante sur $[3,4]$ $\left(f'(x) = \frac{-1}{4x} < 0\right)$, alors :

1pt

$$f([3,4]) = [f(4), f(3)] \subset [3,4] \quad \text{car} \quad \begin{array}{l} f(4) - 3 = 1 - \frac{1}{4}\ln 4 > 0 \\ f(3) - 4 = -\frac{1}{4}\ln 3 < 0 \end{array}$$

1pt

* $\forall x \in [3,4]$ $\quad \frac{1}{16} \leq |f'(x)| = \left|\frac{-1}{4x}\right| = \frac{1}{4x} \leq \frac{1}{12}$

3) f est continue sur $[3,4]$ et dérivable sur $]3,4[$ et pour tout $x \in]3,4[$ $\quad |f'(x)| \leq \frac{1}{12}$

1pt

Donc $\forall x, y \in]3,4[$ $\quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{12}|x - y|$

4- On considère la suite $(x_n)_n$ définie par:

$$\begin{cases} x_0 \in [3,4] \\ x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

0,5 a) On a $x_0 \in [3,4]$ et $f([3,4]) \subset [3,4]$

ceci donne que si $x_n \in [3,4]$ alors $x_{n+1} \in [3,4]$

Donc la suite (x_n) est bien définie.

0,5 b) soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|x_{n+1} - \ell| = |f(x_n) - f(\ell)| \quad ; \quad (f(\ell) = \ell)$$

$$\leq \frac{1}{12} |x_n - \ell| \quad ; \text{par application de l'inégalité des A.F.}$$

c) * pour $n = 0$ on a $|x_0 - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |x_0 - \ell|$

* soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $|x_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - \ell|$

0,5 Alors $|x_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{12} |x_n - \ell|$

$$\leq \frac{1}{12} \times \left(\frac{1}{12}\right)^n |x_0 - \ell|$$

$$\leq \left(\frac{1}{12}\right)^{n+1} |x_0 - \ell|$$

Donc, d'après le principe de récurrence,

$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n |x_0 - \ell|$.

0,5 - Conclusion:

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$ et $|x_0 - \ell| \in \mathbb{R}$ donc ~~pa~~

$\lim_{n \to +\infty} |x_n - \ell| = 0 \iff \lim_{n \to +\infty} x_n = \ell$.

Exercice 3

$$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{e^{\sqrt{1+\sin x}} - e}{\tan x}$$

1. DL(0) à l'ordre 2.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$1 + \sin x = 1 + x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

0,5 $$\sqrt{1+\sin x} = \left(1 + x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^{1/2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3).$$

0,5 $$e^{\sqrt{1+\sin x}} = e\, e^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)}$$

$$= e\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)\right)$$

$$e^{\sqrt{1+\sin x}} - e = \frac{e}{2}x - \frac{e}{16}x^3 + o(x^3)$$

0,5 $$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

0,5 $$f(x) = \frac{e}{2}\,\frac{\left(1 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)}{\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right)}$$

$$= \frac{e}{2}\left(1 - \frac{11}{24}x^2 + o(x^2)\right)$$

2- La fonction f est définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.

De plus, d'après la question 1, au voisinage de 0 on a

$$f(x) = \frac{e}{2}\left(1 - \frac{11}{24}x^2 + o(x^2)\right)$$

0,5 Alors : $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{e}{2}$

Donc f admet un prolongement par continuité $\tilde{f}$ en 0 qu'on défini par :

0,5
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\} \\ \frac{e}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3) Dérivabilité de $\tilde{f}$ en 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{11e}{48}x^2 + o(x^2)}{x}$$

1pt
$$= 0$$

Donc $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}'(0) = 0$.

4)
* L'équation de la tangente à $(C_{\tilde{f}})$ en 0 :

$$(\Delta) : y = \tilde{f}(0) + \tilde{f}'(0)(x - 0)$$

0,5 Donc $\boxed{(\Delta) : y = \frac{e}{2}}$

* On a : au vois de 0 :

0,5
$$\tilde{f}(x) - y = \underbrace{-\frac{11e}{48}x^2}_{<0} + o(x^2)$$

Donc $(C_{\tilde{f}})$ ~~se~~ trouve en dessous de sa tangente (Δ) en 0.

6

Exercice 4:

1. * Définition de la fonction argsh:

La fonction $h: x \longmapsto sh\, x$ est définie et est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

. De plus h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

0,5

. Donc h est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qu'on note argsh.

* Parité de argsh:

~~- $\forall x \in D_g$, $-x \in D_g$~~

- Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $y = \operatorname{argsh} x \iff x = sh\, y$

$\iff x = -sh(-y)$ (sh est impaire)

$\iff -x = sh(-y)$

$\iff \operatorname{argsh}(-x) = -y$

$\iff y = -\operatorname{argsh}(-x)$

Donc la fonction argsh est impaire.

* Dérivabilité de argsh:

0,5

La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $sh'(x) = ch(x) \geq 1 > 0$

donc argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{sh'(\operatorname{argsh} x)} = \frac{1}{ch(\operatorname{argsh}(x))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + sh^2(\operatorname{argsh} x)}}$$

0,5

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 4 :

$$f(x) = \operatorname{argsh}\left(\sqrt{\frac{ch(x)-1}{2}}\right).$$

1) * Le domaine de définition de f.

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{ch(x)-1}{2} \geqslant 0 \right\}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad ch(x) \geqslant 1$

0,5 Donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

* Le domaine de continuité de f.

$x \longmapsto \dfrac{ch(x)-1}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{ch(x)-1}{2} \in \mathbb{R}^+$,

donc $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{chx-1}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (à valeurs ds $\mathbb{R}$).

0,5 De plus, $x \longmapsto \operatorname{argsh} x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

* Le domaine de dérivabilité de f.

$x \longmapsto \dfrac{ch(x)-1}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{ch(x)-1}{2} \in \mathbb{R}^*_+$,

0,5 donc $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{chx-1}{2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

De plus, $x \longmapsto \operatorname{argsh}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

b) soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}}{\sqrt{2}}\right)' \frac{1}{\operatorname{sh}'\left(\operatorname{argsh}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}\right)\right)}$$

1 pt

$$= \frac{\operatorname{sh} x}{4\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}} \times \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\operatorname{argsh}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}\right)\right)}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x}{4\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x}{4\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{4}}}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{\operatorname{sh}^2 x}}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x}{2|\operatorname{sh} x|} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

c) On a $f'(x) = \begin{cases} +\frac{1}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

0,1 - Si $x > 0$ $f'(x) = \frac{1}{2} \Longrightarrow f(x) = \frac{x}{2} + C$

Or les fonctions f et $x \mapsto \frac{x}{2}$ sont continues en 0 donc par passage à la limite en 0 on trouve que $C = 0$

Donc si $x \geq 0$ $f(x) = \frac{x}{2}$

0,1 - le même argument permet d'obtenir que $f(x) = -\frac{x}{2}$ si $x < 0$

D'où $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{x}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia
Département de Mathématiques

Parcours MIP
Module M111: Analyse1
Année 2016 - 2017

Examen de rattrapage - Analyse1

10 Janvier 2017 - Durée $1h30$

Exercice 1:

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Montrer que l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-1, 0[$.

Exercice 2:

Soit f l'application définie sur $]-1, 1[\cup]1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2 - 1)\ln|\frac{1+x}{1-x}|$$

1. Donner le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.
2. Déduire l'équation, ainsi que sa position relativement à (C_f), de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
3. Déterminer le développement asymptotique, à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \ln|\frac{1+x}{1-x}|$ en $+\infty$, puis déduire celui de la fonction f en $+\infty$ à l'ordre 1.
4. Déterminer l'équation de l'asymptote (Δ) à (C_f) en $+\infty$, en précisant leurs positions relatives.

Exercice 3:

Soient f et g deux fonctions définies par

$$f(x) = arccos(thx) \qquad g(x) = arcsin(\frac{1}{ch(x)})$$

1. Montrer que $1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions f et g.
3. Calculer les dérivées de f et g lorsqu'elles existent.
4. Déduire une relation entre $f(x)$ et $g(x)$.

Corrigé - Rattrapage : 10 janvier 2017.

Exercice 1 :

1. T. V. I.

2. Soit f la fonction définie sur $[-1,0]$ par :

$$f(x) = x^3 + x + 1.$$

On a
* f est continue sur $[-1,0]$.
* $f(-1) = -1$ et $f(0) = 1$ $\Rightarrow f(-1) \times f(0) < 0$

Donc, d'après le T.V.I, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in]-1,0[$.

De plus, $f'(x) = 2x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in]-1,0[$

f est donc strictement croissante. Ainsi la racine α est unique

Exercice 2 :

$$f :]-1,1[\cup]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (x^2-1) \ln \left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

1) au vois de 0 :

$$f(x) = (x^2-1)\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$(x^2-1)\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right] = -2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$$

Donc $\boxed{f(x) = -2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)}$

2) * L'équation de la tangente (T) à (Cf) en 0 est:

$$\boxed{(T) : y = -2x}$$

* La position de (T) / (Cf) : $f(x) - y = \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$

si $x > 0$ $\quad f(x) > y$ donc (Cf) est au dessus de (T)

si $x < 0$ $\quad f(x) < y$ et (Cf) est en dessous de (T).

3) * $\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \ln\left|\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}\right|$

$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ au vois de ∞

$= \frac{2}{x} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

* $f(x) = (x^2-1)\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$

$= 2x - \frac{4}{3} \times \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

4) * La droite d'équation $(\Delta) : y = 2x$ est une asymptote à (Cf) en $+\infty$.

* $f(x) - y = -\frac{4}{3} \times \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

< 0 au vois de $+\infty$

donc la coube (Cf) est dessous de l'asymptote (Δ) en $+\infty$.

Exercice 3 :

$$f(x) = \arccos(\text{th}\,x) \quad \text{et} \quad g(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right)$$

1) $$1 - \text{th}^2(x) = 1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{1}{\text{ch}^2(x)}.$$

2) * Le domaine de définition de arccos est $[-1, 1]$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $-1 < \text{th}(x) < 1$

Donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

* la fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) \geqslant 1$ càd $0 < \frac{1}{\text{Ch}(x)} \leqslant 1$

Donc la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

* arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $-1 < \text{th}\,x < 1$ (th est dérivable $\forall x \in \mathbb{R}$) donc f est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$.

* arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$, ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $0 < \frac{1}{\text{ch}\,x} \leqslant 1$ mais $\text{ch}(x) = 1$ pour $x = 0$ donc g est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}^*$.

3) soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = th'(x)\, \arccos'(th(x))$$

$$= \frac{1}{ch^2(x)} \times \frac{-1}{\sqrt{1-th^2(x)}}$$

$$= -\frac{1}{Ch(x)}.$$

soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g'(x) = \left(\frac{1}{Ch(x)}\right)' \arcsin'\left(\frac{1}{Ch(x)}\right)$$

$$= \frac{-sh(x)}{ch^2(x)} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{ch^2(x)}}}$$

$$= \frac{-sh(x)}{ch^2(x)} \times \frac{ch(x)}{\sqrt{ch^2(x)-1}}$$

$$= \frac{-sh(x)}{ch^2(x)} \frac{ch(x)}{|sh(x)|} \begin{cases} -\frac{1}{Ch(x)}, & x>0 \\ \frac{1}{Ch(x)}, & x<0 \end{cases}$$

4) * si $x>0$, $f'(x) = g'(x)$ donc $f(x) = g(x) + C$

Or $f(0) = \frac{\pi}{2}$, $g(0) = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $C = 0$

Donc $\boxed{f(x) = g(x).}$

* si $x<0$, $f'(x) = -g'(x)$ donc $f(x) = -g(x) + C'$

$C' = \pi$ Donc $\boxed{f(x) = -g(x) + \pi}$

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia
Département de Mathématiques

Parcours MIP
Module M111: Analyse1
Année 2016- 2017

Partiel Analyse1, durée $1h45min$, 24-Mai-2017

Exercice 1

1. *Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.*
On définit l'ensemble $A+B=\{a+b:(a,b)\in A\times B\}$. Montrer que l'ensemble $A+B$ est majoré et que $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

2. *Montrer que $E(\frac{E(nx)}{n})=E(x)$, pour tout réel x et tout entier $n\geq 1$. $E(x)$ désigne la partie entière de x.*

Exercice 2

Soient $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ deux suites réelles définies par

$$u_n=(\sum_{k=1,}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}})-2\sqrt{n},\qquad v_n=(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}})-2\sqrt{n}$$

1. *Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite $l\in\mathbb{R}$.*

2. *Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.*

Exercice 3

1. *Comment la fonction argth est-elle définie, rappeler son domaine de dérivabilité ainsi que l'expression de sa dérivée. En déduire que $argth(u)=\frac{1}{2}\ln(\frac{1+u}{1-u})$, $\forall u\in D_{argth}$.*

2. *Soit f la fonction définie par*

$$f(x)=argth(\frac{2x+1}{2x^2+2x+1})$$

2-a. Déterminer le domaine de définition de f.
2-b. Montrer que $\forall x>0$, $f(x)=\ln(1+\frac{1}{x})$.
2-c. Prouver que $\forall x>0$, $\frac{1}{x+1}<f(x)<\frac{1}{x}$.

3. *Soit h la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par*

$$h(x)=\exp(xf(x))$$

Montrer que $h(x)-2=(x-1)h(c)(\ln(\frac{1}{c}+1)-\frac{1}{1+c})$ pour un certain c vérifiant $1<c<x$, et que $h(x)\geq 2$, pour tout $x\geq 1$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash[-2,-1]$ par $f(x)=(x^2+x+1)\ln(\frac{x+2}{x+1})$

1. *Donner le développement asymptotique au voisinage de l'infini de la fonction f sous la forme:*

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x}+o(\frac{1}{x}).$$

2. *Déterminer les équations des asymptotes ainsi que leurs positions relatives par rapport à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.*
3. *Donner le développement limité de la fonction f à l'ordre 3 au point 0.*
4. *Déduire l'équation, ainsi que sa position relativement à (C_f), de la tangente (T) à (C_f) au point 0.*

Bon courage

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia
Département de Mathématiques

Parcours MIP
Module M111: Analyse1
Année 2015 - 2016

Partiel Analyse 1

Exercice 1:

1pt 1. Enoncer le théorème des accroissements finis.

1pt 2. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x+1} < ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$$

1pt 3. En déduire $\lim_{x \to +\infty} (1+\frac{1}{x})^x$.

Exercice 2: Soit f la fonction définie par

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow e^x - 2 \end{array}$$

2pts 1. On définit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions α_1 et α_2 sur $\mathbb{R}$, avec $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$.(On ne cherche pas à calculer α_1 et α_2)

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n), & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1,5 (a) Calculer u_1 et montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

2 (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \alpha_1$ et déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers une limite finie.

1,5 (c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha_1$.

$]-1,0[\cup]0,+\infty[$

Exercice 3: Soit f la fonction définie sur ~~$\mathbb{R}^*$~~ par

$$f(x) = \frac{e^x\sqrt{x+1} - cos^2 x}{x}$$

2pts 1. Donner le développement limité de la fonction f d'ordre 2 au voisinage de 0.

1pt 2. Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en 0 qu'on note $\tilde{f}$.

1pt 3. Etudier la dérivabilité de $\tilde{f}$ ~~sur $\mathbb{R}$~~. en 0

Exercice 4: Soit f la fonction définie par

$$f(x) = argch(4x^3 - 3x)$$

1pt 1. Donner le tableau de variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^3 - 3x$.

1pt 2. En déduire que le domaine de définition de la fonction f est $D = \{-\frac{1}{2}\} \cup [1, +\infty[$.

2pts 3. Montrer que $\forall x \in]1, +\infty[$, $f'(x) = 3argch'(x)$ (Indication: Développer $(4x^2-1)^2(x^2-1)$).

2pts 4. Montrer que

$$\begin{cases} f(x) = 0 & si\ x = -\frac{1}{2} \\ f(x) = 3argch(x), & si\ x \geq 1. \end{cases}$$

15

Corrigé : Partiel - analyse 1

Exercice 1

1\. th des A.F.

1

2\. Soit $x>0$, la fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. Alors, d'après le T.A.F. il existe $c \in]x, x+1[$ tel que

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x+1-x}$$

càd $\quad \frac{1}{c} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

1

Or $x < c < x+1 \implies \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}.$

donc pour tout $x>0$,

$$\boxed{\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}}$$

3\) $\forall x>0, \quad \frac{x}{x+1} < x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1$

donc $\quad \exp\left(\frac{x}{x+1}\right) < \exp\left(x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) < e$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e$

Ainsi, d'après le Th de gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

1

Exercice 2 :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^x - 2$$

1_ $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = e^x - 2 - x$
$\quad x \longmapsto f(x) - x.$

* φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

0,25 → $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = e^x - 1$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty$

* Tableau de variations de φ :

x	$-\infty$	α_1	0	α_2	$+\infty$
$\varphi'(x)$ (0,25)		$-$	0	$+$	(0,25)
$\varphi(x)$ (0,25)	$+\infty$ ↘	0 ↘	-1 (0,25)	↗ 0	↗ $+\infty$ (0,25)

_ Sur l'intervalle $]-\infty, 0]$, la fonction φ est continue et strictement décroissante et $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty$ et $\varphi(0) = -1$

α_1 (0,25) → Donc d'après le T.V.I φ s'annule une seule fois en un point $\alpha_1 \in]-\infty, 0[$.

_ Sur l'intervalle $[0, +\infty[$, φ est continue et strictement croissante et $\varphi(0) = -1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$

α_2 (0,25) Donc le T.V.I implique que φ s'annule une seule fois en un point $\alpha_2 \in]0, +\infty[$.

On a bien $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$.

2) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad \forall n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

a) * $U_1 = f(U_0) = e^{U_0} - 2 = -1$ (0,5)

* On a $U_1 < U_0$, de plus, la fonction f est strictement croissante, alors la suite $(U_n)_n$ est décroissante. (1pt)

b)

* Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n \geq \alpha_1$.

(1pt)

- Pour $n=0$ on a $U_0 = 0 > \alpha_1$
- Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $U_n \geq \alpha_1$.

Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors

$$f(U_n) \geq f(\alpha_1) = \alpha_1 \qquad (\varphi(\alpha_1) = f(\alpha_1) - \alpha_1 = 0)$$

càd $U_{n+1} \geq \alpha_1$

D'après le principe de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n \geq \alpha_1$.

(1pt) * Convergence de (U_n) :

~~Puisque~~ $(U_n)_n$ est décroissante et minorée par α_1 alors $(U_n)_n$ converge vers une limite finie.

c) Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha_1$.

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell \in \mathbb{R}$.

* La suite (U_n) est décroissante et $U_0 = 0$ alors $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ U_n \leq 0}$.

~~Donc~~ Donc $\boxed{\ell \leq 0}$

* La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $U_{n+1} = f(U_n)\ \forall n$ (0,1)

α_1 ou α_2

(0,5) donc $f(\ell) = \ell$ càd $\varphi(\ell) = 0$

* Mais, $\varphi(x) = 0$, admet une solution unique sur $]-\infty, 0[$

qui est α_1 donc $\boxed{\ell = \alpha_1}$ cf 0,5

Exercice 3 : .6

$$f(x) = \frac{e^x\sqrt{x+1} - \cos^2 x}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

1) $DL_2(0)$:

0,25 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

0,25 $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

0,5 $e^x\sqrt{1+x} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 + o(x^3)$

0,25 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

0,25 $\cos^2 x = 1 - x^2 + o(x^3)$

$$e^x\sqrt{1+x} - \cos^2 x = \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 + o(x^3)$$

0,5 $\rightarrow$ $\boxed{f(x) = \frac{3}{2} + \frac{15}{8}x + \frac{17}{48}x^2 + o(x^2)}$

2) * f est continue sur $\mathbb{R}^*$. $]-1,0[\cup]0,+\infty[$

1 * D'après 1) $f(x) = \frac{3}{2} + \frac{15}{8}x + \frac{17}{48}x^2 + o(x^2)$ au voisde

Donc $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{3}{2}$

Par conséquent, f admet un prolongement par continuité en 0 qu'on note $\tilde{f}$.

$\tilde{f}$ est définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\\ \frac{3}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3) * $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, parceque f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

* Dérivabilité en 0

$$\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} = \frac{f(x)-\frac{3}{2}}{x} = \frac{\frac{15}{8}x+\frac{17}{48}x^2+o(x^2)}{x}$$

$$= \frac{15}{8}+\frac{17}{48}x+o(x)$$

1 Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} = \frac{15}{8}$

D'ou la dérivabilité de $\tilde{f}$ en 0.

Exercice 4

$$f(x) = \operatorname{argch}(4x^3-3x)$$

1) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 4x^3-3x$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

h est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = 12x^2-3$

$$= 12\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

1

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$1/2$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$		
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2) Domaine de définition de f.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, h(x) \geqslant 1\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x = -\tfrac{1}{2} \text{ ou } x \geqslant 1\}$$

$$= \{-\tfrac{1}{2}\} \cup [1, +\infty[.$$

1

3) * Dérivabilité de f:

* Argch est dérivable sur $]1, +\infty[$
* h est dérivable sur $]1, +\infty[$
* $\forall x \in]1, +\infty[, \quad h(x) \in]1, +\infty[.$

Donc $f = \text{argch} \circ h$ est dérivable sur $]1, +\infty[$.

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f'(x) = h'(x) \, \text{Argch}'(h(x))$$

$$= \frac{12x^2 - 3}{\sqrt{(4x^3 - 3x)^2 - 1}}$$

$$= \frac{3(4x^2 - 1)}{\sqrt{(4x^2 - 1)^2 (x^2 - 1)}}$$

2

$$= \frac{3(4x^2 - 1)}{|4x^2 - 1| \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x \geqslant 1 \Rightarrow 4x^2 \geqslant 1)$$

$$= 3 \, \text{argch}'(x).$$

4) * D'après la question 3) on a :

$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f'(x) = 3 \,\mathrm{argch}'(x)$

donc $\forall x \in]1, +\infty[\quad f(x) = 3 \,\mathrm{arg\,ch}(x) + c \quad / c \in \mathbb{R}$.

0,5

Or les fonctions f et $3\,\mathrm{argch}$ sont ~~sont~~ continue sur $[1, +\infty[$, donc, par passage à la limite quand $x \to 1^+$ on obtient $\mathrm{argch}(4-3) = 3\,\mathrm{argch}(1) + c$

ce qui donne $\quad c = 0$

0,5

D'où $\forall x \in]1, +\infty[\quad \mathrm{argch}(4x^3 - 3x) = 3\,\mathrm{argch}\,x$.

* Pour $x = 1$, on a $\mathrm{argch}(4-3) = 0$ et $3\,\mathrm{argch}(1) = 0$

0,5 donc $\forall x \in [1, +\infty[, \quad \mathrm{argch}(4x^3 - 3x) = 3\,\mathrm{argch}\,x$.

0,5 * Pour $x = -\frac{1}{2}$.

$$\mathrm{Argch}\left(4 \times \left(\tfrac{-1}{2}\right)^3 - 3\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) = \mathrm{Argch}(1) = 0$$

Ainsi $\begin{cases} f(x) = 0 & , \text{si } x = -\frac{1}{2} \\ f(x) = 3\,\mathrm{argch}\,x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

23

10

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia
Département de Mathématiques

Parcours MIP
Module M111: Analyse1
Année 2015 - 2016

Partiel Analyse1, 29-Mars-2016 Durée 2h00

Les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés

---

Exercice 1

1. *Soit* $(a,b) \in (\mathbb{Q}^+)^2$, *tel que* $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}$. *Montrer que* $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.
2. *Démontrer que pour tout réel* x, $E(x) + E(x + \frac{1}{2}) = E(2x)$, *où* $E(x)$ *désigne la partie entière de* x.
3. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les suites réelles définies par*

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad v_n = u_{2n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad et \quad w_n = u_{2n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

   (a) *Etudier la monotonie des suites* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) *Déterminer les bornes supérieures et inférieures des parties* X *et* Y, *ensuite, déduire celles de* Z. *Où* X, Y *et* Z *sont les ensembles définis par*

$$X = \{1 + \frac{1}{2n},\ n \in \mathbb{N}^*\},\quad Y = \{-1 + \frac{1}{2n+1},\ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad Z = \{(-1)^n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite réelle de terme général:*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

1. *Montrer que les suites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont adjacentes.*
2. *Que peut-on dire de la convergence de la suite* (u_n).

Exercice 3

Soient I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction trois fois dérivable sur* I. *Soient* a *et* b *deux éléments de* I *tels que* $a < b$. *Soit* $g : I \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(a) + f'(x)) + K(x-a)^3$$

où K *est le nombre réel tel que* $g(b) = 0$

1. *Montrer que* g *est deux fois dérivable sur* I, *et calculer* $g'(x)$ *pour tout* $x \in I$.
2. *Montrer qu'il existe un nombre* $c \in]a,b[$ *tel que* $g'(c) = 0$.
3. *Montrer qu'il existe un nombre* $\theta \in]a,b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f'''(\theta)$$

Exercice 4

1. *Comment la fonction* $h : x \mapsto arctanx$ *est-t-elle définie? Déterminer sa parité? puis, montrer qu'elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que sa dérivée est* $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
2. *Montrer que:* $arctanx + arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ *pour tout* $x \in]-\infty,0[$.
3. *Déterminer le développement limité de la fonction* h *à l'ordre* 3 *au point* 0.
4. *Soit* f *la fonction à variable réelle définie par*

$$f(x) = arctan(\frac{x - \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}})$$

   (a) *Donner le développement limité de la fonction* $u : x \mapsto \frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}$ *à l'ordre* 3 *au point* 0.

   (b) *Déduire le développement asymptotique en* $+\infty$ *à l'ordre* 6 *de la fonction* $v : x \mapsto \frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$.

   (c) *Donner le développement asymptotique en* $+\infty$ *à l'ordre* 6 *de la fonction* f.

   (d) *Déduire le développement asymptotique en* $-\infty$ *à l'ordre* 6 *de la fonction* f.

   (e) *Déterminer les équations des asymptotes ainsi que leurs positions relatives par rapport à la courbe de* f *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$.

Bon courage

1^{α}

Exercice 1

1) Soit $(a,b) \in (\mathbb{Q}^+)^2$, tel que $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}$.

Montrons que $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.

Supposons que $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, donc $\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} = \frac{p}{q}$.

Donc $(\sqrt{a} + 3\sqrt{b})^2 = \frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{Q}$.

On a $(\sqrt{a} + 3\sqrt{b})^2 = \underbrace{a + 9b}_{\in \mathbb{Q}^+} + \underset{\mathbb{Q}}{6}\,\underset{\notin\mathbb{Q}}{\sqrt{ab}}$.

1

$6\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}$ et donc $(a+9b) + 6\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}$

absurde.

Donc $\boxed{\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$, Montrons que $E(x) + E(x+\frac{1}{2}) = E(2x)$

Posons $k = E(x)$ donc $k \leq x < k+1$

* si $x \in [k, k+\frac{1}{2}[$ on a $x + \frac{1}{2} \in [k+\frac{1}{2}, k+1[$

donc $E(x+\frac{1}{2}) = k$ 0,25

0,75

Ainsi $E(x) + E(x+\frac{1}{2}) = k + k = 2k$

Et $x \in [k, k+\frac{1}{2}[\Rightarrow 2x \in [2k, 2k+1[$

$\Rightarrow E(2x) = 2k$ 0,25

Donc $E(x) + E(x+\frac{1}{2}) = E(2x)$. 0,25

* Si $x \in [k+\frac{1}{2}, k+1[$, on a $x + \frac{1}{2} \in [k+1, k+2[$

donc $E(x+\frac{1}{2}) = k+1$ 0,25

0,75

et $2x \in [2k+1, 2k+2[$

donc $E(2x) = 2k+1$ 0,25

Ainsi $E(x) + E(x+\frac{1}{2}) = k + k+1 = 2k+1 = E(2x)$.

0,25

3) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad U_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$,

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad V_n = U_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$

$\forall n\in\mathbb{N},\quad W_n = U_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1}$.

3-a * La monotonie de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$$V_{n+1} - V_n = 1 + \frac{1}{2n+2} - 1 - \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{2n - 2n - 2}{2n(2n+2)}$$

$$= \frac{-1}{2n(n+1)} < 0$$

0,25 Donc (V_n) est une suite décroissante.

* La monotonie de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$W_{n+1} - W_n = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{-2}{(2n+3)(2n+1)} < 0$$

0,25 Donc (W_n) est une suite décroissante.

3-b

* $X = \left\{1 + \frac{1}{2n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$

On a $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante, donc

$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad V_n < V_1$ 0,25 / $V_1 = \frac{3}{2}$

De plus $\lim_{n\to+\infty} V_n = 1$ 0,25

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad 1 \leq V_n \leq \frac{3}{2}$ 0,25

Ainsi $\inf X = 1,\quad \sup X = \frac{3}{2}$ 0,25

* $Y = \left\{-1 + \frac{1}{2n+1},\ n\in\mathbb{N}\right\}$

On a : (W_n) est une suite décroissante $\forall n,\ W_n \leqslant W_0 \leqslant 0$ 0,25

$W_0 = 0, \quad \lim\limits_{n \to +\infty} W_n = -1$ 0,25

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leqslant W_n \leqslant 0$ 0,25

Ceci donne : $\inf Y = -1, \quad \sup Y = 0$ 0,25

* $Z = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$

$= X \cup Y$

$\inf Z = \min(\inf X, \inf Y) = \min(1, -1) = -1$ 0,25

$\sup Z = \max(\sup X, \sup Y) = \min\left(\frac{3}{2}, 0\right) = \frac{3}{2}$ 0,25

Exercice 2:

Soit $(U_n)_n$ la suite réelle de terme général

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

1) Montrons les suites $(V_n) = (U_{2n})$ et $(U_{2n+1}) = (W_n)$ sont adjacentes:

0,25 * $V_{n+1} - V_n = \frac{-1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} < 0$ donc $(V_n) \searrow$

0,25 * $W_{n+1} - W_n = \frac{-1}{\sqrt{2n+3}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} > 0$ donc $(W_n) \nearrow$.

0,25 * $W_n - V_n = \frac{-1}{\sqrt{2n+1}} < 0$ donc $W_n \leq V_n, \forall n$

0,25 * $\lim_{n \to +\infty} W_n - V_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{2n+1}} = 0$

Donc les suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont adjacentes.

2) La convergence de la suite (U_n).

Puisque les deux suites $(U_{2n})_n$ et $(U_{2n+1})_n$ sont adjacentes,

0,5 alors, elles convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$.

Ainsi la suite $(U_n)_n$ converge aussi vers la même

0,5 limite l.

Exercice 3 :

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction 3 fois dérivable sur I.

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \quad g(x) = f(x) - f(a) - \frac{(x-a)}{2}\left(f'(a) + f'(x)\right) + k(x-a)^3$$

où k est un nbre réel tel que : $g(b) = 0$.

1) * g est deux fois dérivable sur I :

f est 3 fois dérivable sur I donc elle est 2 fois dérivable sur I.

Et f' est deux fois dérivable sur I

Donc $x \longmapsto f(x) - f(a)$ est 2 fois dérivable sur I

$x \longmapsto \frac{x-a}{2}\left(f'(x) + f'(a)\right)$ est " " "

$x \longmapsto k(x-a)^3$ est aussi 2 " " "

Ainsi g est 2 fois dérivable sur I.

* $g'(x)$, $x \in I$? (g est 2 fois dérivable sur I, elle est donc dérivable sur I).

Soit $x \in I$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}\left(f'(a) + f'(x)\right) - \frac{x-a}{2} f''(x) + 3k(x-a)^2$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{1}{2}\left(f'(x) - f'(a)\right) - \frac{x-a}{2} f''(x) + 3k(x-a)^2}$$

2) Montrons qu'il existe un $c \in]a,b[$ tel que $g'(c)=0$

g étant continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

et $\underbrace{g(a)=0 \text{ et } g(b)=0}$, alors, par application

du Théorème de Rolle on déduit qu'il existe

un réel $c \in]a,b[$ qui vérifie $g'(c)=0$.

3) Montrons qu'il existe un nombre $\theta \in]a,b[$ tel que:

$$f(b)-f(a) = \frac{b-a}{2}\left(f'(a)+f'(b)\right) - \frac{(b-a)^3}{12} f'''(\theta).$$

La fonction g est 2 fois dérivable sur I

Donc g' est continue sur l'intervalle $[a,c]$ et dérivable sur $]a,c[$. De plus on a:

$g'(a)=0$ et $g'(c)=0$

Donc, par application du th de Rolle à g' sur $[a,c]$, il existe un réel $\theta \in]a,c[\subset]a,b[$

qui vérifie $g''(\theta)=0$

Or $g''(\theta)=0 \iff \frac{\theta-a}{2} f'''(\theta) = 6k(\theta-a)$

$\iff k = \frac{1}{12} f'''(\theta)$

Donc

$$g(b)=0 \iff f(b)-f(a) = \frac{b-a}{2}\left(f'(a)+f'(b)\right) - \frac{1}{12} f'''(\theta)(b-a)^3.$$

Exercice 4:

* Définition de la fction : $x \mapsto \arctan$:

1- Puisque la fonction $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \tan x$ est continue et strictement croissante, elle définit donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque f^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qu'on note $f^{-1}(x) = \arctan x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

0,5

* Dérivabilité de la fonction : $x \mapsto \arctan x$

La fonction f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et on a

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad f'(x) = 1 + \tan^2 x \neq 0$.

Alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$ et on a

0,5

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

0,5

* Parité de la fonction $x \longmapsto \arctan x$: $D = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \ -x \in \mathbb{R}$ et $y = \arctan(-x) \iff \tan y = -x$

$\iff \tan(-y) = x$

$\iff -y = \arctan x$

$\iff y = -\arctan x$

$\arctan(-x) = -\arctan x$

0,5

2) Montrons que : $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \forall x < 0$

soit $\varphi :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

Q1

la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty,0[$ dans $]-\infty,0[$

et la fct : $x \mapsto \arctan x$ est derivable sur $]-\infty,0[$

Donc la fct $x \mapsto \arctan \frac{1}{x}$ est derivable sur $]-\infty,0[$

Ainsi φ est aussi dérivable sur $]-\infty,0[$.

$$\forall x \in]-\infty,0[, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

$$= 0$$

Ceci veut dire que φ est constante sur $]-\infty,0[$

Donc $\forall x \in]-\infty,0[\quad \varphi(x) = \varphi(-1)$

$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

3) Le $DL_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto \arctan x$. 21

Au vois de 0, on a :

(0,5) $\operatorname{Arctan} x = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{Arctan} 0}} + \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

Or $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + o(t^2)$

(0,5) Donc $\boxed{\operatorname{Arctan} x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$

4) $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x - \sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)$.

4-a : $DL_3(0)$ de la fonction, $u : x \longmapsto \frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}$

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

$1 - \sqrt{1+x} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

(0,5) $= -\frac{1}{2}x\left(1 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)$

$1 + \sqrt{1+x} = 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

$\frac{1}{1+\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)}$

(0,5) $= \frac{1}{2} \times (1 - t + t^2) + o(x^2)$ / $t = \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)$

$t^2 = \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)$

9

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2\right) + o(x^2)$$

$$u(x) = \left(1 - \sqrt{1+x}\right) \times \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$$

0,5

$$= -\frac{1}{4}x\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{16}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$\boxed{u(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{64}x^3 + o(x^3)}$$

4-b) $DL_{(6)}(+\infty)$ de $v : x \longmapsto \dfrac{1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

Au vois de $+\infty$, $h = \frac{1}{x^2}$ est au vois de 0.

Donc $v(x) = v\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right) = v\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)$

$$= u(h)$$

$$= -\frac{1}{4}h + \frac{1}{8}h^2 + \frac{5}{64}h^3 + o(h^3)$$

0,5 $$\boxed{v(x) = -\frac{1}{4}\times\frac{1}{x^2} + \frac{1}{8}\times\frac{1}{x^4} + \frac{5}{64}\times\frac{1}{x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)}$$

4-c) $DL_6(+\infty)$ de la fonction f.

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x - \sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{1 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

0,5 $$= \arctan(v(x)).$$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = 0$ 23

Donc, Au voisinage de $+\infty$, on a

$$f(x) = v(x) - \frac{1}{3}(v(x))^3$$

$$v(x) = \frac{-1}{4x^2} + \frac{1}{8x^4} - \frac{5}{64} \times \frac{1}{x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

0,25 $$(v(x))^3 = \left(\frac{-1}{4x^2}\right)^3 + o\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

$$= \frac{-1}{64x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

0,25 $$\boxed{f(x) = \frac{-1}{4x^2} + \frac{1}{8x^4} + \frac{(-7)}{96} \times \frac{1}{x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right).}$$

4-d) Au voisinage de $-\infty$, $|x| = -x$

donc $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 + 1/x^2}}{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}\right)$

0,25 $= \arctan\left(\dfrac{1}{v(x)}\right)$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > x^2 \Longrightarrow \sqrt{x^2+1} > |x|$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x^2} > x \\ \sqrt{1+x^2} > -x \end{cases}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $v(x) < 0$

Or $\forall y \in \mathbb{R}^-$ $\operatorname{Arctan} y + \operatorname{Arctan} \frac{1}{y} = \frac{-\pi}{2}$

0,5 Donc $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{v(x)}\right) = \dfrac{-\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(v(x))$

Ainsi, Au voisinage de $-\infty$:

0,25 $$f(x) = \frac{-\pi}{2} + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{8x^4} + \frac{\cancel{7}}{96} \times \frac{1}{x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right).$$

4- e)

- Au vois de $+\infty$:

0,25 $y = 0$ est une équation de l'asymptote à (C_f) au vois de $+\infty$.

De plus : $f(x) - y \underset{+\infty}{\approx} \frac{-1}{4} \times \frac{1}{x^2}$

0,25 Donc (C_f) est en dessous de ~~sons~~ son asymptote en $+\infty$.

- Au vois de $-\infty$:

0,25 $y = \frac{-\pi}{2}$ est une équation de l'asymptote à (C_f) au vois de $-\infty$.

De plus $f(x) - y \underset{-\infty}{\approx} \frac{1}{4x^2}$

0,25 Donc (C_f) est au-dessus de son asymptote en $-\infty$.

Module Analyse I

Année 2014/2015

Examen du 1er Partiel

Exercice 1.

1. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est convergente (Ind. Montrer qu'elle est majorée par 2).

$k \geqslant k-1$

Exercice 2.

On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}, & \text{Si } x \neq 0\,; \\ 0, & \text{Si } x = 0\,. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$
3. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

Soit f la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et derivable sur $]a, b[$.
On pose

$$\phi(x) = (f(b) - f(a))x^7 - (b^7 - a^7)f(x)$$

1. Montrer que ϕ est continue sur $[a, b]$ et derivable sur $]a, b[$, calculer $\phi'(x)$.
2. Calculer $\phi(a)$ et $\phi(b)$. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$7c^6(f(b) - f(a)) = (b^7 - a^7)f'(c)$$

Exercice 4.

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1 + x + \sqrt{1+x^2}}$$

1. Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0. En déduire l'équation de la tangente de f en $(0; 1/2)$ et la position de la courbe de f par rapport à la tangente.
2. Donner un développement limité à l'ordre 2 en $+\infty$.

Exercice 1

1 – Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

on pose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ donc $\sqrt{2} = p/q$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$

et q et p sont premiers entre eux.

on a $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$

$\Leftrightarrow p^2 = 2q^2$ (donc $p/2$)

donc $p = 2k \Rightarrow p^2 = 4k^2$

$q^2 = \frac{p^2}{2} = \frac{4k^2}{2} = 2k^2$

(donc $q/2$) absurd

donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2) – Montrer que $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est convergen

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc U_n est croissant

– on a $U_n < 2 = -1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

$= -1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 0$

La suite $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$ est une suite majorée

~~Lor~~ donc $U_n - 2 < 0$ alors $U_n < 2$.

Exercice 2 :

1) – $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

on a la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est definie sur $\mathbb{R}^*$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}^*$

$\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

donc $f(x)$ est au dessus de y

2) – $f(x) = \dfrac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{|x|\left(1/x + 1 + \sqrt{1+1/x^2}\right)}$

$= \dfrac{(1+1/x^2)^{1/2}}{1 + 1/x + (1+1/x^2)^{1/2}}$

on pose $h = 1/x$ $\quad x = \dfrac{1}{h}$

$f(x) = \dfrac{(1+h^2)^{1/2}}{1+h+(1+h^2)^{1/2}}$

$f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{h}{4} + \dfrac{h^2}{4} + o(h^2)$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{4x^2} + o(1/x^2)$

$(n+1)\Gamma$

ur $\mathbb{R}^*$ et $f(0)=0$

Donc $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$

$= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} \times (-x) = 0$

onc f est derivable sur $\mathbb{R}$.

) $\forall x \in \mathbb{R}$

$e^{-\frac{1}{x^2}} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}}$

$= \frac{2x}{x^4} e^{-1/x^2}$

$= \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$

<u>xercice</u> 3

-- $\Phi(x) = (f(b)-f(a))x^7 - (b^7-a^7)f(x)$

n a $f(x)$ est continue sur $[a\ b]$ et x^7 est
ussi continue sur $[a\ b]$ Donc $\Phi(x)$ est
ontinue parce que $\Phi(x)$ est une somme de fonct
ontinue
n a $f(x)$ est derivable sur $]a\ b[$ et $x \to x^7$ est
erivable sur $]a\ b[$ donc $\Phi(x)$ est derivable sur
$a\ b[$

$\Phi'(x) = 7x^6(f(b)-f(a)) - f'(x)(b^7-a^7)$.

) $- \Phi(a) = (f(b)-f(a))a^7 - (b^7-a^7)f(a)$

$= a^7 f(b) - \cancel{f(a)a^7} - f(a)b^7 + \cancel{f(a)a^7}$

$= a^7 f(b) - b^7 f(a)$

$= b^7 f(b) - b^7 (f(a) - f(b) b^7 + a^7 f(a)$

$= a^7 f(b) - b^7 f(a)$

$\Phi(a) = \Phi(b)$

on a $\Phi(x)$ est continue sur $[a\, b]$ et $\Phi(x)$ derivable sur $]a\, b[$ et $\Phi(a) = \Phi(b)$

donc D'après la th de Rolle

$\exists\, c \in]a\, b[\;:\; f'(c) = 0$

$7c^6 (f(b) - f(a)) - (b^7 - a^7) f'(c) = 0$

$7c^6 (f(b) - f(a)) = (b^7 - a^7) f'(c)$.

<u>Exercice 2</u> : $DL_2(0)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$$

$\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$1 + x + \sqrt{1+x^2} = 2 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{1} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) & 2 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\
\hline
\cancel{1} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2) & \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4} - \\
\hline
-\frac{\cancel{x}}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2) & \\
\frac{\cancel{x}}{2} - \frac{x^2}{4} & \\
\hline
0 \quad \frac{x^2}{2} &
\end{array}$$

Donc $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$

l'equation de la tangente

$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$

Université Hassan II - F.S.T. Mohammedia
Département de mathématiques - Année 2011 - 2012
MIP - Module M111
Extraits d'Examens

Question de cours 1.

1. Comment la fonction *Arctangente* : $x \mapsto \arctan x$ est-elle définie ? Prouver qu'elle est dérivable et que sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \arctan(\frac{1}{1+x+x^2})$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Question de cours 2.

Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a

$$argsh(x) = x + \sqrt{x^2+1}.$$

Question de cours 3.

Soit f la fonction impaire définie par $f(x) = sh\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f définie une bijection de $]-1,1[$ sur un ensemble A que l'on déterminera.
3. Justifier, en énonçant très précisément un résultat du cours, que la bijection f^{-1} est une fonction dérivable sur A. Donner $(f^{-1})'(0)$. (On ne demande pas de calculer l'expression de f^{-1}, ni celle de la dérivée de f^{-1}.

Question de cours 4.

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \arg ch\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner le domaine de définition de f' et calculer f' sur son domaine de définition.

Exercice 1.

1. Montrer que l'équation
$$2 - x - 2e^{-x} = 0$$
admet deux solutions réelles : 0 et une autre, notée r, qui est strictement positive.
2. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par
$$u_0 = 1 \ et\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2(1-e^{-u_n}).$$
   (a) Etudier les variations de la fonction f définie par
$$f(x) = 2(1-e^{-x}).$$

(b) Montrer que si $(u_n)_n$ converge, alors elle converge vers r.

(c) Vérifier que l'on a : $1 < r < 2$.

(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_{n+1} - r| \leqslant (\frac{2}{e})|u_n - r|$$

(e) **En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers r.**

<u>Exercice 2.</u> Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x|\ln(x)| & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $[0, +\infty[$.
2. Etudier la dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$.
3. Donner tous les points fixes de f.
4. Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.
5. Etudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On montrera que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{4} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{e}$.

<u>Exercice 3.</u>

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = -1; \quad et \quad u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n}$$

On admettra que la suite est bien définie.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{3} - u_{n+1} = \dfrac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-u_n)}{2+u_n}$.

   (b) Montrer alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \sqrt{3}$.
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis qu'elle est convergente.
4. (a) Déduire de 2.(a) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{3} - u_{n+1} \leqslant \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} - u_n)$.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \sqrt{3} - u_n \leqslant \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^n (\sqrt{3}+1)$$

5. En déduire la limite de (u_n).

47

Exercice 4.

1. Enoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On se propose de montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a)e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}} \qquad (1)$$

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln[f(x)]$.

(a) Préciser l'ensemble de définition de g, son domaine de dérivation, puis calculer $g'(x)$ pour tout $x \in D_{g'}$.

(b) En appliquant le théorème des accroisements finis sur g, déduire le résultat.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par

$$f(0) = 0$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{x^2 e^x}{1 - e^{-2x}}.$$

Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R})$. On donnera $f'(0)$.

Exercice 6. Soit la fonction $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

1. Donner le domaine de définition de g.
2. Montrer que g est dérivable sur son domaine de définition et que :

$$g'(x) = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right) g(x).$$

3. Etudier la fonction $\varphi(x) = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right)$ et en déduire les variations de g.
4. En appliquant le théorème des accroissements finis sur la fonction $\ln(1+u)$ entre 0 et $\frac{1}{x}$, calculer $\lim\limits_{\pm\infty} g(x)$.
5. Calculer les limites aux bornes de g et donner son tableau de variation.
6. Donner la représentation graphique C_g de g.

Exercice 7. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & t < 0 \\ 0 & t \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier pour $t = 0$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit :

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$

où P_n est un polynôme.

(a) Trouver P_1 et P_2.

(b) Trouver une relation de récurrence entre P_n, P_{n+1} et P_n' pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Montrer que f est de classe C^∞.

Exercice 8.

Calculer les limites suivantes :

$$a) \quad \lim_{x \to +\infty} x^2 \ln(1 + \frac{1}{x^2}); \qquad b) \quad \lim_{x \to 0} x^2 \ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{shx}}.$$

Exercice 9.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = (x+2) \arctan x.$$

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
3. Calculer $f(-2)$ et $f(0)$. Enoncer avec précision le théorème de Rolle et l'appliquer sur l'intervalle $[-2, 0]$
4. **Etude des variations de f**
   (a) Expliquer pourquoi f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f''(x) = \gamma \frac{1-2x}{(x^2+1)^2}$, où γ est un réel que l'on déterminera.
   (b) Donner le tableau de variation de f'. On calculera les limites de f' aux bornes ainsi que la valeur de son maximum.
   (c) Montrer qu'il existe un **unique** réel α tel que $f'(\alpha) = 0$ et que α est compris entre -1 et 0.
   (d) En déduire le tableau de variation de f et calculer ses limites aux bornes de son ensemble de défintion.
5. **Etude des branches infinies**
   (a) Calculer le développement limité à l'ordre 5 de la fonction arc-tangente en 0.
   (b) Montrer que
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}^{*+}, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$
   (c) En déduire les valeurs des trois réels a, b et c tels que, au voisinage de $+\infty$, on a
   $$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$
   (d) Donner l'équation de l'asymptôte oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ et donner la position de la courbe C_f par rapport à cette asymptôte.
   (e) En utilisant :
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}^{*-}, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$
   Etudier de manière analogue la branche infinie de f au voisinage de $-\infty$.

6. **Etude du point d'inflexion**

   (a) Admettant que par la formule de Taylor au voisinage de $\beta = \frac{1}{2}$, on a :

$$f(x) = \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + 2\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{32}{75}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \varepsilon\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

   Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à C_f en $\beta = \frac{1}{2}$, et en déduire la position de C_f relativement $\mathcal{T}$.

   (b) Tracer la courbe C_f en faisant apparaître toutes les information récoltées au cours de l'étude.

On donne les valeurs approchées suivantes :

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0,46; \quad \alpha \simeq -0,83; \quad f(\alpha) \simeq -0,81; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 1,16.$$

Exercice 10.

Soit f la fonction définie par :

$$f(0) = 0$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$$

f est-elle de classe C^1 dans $\mathbb{R}$?

Exercice 11.

1. On pose $I = [\frac{3}{2}, 3]$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{6}{x+1}$.
   (a) Donner le sens de variation de f sur I.
   (b) Justifier que $f(I)$ est un intervalle et que $f(I) \subset I$.
   On définit alors sur I la fonction $g = f \circ f$.
   (c) Calculer $g(x)$ pour tout $x \in I$.
   (d) Donner le sens de variation de g sur I.
   (e) Déterminer les points fixes de g puis ceux de f.
2. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On introduit les suites extraites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   (a) Calculer u_0 et u_1.
   (b) Prouver la convergence de la suite $(v_n)_n$ et préciser sa limite.
   (c) Prouver la convergence de la suite $(w_n)_n$ et préciser sa limite. On pourra utiliser le fait que $w_n = f(v_n)$.
   (d) Quelle conclusion en tire-t-on pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 12. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{2}{1+e^t}$.
On note C sa courbe représentative.

1. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f'(t)$.
2. Etablir le tableau de variation de f (en indiquant les limites en $-\infty$ et $+\infty$).
3. (a) Calculer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
   (b) En déduire l'équation de la tangente Δ à la courbe C au point d'abscisse 0, et la position de C par rapport à Δ au voisinage de ce point.
4. (a) Etudier la parité de la fonction $h : t \mapsto f(t) - 1$.
   (b) Que peut-on déduire au sujet de C ?
5. Tracer la courbe de C, en indiquant tous les éléments importants.
6. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que l'équation $f(t) - t$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ (que l'on ne cherchera pas à calculer). On note α cette solution.
   (b) Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $f''(t) = \dfrac{Ke^t(e^t-1)}{(1+e^t)^3}$ où K est une constante réelle à déterminer.
   (c) Etablir le tableau de variation de f'.
   (d) En déduire que pour $t \in \mathbb{R}$, $|f'(t)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   (e) Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$
   (f) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
   Que peut-on déduire au sujet de $(u_n)_n$ lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 13.
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arctan \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner le D.L. en 0 d'ordre 3 de la fonction $t \mapsto \sqrt{\dfrac{t+1}{2t+1}}$.
3. En déduire le D.L. généralisé d'ordre 3 en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$.
4. En utilisant la formule de Taylor sur l'intervalle $[1, u]$, donner le D.L. d'ordre 3 au point $u_0 = 1$ de $u \mapsto \arctan u$.
5. En déduire le D.L. généralisé d'ordre 3 en $+\infty$ de f.
6. Donner l'équation de l'asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et sa position relative par rapport à cette courbe.

517

CORRECTION EXTRAITS D'EXAMENS

QUESTION DE COURS 1.

1) La fonction $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$ est une fonction continue strictement croissante, donc réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$. La fonction arctan est alors définie comme la fonction réciproque de f, et est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Comme f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$

f^{-1} est dérivable et

$$\arctan'(x) = \frac{1}{f'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

2) Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \neq 0$, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable comme composée de fonctions dérivables, avec

$$f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{(x^2+x+1)^2}},$$

donc $$f'(x) = -\frac{2x+1}{1 + (x^2+x+1)^2}.$$

QUESTION DE COURS 2.

$$\begin{cases} y = \operatorname{argsh} x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sh} y = x \\ \operatorname{ch} y = \sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad e^y = \operatorname{sh} y + \operatorname{ch} y = x + \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

EXERCICE 1.

1) Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2 - x - 2e^{-x}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant somme de fcts dériv. sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = -1 + 2e^{-x}$

$$f'(x) = 0 \iff x = \ln 2$$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$1-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

- On a $f(0) = 0$
- sur $[\ln 2, +\infty[$ $\quad f$ est continue, st ↘

$f(\ln 2) = 1 - \ln 2 > 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$

D'après le th. des VI, $\exists\, r \in [\ln 2, +\infty[\;/\; f(r) = 0$

2) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2(1 - e^{-U_n}) \end{cases}$

a) $f(x) = 2(1 - e^{-x})$

f continue, dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = 2e^{-x} > 0$ $\qquad$ donc f est st ↗ sur $\mathbb{R}$.

b) Si $(U_n)_n$ cv. vers ℓ $\quad$ ie $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$

f étant continue, on a $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = f(\ell)$

ie $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = f(\ell)$ $\qquad$ Soit $f(\ell) = \ell$

donc ℓ solution de l'équation $2-x-2e^{-x}=0$

D'après 1) $\ell=0$ ou $\ell=r>0$

Or $\forall n\in\mathbb{N}$ $(u_n)_n \nearrow$ $(u_1>u_0)$ donc $\ell=r>0$.

c) On a $f(1)=1-\frac{2}{e}>0$, $f(2)=-\frac{2}{e^2}<0$

f continue , s^t $\searrow$ sur $[1,2]$ $\Rightarrow$ TVI $r\in]1,2[$.

d) $u_{n+1}-r=f(u_n)-f(r)$

f dérivable sur $]u_n,r[$

f continue sur $[u_n,r]$

thm de AF $\Rightarrow \exists c\in]u_n,r[$ /

$$f(u_n)-f(r)=f'(c)(u_n-r)$$
$$=\frac{2}{e^c}(u_n-r)$$

donc $|u_{n+1}-r|\leq\frac{2}{e}|u_n-r|$

e) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$ $|u_n-r|\leq\left(\frac{2}{e}\right)^n|u_0-r|$

- $n=0$ P est vérifiée.
- Supposons pour un certain n $|u_n-r|\leq\left(\frac{2}{e}\right)^n|u_0-r|$

$|u_{n+1}-r|\leq\frac{2}{e}|u_n-r|$ d'après d)

$$\leq\frac{2}{e}\cdot\left(\frac{2}{e}\right)^n|u_0-r|$$
$$\leq\left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}|u_0-r|$$

Or $0\leq\frac{2}{e}\leq1$ donc $\left(\frac{2}{e}\right)^n\xrightarrow[n\mapsto+\infty]{}0$

f) Par conséquent $(u_n-r)\xrightarrow[n\mapsto+\infty]{}0$ Soit $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=r$.

EXERCICE 2.

1). f est continue sur $]0,+\infty[$, comme composée (valeur absolue et logarithme népérien) et produit de fonctions continues.

- En $x=0$:

$$\lim_{x\mapsto 0^+} x|\ln x| = \lim_{x\mapsto 0^+} -x\ln x = 0 = f(0)$$

donc f est continue en 0

cl f est continue sur $[0,+\infty[$.

2) - Pour tout $x\in]0,1[$, $f(x)=-x\ln x$ est dérivable

et $f'(x) = -\ln x - 1$

- Pour tout $x\in]1,+\infty[$, $f(x) = x\ln x$ est dérivable

et $f'(x) = \ln x + 1$.

- En $x=1$: On a $f(1)=0$

$$\lim_{x\mapsto 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\mapsto 1^+} \frac{x\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\mapsto 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\mapsto 1^-} \frac{-x\ln x}{x-1} = -1$$

la fonction f n'est pas dérivable en 1.

- En $x=0$:

$$\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\mapsto 0^+} \frac{-x\ln x}{x} = \lim_{x\mapsto 0^+} -\ln x = +\infty$$

la fonction f n'est pas dérivable en 0.

3) On a $f(0)=0$ donc 0 est un point fixe de f.

- Recherchons les points fixes dans $]0,1[$.

On a alors $x = -x \ln x \implies x = \frac{1}{e} \in]0,1[$

- Recherchons les points fixes dans $]1,+\infty[$.

On a alors $x = x \ln x \implies x = e \in]1,+\infty[$

Donc f admet trois points fixes : 0, $\frac{1}{e}$ et e.

4) Sur $]0,1[$ $\quad f'(x) = -\ln x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{e}$.

Sur $]1,+\infty[$ $\quad f'(x) = \ln x + 1 > 0$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
f'	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{1}{e}$.

- $n = 0$ $\quad P$ est vérifiée.
- Supposons $\quad \frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{1}{e}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{e}\right) \quad \left(f \nearrow \text{ sur } \left[0, \frac{1}{e}\right]\right)$$

$$\frac{1}{4} < \frac{\ln 2}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{e}$$

donc $\quad u_n \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{e}\right]$

En plus $\quad u_1 = \frac{\ln 2}{2} > \frac{1}{4} = u_0$ $\quad$ donc $(u_n)_n \nearrow$ $\quad (f$ est $\nearrow)$

$(u_n)_n \nearrow$ majorée donc convergente. Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

$\ell = f(\ell)$ et $\quad \frac{1}{4} \leq \ell \leq \frac{1}{e}$

Or le seul point fixe de f dans $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{e}\right]$ est $\frac{1}{e}$.

EXERCICE 5.

1) Continuité de f :

- f continue sur $\mathbb{R}^*$ comme étant produit, quotient et composée de fonctions continues.

- En $x=0$:

$$\lim_{x\mapsto 0} f(x) = \lim_{x\mapsto 0} \frac{x^2 e^x}{1-e^{-2x}} = \lim_{x\mapsto 0}\left(\frac{-2x}{1-e^{-2x}} \cdot \frac{-x e^x}{2}\right) = 0 = f(0)$$

donc f est continue en 0

C.l. f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Dérivabilité de f :

- f dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme étant produit, quotient et composée de fonctions dérivables.

- En $x=0$:

$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{x e^x}{1-e^{-2x}}$$

$$= \lim_{x\mapsto 0} \frac{+2x}{1-e^{-2x}} \cdot \frac{+e^x}{2} = +\frac{1}{2}$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = +\frac{1}{2}$.

C.l. f est dérivable sur $\mathbb{R}$

3) Continuité de f'

$\forall x \neq 0 \qquad f'(x) = \dfrac{x(2+x)\,e^x - x(2+3x)\,e^{-x}}{(1-e^{-2x})^2}$

- f' continue sur $\mathbb{R}^*$

- $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} f'(x) = \lim_{x\mapsto 0} \frac{x(2+x)\,e^x - x(2+3x)\,e^{-x}}{(1-e^{-2x})^2} = \frac{1}{2} = f'(0)$

donc f' est continue sur $\mathbb{R}$

C.l. $f \in C^1(\mathbb{R})$.

EXERCICE 6

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

1) $x \in D_g \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

$D_g =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

2) $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

g dérivable sur D_g car produit et composé de fcts dérivables sur D_g. $\begin{cases} x \mapsto 1 + \frac{1}{x} \\ x \mapsto \ln x \\ x \mapsto e^x \end{cases}$

et $\forall x \in D_g$

$$g'(x) = \left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)' e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$= \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$= \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right) g(x)$$

3) $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$ définie sur D_g.

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$= -\frac{1}{x(1+x)} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{x(1+x)^2}$$

[illegible]

x	$-\infty$ -1	0 $+\infty$
f'	$+$	$-$
f	$0 \nearrow$	$\searrow 0$

On a $\forall x \in D_g$: $f(x) \geq 0$

Or $g'(x) = f(x)\, g(x)$

g étant positive donc g' a le même signe que f

donc $\forall x \in D_g$ $\quad g'(x) \geq 0$

i.e $\forall x \in D_g$ $\quad g$ est croissante.

4) Considérons la fonction $\psi(u) = \ln(1+u)$ définie sur $[0, \frac{1}{x}]$.

ψ continue sur $[0, \frac{1}{x}]$, dérivable sur $]0, \frac{1}{x}[$

D'après le théorème des AF, $\exists\, c \in]0, \frac{1}{x}[$ tel que :

$$\psi\left(\frac{1}{x}\right) - \psi(0) = \psi'(c)\left(\frac{1}{x} - 0\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln(1) = \frac{1}{1+c}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \left(\text{car } \psi'(u) = \frac{1}{1+u}\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+c} \cdot \frac{1}{x}$$

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+c}$$

On a $\quad 0 < c < \frac{1}{x}$

$$1 < 1 + c < \frac{1}{x} + 1$$

$$1 < 1 + c < \frac{1+x}{x}$$

$$\frac{x}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$$

donc $\dfrac{x}{x+1} < x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) < 1$

soit $e^{\frac{x}{1+x}} < e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} < e$ (e^x croissante)

$e^{\frac{x}{1+x}} < g(x) < e$

donc d'après le théorème des gendarmes

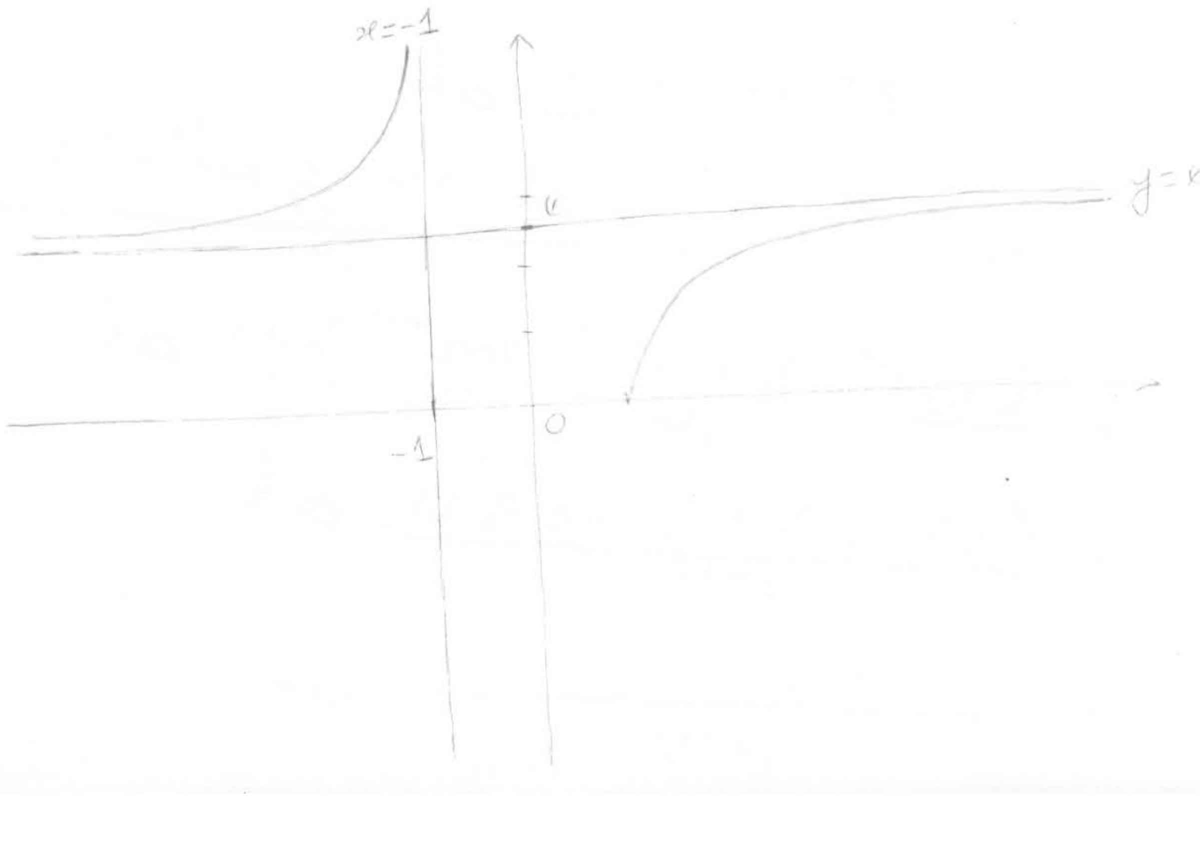
$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = e.$$

5) $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} g(x) = \lim_{x\to -1^-} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = +\infty.$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1.$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
g'	$+$	||	||	$+$
g	$e \nearrow +\infty$	||	||	$1 \nearrow e$

6)



EXERCICE 7.

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}} & t<0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

1) f dérivable sur $\mathbb{R}^{*-}$ comme étant inverse et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{*-}$.

En $t=0$ $\quad \lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{1}{t} e^{\frac{1}{t}} = 0 \quad \left(\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0 \right)$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

Par conséquent f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) $\lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{f'(t)-f'(0)}{t-0} = \lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{-\frac{1}{t^2} e^{\frac{1}{t}}}{t} = \lim\limits_{t \to 0^-} -\dfrac{1}{t^3} e^{\frac{1}{t}} = 0$

donc $f''(0)=0$

3) a) $t<0$ $\quad f'(t) = -\dfrac{1}{t^2} e^{\frac{1}{t}} = \dfrac{P_1(t)}{t^{2 \cdot 1}} e^{\frac{1}{t}} \Rightarrow P_1(t) = -1.$

$$f''(t) = -\frac{-\frac{1}{t^2} e^{\frac{1}{t}} \cdot t^2 - 2t e^{\frac{1}{t}}}{t^4} = \frac{(+1+2t) e^{\frac{1}{t}}}{t^{2 \cdot 2}} \Rightarrow P_2(t) = 1+2t$$

b) S. $\quad f^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{\frac{1}{t}}$

$$f^{(n+1)}(t) = \left(f^{(n)}(t)\right)' = \frac{\left(P_n'(t) e^{\frac{1}{t}} - P_n(t) \frac{1}{t^2} e^{\frac{1}{t}}\right) t^{2n} - 2n t^{2n-1} P_n(t) e^{\frac{1}{t}}}{t^{4n}}$$

$$= \frac{P_n'(t) t^{2n} - P_n(t) t^{2n-2} - 2n t^{2n-1} P_n(t)}{t^{4n}} e^{\frac{1}{t}}$$

$$= \frac{t^2 P_n'(t) - P_n(t) - 2n t P_n(t)}{t^{2n+2}} e^{\frac{1}{t}}$$

$$= \frac{t^2 P_n'(t) - (1+2nt) P_n(t)}{t^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{t}}$$

(-1)

$$f^{(n+1)}(t) = \frac{P_{n+1}(t)}{t^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{t}}$$

donc $\quad P_{n+1}(t) = t^2 P_n'(t) - (2nt+1) P_n(t).$

4) $\forall n \in \mathbb{N} \qquad f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{\frac{1}{t}}$

donc $\forall n$, f est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}$ continue comme étant quotient et composée de fcts continues

donc f est de classe C^{∞}.

Complément

Question de cours 3.

$$f(x) = sh\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$$

1) $x \in D_f \iff x \in D_{\frac{x}{1-x^2}}$ et $\frac{x}{1-x^2} \in D_{sh} (= \mathbb{R})$

$\iff x \neq \pm 1$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$.

2) f dérivable sur D_f, comme étant quotient et composée de fcts dérivable sur D_f.

$$f'(x) = sh'\left(\frac{x}{1-x^2}\right) \times \left(\frac{x}{1-x^2}\right)'$$

$$= \frac{1+x^2}{1-x^2}\, ch\left(\frac{x}{1-x^2}\right) < 0 \quad \text{sur }]-1, 1[.$$

f continue, st $\searrow$ sur $]-1, 1[$, donc réalise une bij. de $]-1;1[$ dans $f(]-1;1[) =]-\infty; +\infty[$.

3) Comme f est dérivable sur $]-1,1[$ et que $f'(x) < 0$ ie $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable et

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Pour $x = 0$

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

63

Question de cours 4.

$$f(x) = \operatorname{argch}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

1) $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}_{\frac{2x}{1-x^2}}$ et $\frac{2x}{1-x^2} \in \mathcal{D}_{\operatorname{argch}} \left(= [1;+\infty[\right)$

$\Leftrightarrow \quad x \neq \pm 1$ et $\frac{2x}{1-x^2} \geq 1$

$\Leftrightarrow \quad x \neq \pm 1$ et $\frac{2x}{1-x^2} - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \neq \pm 1$ et $\frac{2x-1+x^2}{1-x^2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \neq \pm 1$ et $\frac{x^2+2x-1}{1-x^2} \geq 0$

$\mathcal{D}_f = [-1-\sqrt{2}\,;-1[\,\cup\,[-1+\sqrt{2}\,;1[.$

2) $x \in \mathcal{D}_{f'} \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}_{\frac{2x}{1-x^2}}$ et $\frac{2x}{1-x^2} \in \mathcal{D}_{\operatorname{argch}'} \left(=]1;+\infty[\right)$

$\mathcal{D}_{f'} =]-1-\sqrt{2}\,;-1[\,\cup\,]-1+\sqrt{2}\,;1[.$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)'}{\sqrt{\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2 - 1}}$$

$$= \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)\sqrt{-x^4+6x^2-1}}$$

64/

EXERCICE 3.

$$u_0 = -1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{2+u_n}$$

1) • $n = 1$ $\quad u_1 = \dfrac{3-2}{2-1} = 1 \geq 0$

• Supposons que pour n : $u_n \geq 0$ et mq $u_{n+1} \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} 3+2u_n \geq 0 \\ 2+u_n > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3+2u_n}{2+u_n} \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq 0$$

donc $\forall n \geq 1$; $u_n \geq 0$.

2) a) $\sqrt{3} - u_{n+1} = \sqrt{3} - \dfrac{3+2u_n}{2+u_n}$

$$= \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{3}\,u_n - 3 - 2u_n}{2+u_n}$$

$$= \frac{(2-\sqrt{3})\sqrt{3} - (2-\sqrt{3})u_n}{2+u_n}$$

$$= \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3} - u_n)}{2+u_n}$$

b) • $n = 0$ $\quad u_0 = -1 \leq \sqrt{3}$

• Supposons que pour n : $u_n \leq \sqrt{3}$ et mq $u_{n+1} \leq \sqrt{3}$

• $\sqrt{3} - u_{n+1} = \dfrac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-u_n)}{2+u_n} \geq 0$ $\quad \left(\begin{array}{l} \sqrt{3} - u_n > 0 \\ 2+u_n > 0 \\ 2-\sqrt{3} > 0 \end{array}\right)$

donc $u_{n+1} \leq \sqrt{3}$.

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \leq \sqrt{3}$.

c)

3) Soit $f(x) = \dfrac{3+2x}{2+x}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

$$f'(x) = \frac{1}{(2+x)^2} > 0 \Rightarrow f \text{ est st } \nearrow$$

donc $(u_n)_n$ est monotone

comme $u_0 = -1 < u_1$ alors $(u_n)_n$ est $\nearrow$

$(u_n)_n \nearrow$, majorée par $\sqrt{3}$, donc $(u_n)_n$ est convergente.

4) a) On a $\sqrt{3} - u_{n+1} = \dfrac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-u_n)}{2+u_n}$

On $u_n \geq 0 \Rightarrow u_n + 2 \geq 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+u_n} \leq \frac{1}{2}$$

donc $\sqrt{3} - u_{n+1} \leq \left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3}-u_n)$

b) • $n = 0$ $\quad \sqrt{3} - u_0 = \left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^0 (\sqrt{3}+1)$ vraie

• Supposons que pour n on a

$$0 \leq \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^n (\sqrt{3}+1)$$

On a $\sqrt{3} - u_{n+1} \leq \left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3}-u_n)$

$$\leq \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^n (\sqrt{3}+1)$$

$$\leq \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} (\sqrt{3}+1)$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad 0 \leq \sqrt{3} - u_n \leq \left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^n (\sqrt{3}+1)$

5) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^n (\sqrt{3}+1) = 0$ $\quad \left(\text{car } 0 < \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} < 1\right)$

D'après le thm. des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{3} - u_n) = 0$ ie $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{3}$

EXERCICE 4 :

1) Si f est une fct continue sur $[a,b]$, dériv. sur $]a,b[$.
alors il existe un $c \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

2) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont, st positive sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Soit $g(x) = \ln(f(x))$.

a) $f > 0 \Rightarrow \ln . f$ est définie sur D_f

$$D_g = [a,b].$$

$$D_{g'} = D_{f'} =]a,b[\quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

b) g continue sur $[a,b]$; dérivable sur $]a,b[$

$\Rightarrow \exists c \in]a,b[\ / \ \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c).$

$$\ln(f(b)) - \ln(f(a)) = (b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}$$

$$\ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = (b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}$$

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

(?) d'où $f(b) = f(a)\, e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$

EXERCICE 8

a) $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$

$x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} 1$

donc $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1.$

b) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x}} = e^{\frac{1}{\operatorname{sh} x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$

- $\frac{1+x}{1-x} \underset{0}{\sim} 1+2x$

  $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{0}{\sim} \ln(1+2x) \underset{0}{\sim} 2x$

- $\operatorname{sh} x \underset{0}{\sim} x$

  $\frac{1}{\operatorname{sh} x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$

  $\frac{1}{\operatorname{sh} x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}\cdot 2x \underset{0}{\sim} 2$

  $e^{\frac{1}{\operatorname{sh} x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \underset{0}{\sim} e^2$

donc $\lim\limits_{x\mapsto 0} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x}} = e^2.$

c)

EXERCICE 9.

$$f(x) = (x+2)\arctan x.$$

1) $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{\arctan} = \mathbb{R}$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant produit de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \arctan x + (x+2) \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x+2}{1+x^2}.$$

3) $f(-2) = 0$; $f(0) = 0$

Théorème de Rolle :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in]a,b[\;/\; f'(c) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [-2;0] \\ f \text{ dérivable sur }]-2;0[\\ f(-2) = f(0) \end{array}\right\} \overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists c \in]-2;0[\mid f'(c) = 0$$

4) Etude des variations de f.

a) f' dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant somme, produit et quotient de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

et $f''(x) = \dfrac{2(1-2x)}{(1+x^2)^2}$; $\lambda = 2$.

(9)

b)

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	
f'	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$2+\arctan(\frac{1}{2})$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$

f' admet un maximum $\left(= 2+\arctan\frac{1}{2}\right)$ en $x_0 = \frac{1}{2}$.

c) $f'(-1) = \arctan(-1) + \frac{-1+2}{1+(-1)^2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} < 0$

$f'(0) = \arctan 0 + \frac{0+2}{1+0^2} = 2 > 0$

$\left.\begin{array}{l} f' \text{ cont sur } [-1,0] \\ f'(-1)\cdot f'(0) < 0 \\ f' \text{ st } \nearrow \text{ sur } [-1;0] \end{array}\right\}$ T.V.I $\Rightarrow \exists!\, \alpha \in]-1,0[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

d)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

7a)

5) Etude des branches infinies

a) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^5 \varepsilon(x)$.

b) Soit $f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, sur $\mathbb{R}^{*+}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

f est donc constante sur $\mathbb{R}^{*+}$

$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$ $\quad f(x) = f(1) = \arctan 1 + \arctan 1$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$ $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

c) Posons $t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc $x = \frac{1}{t}$

$$f(x) = f(t) = \left(\frac{1}{t} + 2\right) \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{t} + 2\right)\left(\frac{\pi}{2} - \arctan t\right)$$

$$= \left(\frac{1}{t} + 2\right)\left(\frac{\pi}{2} - \left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + t^5 \varepsilon(t)\right)\right)$$

71)

$$f(t) = \left(\frac{1}{t} + 2\right)\left(\frac{\pi}{2} - t + \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + t^5 \varepsilon(t)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{t} + \pi - 1 - 2t + t\,\varepsilon(t)$$

donc $\quad f(x) = \frac{\pi}{2} x + \pi - 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$

d) L'équation de l'asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au $\mathcal{V}(+\infty)$

est $\quad y = \frac{\pi}{2} x + \pi - 1$.

$f(x) - y = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) < 0 \quad$ au $\mathcal{V}(+\infty)$

donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de l'asym. au $\mathcal{V}(+\infty)$.

e) On a $\forall x \in \mathbb{R}^{*-}$, $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

$t = \frac{1}{x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$

$$f(x) = f(t) = \left(\frac{1}{t} + 2\right)\left(\arctan \frac{1}{t}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{t} + 2\right)\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan t\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{t} - \pi - 1 - 2t + t\,\varepsilon(t)$$

$$f(x) = -\frac{\pi}{2} x - \pi - 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

Equation $\quad y = -\frac{\pi}{2} x - \pi - 1$

$\mathcal{C}_f$ est au dessus de l'asymptote.

6) Etude du point d'inflexion

a) L'équation de la $\mathcal{T}$:

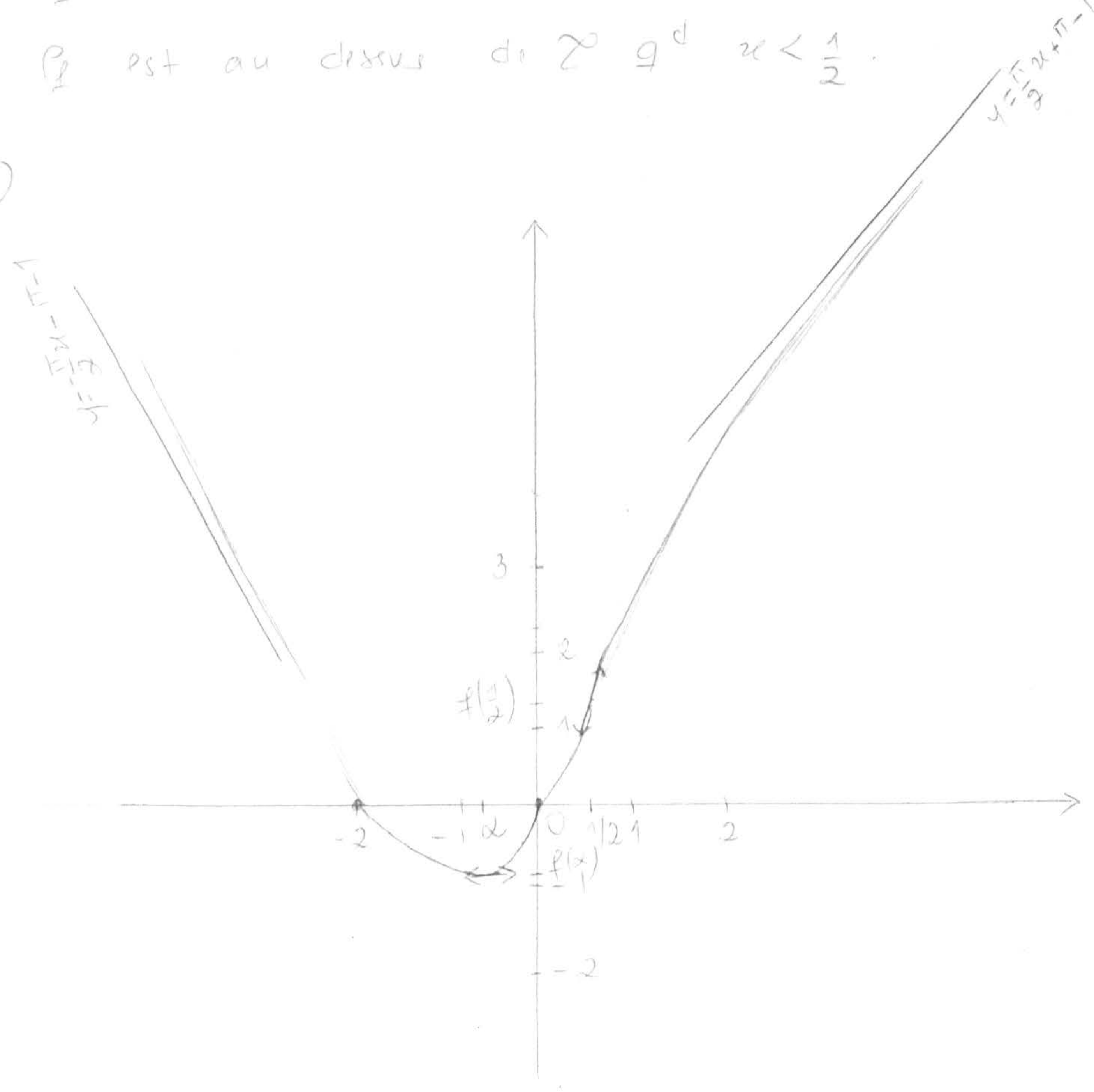
$$y = \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+2\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
$$= \left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+2\right)x + 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - 1.$$

$$f(x) - y = -\frac{32}{75}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(x-\frac{1}{2}\right)^3 \varepsilon\left(x-\frac{1}{2}\right) \begin{cases} >0 & \text{si } x<\frac{1}{2} \\ <0 & \text{si } x>\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{T}$ qd $x > \frac{1}{2}$

$\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{T}$ qd $x < \frac{1}{2}$.

b)



737

1 1

EXERCICE 10.

$$f(0) = 0 \quad ; \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} \quad x > 0.$$

1) Continuité de f.

• en $x > 0$. f continue comme étant pro quotient et somme de fcts continues sur $\mathbb{R}^{*+}$.

• en $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \sqrt{x}$$

$$= 0 = f(0) \quad \left(\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1 \right)$$

donc f est continue en 0

d'où f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2) Dérivabilité de f.

• en $x > 0$ f dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ comme étant quotient et somme de fct dérivables sur $\mathbb{R}^{*+}$.

• en $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

donc f est non dérivable en 0

74) ce f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^+)$.

EXERCICE 11.

1) $I = \left[\frac{3}{2} ; 3\right]$ $\qquad f(x) = \frac{6}{x+1}$.

a) $f'(x) = -\frac{6}{(x+1)^2} < 0 \Rightarrow f$ est st $\searrow$ sur I.

b) $f \searrow \Rightarrow f(I) = f\left(\left[\frac{3}{2} ; 3\right]\right)$

$$= \left[f(3) ; f\left(\tfrac{3}{2}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{3}{2} ; \frac{12}{5}\right] \subset \left[\frac{3}{2} ; 3\right]$$

c) $g = f \circ f$

$$g(x) = f(f(x))$$

$$= \frac{6}{f(x)+1} = \frac{6}{\frac{6}{x+1}+1} = \frac{6}{\frac{6+x+1}{x+1}} = \frac{6(x+1)}{7+x}.$$

d) f est st $\searrow \Rightarrow g = f \circ f$ est st $\nearrow$ sur I.

e) $g(x) = x \Leftrightarrow \frac{6(x+1)}{x+7} = x$

$$\Leftrightarrow 6(x+1) = x(x+7)$$

$$\Leftrightarrow 6x + 6 = x^2 + 7x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 2$$

$-3 \notin \left[\frac{3}{2} ; 3\right]$ donc 2 est le pt fixe de g.

15)

2) $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

$v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$

a) $u_1 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{12}{5}$

$u_2 = f\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{30}{17}$

$u_3 = f\left(\frac{30}{17}\right) = \frac{102}{47}$

b) $v_{n+1} = u_{2n+2} = g(u_{2n}) = g(v_n)$

$g \nearrow$ donc $(v_n)_n$ est monotone.

$v_1 = u_2 = \frac{30}{17} > v_0$

donc $(v_n)_n$ est $\nearrow$, majorée par 3

d'où $(v_n)_n$ est cv.

Sa limite est un point fixe de g, donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2.$

c) $w_{n+1} = g(w_n)$

$g \nearrow \Rightarrow (w_n)_n$ monotone

$w_1 = u_3 = \frac{102}{47} < w_0$

donc $(w_n)_n \searrow$, minorée par $3/2$

d'où $(w_n)_n$ est convergente.

2c) et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 2.$

$(u_{2n} = v_n)_n$ et $(u_{2n+1} = w_n)_n$ convergent vers la même limite 2.

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

EXERCICE 12.

$$f(t) = \frac{2}{1+e^t}$$

1) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ car f est le quotient et la somme de fcts indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(t) = -\frac{2e^t}{(1+e^t)^2} < 0$$

2)

t	$-\infty$	$+\infty$
f'	$-$	
f	2 ↘	0

3) a) $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^3 \varepsilon(t)$

$$1 + e^t = 2 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^3 \varepsilon(t)$$

Par division selon les puissances croissantes :

$$f(t) = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^3}{24} + t^3 \varepsilon(t)$$

78

5) L'équation de la tangente Δ à $\mathcal{C}_f$ en 0 est :

$$(\Delta) : y = 1 - \frac{t}{2}.$$

$$f(t) - y = \frac{t^3}{24} + t^3 \varepsilon(t) \begin{cases} < 0 & \text{si } t < 0 \\ > 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$\mathcal{C}_f$ est en dessous de (Δ) qd $t < 0$

$\mathcal{C}_f$ est au dessus de (Δ) qd $t > 0$.

4) a) $h(t) = f(t) - 1$.

$$h(-t) = f(-t) - 1$$

$$= \frac{2}{1+e^{-t}} - 1$$

$$= \frac{2 - 1 - e^{-t}}{1 + e^{-t}}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-t}}(e^{t} - 1)}{\cancel{e^{-t}}(e^{t} + 1)}$$

$$= \frac{e^{t} + 1 - 2}{1 + e^{t}}$$

$$= 1 - \frac{2}{1+e^{t}}$$

$$= -\left(\frac{2}{1+e^{t}} - 1\right)$$

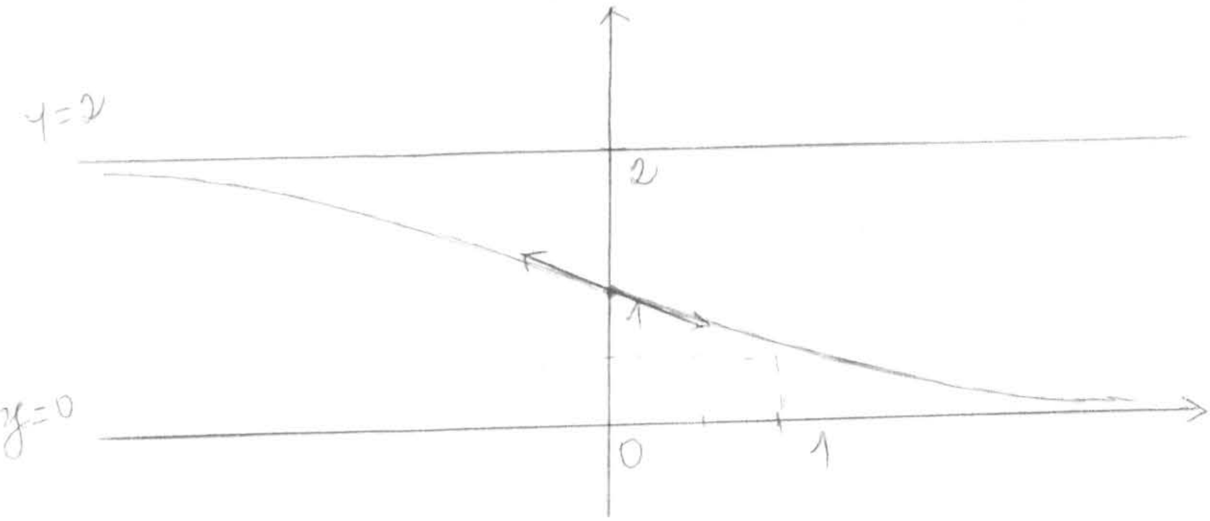
$$= -h(t)$$

donc h est impaire

b) On a $\mathcal{C}_f$ admet un centre de symétrie

$\omega(0\,;1)$.

5)



6) $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Posons $\varphi(t) = f(t) - t$

$$= \frac{2}{e^{t}+1} - t$$

$$= \frac{2-t-te^{t}}{e^{t}+1}.$$

$\lim\limits_{t\to-\infty} \varphi(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = -\infty$

φ continue sur $\mathbb{R}$

T.V.I $\Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R} \ / \ \varphi(\alpha) = 0.$

En plus $\varphi'(t) = \dfrac{-1-e^{2t}}{(1+e^{t})^2} < 0 \Rightarrow \varphi$ st $\searrow$

Donc α est unique / $\varphi(\alpha) = 0$

soit $f(\alpha) = \alpha$

2c)

b) $f'(t) = -\dfrac{2e^t}{(1+e^t)^2}$

$$f''(t) = -2 \cdot \frac{e^t(1+e^t)^2 - e^t \cdot 2e^t \cdot (1\cancel{+e^t})}{(1+e^t)^4}$$

$$= -2 \, \frac{e^t + e^{2t} - 2e^{2t}}{(1+e^t)^3}$$

$$= -2 \, \frac{e^t - e^{2t}}{(1+e^t)^3}$$

$$= +\frac{2e^t(e^t-1)}{(1+e^t)^3} \qquad K=2.$$

c)

t	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'	0	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	0

d) On a $\forall t \in \mathbb{R} \quad -\frac{1}{2} < f'(t) \leq 0$

donc $|f'(t)| \leq \frac{1}{2}$

e) f continue sur $[u_n ; \alpha]$, dérivable sur $]u_n ; \alpha[$

AF $\Rightarrow \exists c \in]u_n ; \alpha[\, / \; f(u_n) - f(\alpha) = (u_n - \alpha) f'(c)$

$\Rightarrow \; u_{n+1} - \alpha = (u_n - \alpha) f'(c)$

$\Rightarrow \; |u_{n+1} - \alpha| = |f'(c)| \, |u_n - \alpha|$

$\Rightarrow \; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

f) • $n=0$ $|u_0-\alpha| = \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0-\alpha|$.

• Supposons que pour n : on a

$$|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$$

On a $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n-\alpha|$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha| = 0$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n-\alpha) = 0$

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

EXERCICE 13

$$f(x) = \arctan \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$$

1) $x \in \mathcal{D}_f \iff x \in \mathcal{D}_{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}$ et $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \in \mathcal{D}_{\arctan} \; (= \mathbb{R})$

$\iff x \in]-\infty; -2[\cup [-1, +\infty[$

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -2[\cup [-1; +\infty[$$

2) Selon la division

$$\frac{1+t}{1+2t} = 1 - t + 2t^2 - 4t^3 + t^3 \varepsilon(t)$$

On sait que $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{u^3}{16} + u^3\varepsilon(u)$

$$u = -t + 2t^2 - 4t^3 \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

$$u^2 = t^2 - 4t^3$$

$$u^3 = -t^3$$

$$\sqrt{\frac{1+t}{1+2t}} = 1 + \frac{1}{2}(-t + 2t^2 - 4t^3) - \frac{1}{8}(t^2 - 4t^3) + \frac{1}{16}(-t^3) + t^3\varepsilon(t)$$

$$= 1 - \frac{t}{2} + \frac{7}{8}t^2 - \frac{23}{16}t^3 + t^3\varepsilon(t)$$

3)

3) On pose $t = \frac{1}{x} \underset{x \mapsto +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $x = \frac{1}{t}$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t}+2}} = \sqrt{\frac{1+t}{1+2t}}$$

$$= 1 - \frac{t}{2} + \frac{7}{8}t^2 - \frac{23}{16}t^3 + t^3 \varepsilon(t)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{23}{16}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

4) $\arctan u = \arctan 1 + \frac{\arctan'(1)}{1!}(u-1) + \frac{\arctan''(1)}{2!}(u-1)^2$

$$+ \frac{\arctan'''(1)}{3!}(u-1)^3 + (u-1)^3 \varepsilon(u-1)$$

$$\arctan u = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(u-1) - \frac{1}{2}(u-1)^2 + \frac{1}{2}(u-1)^3 + (u-1)^3\varepsilon(u-1)$$

5) $\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = \arctan\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{23}{16}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$$u = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{23}{16}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\cdot\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \mapsto +\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$u - 1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{23}{16}\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$(u-1)^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$(u-1)^3 = -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{23}{16}\cdot\frac{1}{x^3}\right)$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{x^3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^3}\right) + \frac{1}{x^3}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{5}{16}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{11}{32}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

6) $y = \frac{\pi}{4}$ asymptote horizontale

$f(x) - y = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ au $\mathcal{V}(+\infty)$

$\mathcal{C}_f$ est en dessous de l'asymptote au $\mathcal{V}(+\infty)$