Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia

16,00

نماذج امتحانات

exemple examens

ANALYSE - 2

CORRIGER

MIP –S1

FSTM COPIE CENTRE

Université Hassan II - F.S.T. Mohammedia
Département de mathématiques - Année 2017 - 2018
Parcours MIP
Partiel Analyse 2 - 31 juin 2018
Responsables : S. Amine, S. Chaira et F. M'Rabet
Durée : 1h45min

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+3x^2+6x+6}{(x+1)(x^2+2x+3)}dx$
2. $\displaystyle\int_4^9 \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x}}dx$

Exercice 2.

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad (1+x)y''-2y'+(1-x)y=(1+x)^3e^x, \quad x\in]-1,+\infty[$$

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(E') \quad (1+x)y'+2xy=(1+x)^3, \quad x\in]-1,+\infty[$$

2. Soit y une solution de (E) et z définie par $y(x)=z(x)e^x$.
   Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z' est solution de (E').
3. Déterminer $z(x)$.
4. En déduire les solutions de (E).

Exercice 3.

1. Discuter la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^a(1+t^b)}$ selon les valeurs des réels a et b.
2. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(t^2)dt$ [On pourra poser $u=t^2$].

Exercice 4.

Dire si la série $\sum u_n$ est convergente ou divergente dans les cas suivants :

1. $u_n=\dfrac{(n+1)^4}{n!+1}; \quad n\geqslant 0$
2. $u_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}; \quad n\geqslant 1$
3. $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}; \quad n\geqslant 2$

Partiel Juin 2018

Ex 1) 1) $(x+1)(x^2+2x+3) = x^3+3x^2+5x+3$

ES

$$\frac{x^3+3x^2+6x+6}{(x+1)(x^2+2x+3)} = \frac{x^3+3x^2+5x+3+x+3}{(x+1)(x^2+2x+3)}$$

$$= 1 + \frac{x+3}{(x+1)(x^2+2x+3)}$$

$$= 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+2x+3}$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} \underset{\substack{x+1=\sqrt{2}t \\ dx=\sqrt{2}\,dt}}{=} \int \frac{\sqrt{2}\,dt}{2t^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan t + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$\int_0^1 \frac{x^3+3x^2+6x+6}{(x+1)(x^3+2x+3)}\,dx = \left[x + \ln|x+1| - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1$$

$$= 1 + \ln 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) $$\int_4^9 \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x}}\,dx \underset{t=\sqrt{x}}{=} \int_2^3 \frac{\ln(t^2-1)}{t}\cdot 2t\,dt$$

$x = t^2$

$dx = 2t\,dt$

$$= 2\int_2^3 \ln(t^2-1)\,dt$$

$u = \ln(t^2-1) \Rightarrow u' = \frac{2t}{t^2-1}$

$v' = 1 \Rightarrow v = t$

$$\overset{IPP}{=} \Big[2t\ln(t^2-1)\Big]_2^3 - 4\int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}\,dt$$

$$= 6\ln 8 - 4\ln 3 - 4\left(\int_2^3 dt + \int_2^3 \frac{dt}{t^2-1}\right)$$

$$= 18\ln 2 - 4\ln 3 - 4 - \frac{4}{2}\left[\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)\right]_2^3$$

$$= 18\ln 2 - 4\ln 3 - 4 - 2\ln 2 + 2\ln 3$$

$$= 16\ln 2 - 2\ln 3 - 4.$$

(4)

Ex 2) : (E) : $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = (1+x)^3 e^x$; $x \in]-1,+\infty[$

1) (E') : $(1+x)y' + 2xy = (1+x)^3$

- Etape 1 : Résolution de l'équation homogène

$$(E'_0) : (1+x)y' + 2xy = 0$$

$$(1+x)\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{-2x}{1+x}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int \frac{x}{1+x}\,dx$$

$$= -2\left(\int dx - \int \frac{dx}{1+x}\right)$$

$$\ln\left(\frac{y_0}{\lambda}\right) = -2x + 2\ln(1+x) \qquad x > -1.$$

$$y_0(x) = \lambda e^{-2x+2\ln(x+1)} = \lambda e^{-2x+\ln(1+x)^2}$$

$$\boxed{y_0(x) = \lambda(1+x)^2 e^{-2x}} \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}$$

- Etape 2 : Variation de la constante

On pose $y_p(x) = \lambda(x)(1+x)^2 e^{-2x}$

$$y_p'(x) = \lambda'(x)(1+x)^2 e^{-2x} + \lambda(x)\left(2(1+x) - 2(1+x)^2\right)e^{-2x}$$

$$y_p'(x) = \lambda'(x)(1+x)^2 e^{-2x} + \lambda(x)(1+x)(-2x)e^{-2x}$$

On introduit dans (E') :

$$\lambda'(x)(1+x)^3 e^{-2x} - 2x\lambda(x)\cancel{(1+x)^2} e^{-2x} + 2x\cancel{\lambda(x)}(1+x)^2 e^{-2x} = (1+x)^3$$

$$\lambda'(x) = \frac{(1+x)^3}{(1+x)^3 e^{-2x}} = e^{2x} \Rightarrow \lambda(x) = \int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}$$

Et $\quad y_P(x) = \frac{e^{2x}}{2}\cdot(1+x)^2\cdot e^{-2x} = \frac{(1+x)^2}{2}$

d'où $\quad y(x) = \lambda(1+x)^2 e^{-2x} + \frac{1}{2}(1+x)^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

2) $\quad y(x) = z(x)\,e^x$

$\quad y'(x) = \left(z'(x) + z(x)\right)e^x$

$\quad y''(x) = \left(z''(x) + 2z'(x) + z(x)\right)e^x$

On introduit dans (E) :

$$(1+x)(z'' + 2z' + z)e^x - 2(z' + z)e^x + (1-x)z\,e^x = (1+x)^3 e^x$$

$$(1+x)z'' + (2+2x-2)z' + (1+x\cancel{-2}+1-x)z = (1+x)^3$$

$$(1+x)z'' + 2x\,z' = (1+x)^3$$

donc z' solution de (E')

3) $\quad z'(x) = \lambda(1+x)^2 e^{-2x} + \frac{1}{2}(1+x)^2$

$$z(x) = \lambda\int(1+x)^2 e^{-2x}\,dx + \frac{1}{2}\int(1+x)^2\,dx$$

$$\boxed{z(x) \overset{IPP}{=} -\frac{\lambda}{4}\left(2x^2+6x+3\right)e^{-2x} + \frac{(1+x)^3}{6} + \mu}$$

4) $y(x) = z(x)\, e^{x}$

$$\boxed{y(x) = -\frac{\lambda}{4}\left(2x^2+6x+3\right)e^{-x} + \frac{1}{6}(1+x)^3 e^{x} + \mu e^{x},}$$
$$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Ex 3) 1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^a(1+t^b)}$

. La fct $t \mapsto \dfrac{1}{t^a(1+t^b)}$ est continue, positive sur $]0,+\infty[$.

. L'intégrale est généralisée en 0 et $+\infty$.

. D'après la relation de Chasles :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^a(1+t^b)} = \int_0^1 \frac{dt}{t^a(1+t^b)} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a(1+t^b)}$$

Au $\mathcal{V}(0)$ $\dfrac{1}{t^a(1+t^b)} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^a}$

Par comparaison à une intégrale de Riemann :

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^a(1+t^b)} \text{ cv si } a < 1.$$

Au $\mathcal{V}(+\infty)$ $\quad \dfrac{1}{t^a(1+t^b)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{a+b}}$

Par comparaison à une intégrale de Riemann :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a(1+t^b)} \quad \text{cv si} \quad a+b>1$$

Cl $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^a(1+t^b)}$ converge si $\boxed{1-b \leq a < 1.}$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt \underset{\substack{u=t^2\\ t=\sqrt{u}\\ dt=\frac{du}{2\sqrt{u}}}}{=\!=\!=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du = \int_0^1 \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du + \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du$

- $\left|\dfrac{\sin u}{2\sqrt{u}}\right| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{u}} = \dfrac{1}{2u^{1/2}}$

Par comparaison à une intégrale de Riemann positive convergente $(\alpha = 1/2 < 1)$; $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\right| du$ cv

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du$ est Abs. conv. Donc converge

- $u \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ positive, décroissante et $\displaystyle\lim_{u\mapsto+\infty} \frac{1}{2\sqrt{u}} = 0$

$\left|\displaystyle\int_1^x \sin u\,du\right| = \left|\left[-\cos u\right]_1^x\right| = |\cos 1 - \cos x| \leq 2$

D'après le thm. d'Abel $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du$ conv.

Cl $\displaystyle\int^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$ converge.

Ex 4) : 1) $U_n = \frac{(n+1)^4}{n!+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+2)^4}{(n+1)!+1} \cdot \frac{n!+1}{(n+1)^4}$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^4 \cdot \frac{n!+1}{(n+1)n!+1}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^4}_{\to 1} \cdot \frac{1+\overbrace{1/n!}^{\to 0}}{n+1+\underbrace{1/n!}_{\to 0}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0 < 1$$

D'après le critère de d'Alembert : $\sum_{n\geq 0} U_n$ converge.

2) $U_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; $n \geq 1$

$$\sqrt[n]{U_n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e^{n\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)} = e^{-1}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \frac{1}{e} < 1$

D'après le critère de Cauchy $\sum_{n\geq 1} U_n$ converge.

3) $U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} > 0$, $n \geq 2$.

$$= \frac{n^2+1-n^2+1}{\sqrt{n^4-1}} = \frac{2}{\sqrt{n^4-1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$$

Par comparaison à une série de Riemann cv ($\alpha = 2 > 1$)

$\sum_{n\geq 2} U_n$ converge

Université Hassan II - F.S.T. Mohammedia
Département de mathématiques - Année 2017 - 2018
Parcours MIP
Partiel Analyse 2 - 28 décembre 2017
Responsables : I. Aounil et S. Chaira

Exercice 1.

1. Calculer sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$:

$$F(t)=\int\frac{dt}{t^3+1}$$

2. Pour quelle valeur du réel p l'intégrale $I_p=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{x+1}dx$ est convergente ?
3. Calculer $I_{\frac{1}{2}}$.
4. Calculer $I_{\frac{1}{3}}$. (On pourra utiliser le changement de variable donné par $x=t^3$).

Exercice 2.
Soit l'équation différentielle :

$$(E)\quad y'=\frac{x+1}{x^2}y-2\frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right).$$

1. En posant le changement de variables : $z=\ln\left(\frac{y}{x}\right)$, montrer que (E) est équivalente à l'équation différentielle :

$$(E')\quad xz'+2z=\frac{1}{x}.$$

2. Résoudre (E').
3. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Exercice 3. Les deux questions sont indépendantes :

1. Dans les équivalences suivantes, préciser les implications vraies, et quand l'implication est fausse, donner un contre-exemple.
   (a) La série $\sum u_n$ est convergente $\Longleftrightarrow$ La suite u_n tend vers 0 ;
   (b) La série $\sum u_n$ est absolument convergente $\Longleftrightarrow$ La série $\sum u_n$ est convergente.
2. Déterminer la nature de chacune des séries numériques $\sum u_n$ suivantes :

$$u_n=\frac{1}{\ln n}\qquad u_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\qquad u_n=\frac{n^3}{n!}\qquad u_n=\frac{\sin n+1}{n^2+n}$$

Partiel Décembre 2017

Ex1) 1) $F(t) = \int \frac{dt}{t^3+1}$

DES $\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{t-2}{t^2-t+1}$

$F(t) = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{3}\int \frac{t-2}{t^2-t+1}\,dt$

$= \frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2t-1-3}{t^2-t+1}\,dt$

$= \frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\int \frac{(t^2-t+1)'}{t^2-t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

$= \frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,du}{\frac{3}{4}u^2+\frac{3}{4}}$ $\quad (t-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}u$

$= \frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan u + C$

$F(t) = \frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

2) $I_p = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1}\,dx$

- La fct $x \mapsto \frac{x^{p-1}}{x+1}$ est continue, positive sur $]0,+\infty[$
- L'intégrale est généralisée en 0 et $+\infty$.
- Chasles $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{x+1}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1}\,dx$

Au $\mathcal{V}(0)$ $\quad \dfrac{x^{p-1}}{x+1} \underset{0}{\sim} \dfrac{x^{p-1}}{1} = \dfrac{1}{x^{1-p}}$

Par comparaison à une intégrale de Riemann,

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{x+1}\,dx \quad \text{converge si} \quad 1-p<1 \;;\; \text{soit } 0<p.$$

Au $\mathcal{V}(+\infty)$ $\quad \dfrac{x^{p-1}}{x+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^{p-1}}{x} = \dfrac{1}{x^{2-p}}$

Par comparaison à une intégrale de Riemann,

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1}\,dx \quad \text{converge si} \quad 2-p>1 \;;\; \text{soit } p<1$$

Cl $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1}\,dx$ converge si $0<p<1$.

3) $\displaystyle I_{\frac{1}{2}} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{-1/2}}{x+1}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} \underset{\substack{t=\sqrt{x}\\ x=t^2\\ dx=2t\,dt}}{=\!=} \int \frac{2t\,dt}{t\,(t^2+1)} = 2\arctan t + C$$

$$I_{\frac{1}{2}} = \lim_{X\mapsto+\infty} \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \lim_{X\mapsto+\infty} \big(F(X)-F(0)\big)$$

$$= \lim_{X\mapsto+\infty} 2\,(\arctan X - \arctan 0) \Rightarrow \boxed{I_{\frac{1}{2}} = \pi}$$

4) $I_{\frac{1}{3}} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{-2/3}}{x+1}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{2/3}(x+1)}$

$x = t^3 \Rightarrow t = x^{1/3}$

$dx = 3t^2\,dt$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{3\cancel{t^2}\,dt}{\cancel{t^2}(t^3+1)}$$

$$= 3\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3+1}$$

$$I_{\frac{1}{3}} = 3 \lim_{x\mapsto+\infty} \int_0^{x} \frac{dt}{t^3+1}$$

$$= 3 \lim_{x\mapsto+\infty} \left(F(x) - F(0)\right)$$

$$= 3 \lim_{x\mapsto+\infty} \left(\frac{1}{3}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$I_{\frac{1}{3}} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\arctan\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

4) $I_{\frac{1}{3}} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{-2/3}}{x+1}\,dx$

$$\underset{\substack{x=t^3\\ t=x^{1/3}\\ dx=3t^2dt}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{3t^2\,dt}{t^2(t^3+1)} = 3\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3+1}$$

$$= -\lim_{X\mapsto 0} F(X) + \lim_{Y\mapsto +\infty} F(Y)$$

$$= -\lim_{X\mapsto 0}\left(\ln|X+1| - \frac{1}{2}\ln(X^2+X+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2X-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$+\lim_{X\mapsto +\infty}\left(\ln\left(\frac{|X+1|}{\sqrt{X^2-X+1}}\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2Y-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_{1/3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$$

Ex 2) : (E) : $y' = \frac{x+1}{x^2} y - 2\frac{y}{x} \ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

1) $z = \ln\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{y}{x} = e^{z} \Rightarrow y = x e^{z}$

$$y'(x) = e^{z(x)} + x z'(x) e^{z(x)}$$

(E) $\Leftrightarrow e^{z}(1 + x z') = \frac{x+1}{x^2} \cdot x e^{z} - 2 e^{z} \ln(e^{z})$

$\Leftrightarrow \cancel{1} + x z' = \frac{x+1}{x} - 2z = \cancel{1} + \frac{1}{x} - 2z$

$\Leftrightarrow x z' + 2z = \frac{1}{x}$ (E')

2) • Etape 1 : Résolution de l'équation homogène

$$(E'_0) \quad x z' + 2z = 0$$

$$x \frac{dz}{dx} = -2z$$

$$\frac{dz}{z} = -2\frac{dx}{x} \qquad \left(\frac{du}{u} = \alpha \frac{dv}{v} \Rightarrow u = \lambda |v|^{\alpha}\right)$$

$$z_0(x) = \frac{\lambda}{x^2}$$

• Etape 2 : Variation de la constante

$z_p(x) = \frac{\lambda(x)}{x^2} \Rightarrow z_p'(x) = \frac{\lambda'(x) x^2 - 2x \lambda(x)}{x^4}$

On introduit dans (E') :

$$x\left(\frac{\lambda'(x) x^2 - 2x\lambda(x)}{x^4}\right) + 2\frac{\lambda(x)}{x^2} = \frac{1}{x}$$

$\dfrac{\lambda'(x)}{x} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \lambda'(x) = 1 \Rightarrow \lambda(x) = \int dx = x$

$z_p(x) = \dfrac{\lambda(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x}$

Cl $\quad z(x) = \dfrac{\lambda}{x^2} + \dfrac{1}{x} \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$

3) $\boxed{y(x) = x\, e^{z(x)} = x\, e^{\frac{\lambda + x}{x^2}} \quad ; \lambda \in \mathbb{R}}$

Ex3) 1) a) $\sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0$

$u_n \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0 \not\Rightarrow \sum u_n$ cv

C.Exp

Série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge,

pourtant $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n} = 0.$

b) $\sum u_n$ Abs. Cv $\Rightarrow \sum u_n$ cv

$\sum u_n$ cv $\not\Rightarrow \sum u_n$ Abs. Cv

C.Exp $\quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$|u_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ div $(\alpha = \frac{1}{2} \not> 1) \Rightarrow \sum u_n$ n'est pas Abs. Cv

Pourtant $\sum u_n$ cv D'après le CSSA.

2) a) $U_n = \dfrac{1}{\ln n} = \dfrac{1}{n^0 (\ln n)^1}$

C'est une intégrale de Bertrand divergente. ($\alpha = 0$ et $\beta = 1$)

b) $U_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} > 0$

$$\sqrt[n]{U_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e^{-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \frac{1}{e} < 1$$

D'après le critère de Cauchy $\sum_{n\geq 1} U_n$ cv

c) $U_n = \dfrac{n^3}{n!} > 0$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3} = \frac{(n+1)^3}{(n+1) \cdot n^3} = \frac{(n+1)^2}{n^3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = 0 < 1$$

D'après le critère de d'Alembert $\sum U_n$ cv

d) $U_n = \dfrac{\sin n + 1}{n^2+n} > 0$

$$\sin n + 1 \leq 2 \Rightarrow \frac{\sin n + 1}{n^2+n} \leq \frac{2}{n^2+n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann cv

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} U_n$ converge.

Part. Déc 2017

Université Hassan II - F.S.T. Mohammedia
Département de mathématiques - Année 2016 - 2017
Parcours MIP
Partiel Analyse 2 - 22 mai 2017
Responsables : S. Amine et S. Chaira

Exercice 1.

Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $R(t) = \dfrac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)}$.
2. Montrer, en utilisant un changement de variables approprié, que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)}dt$.
3. Calculer alors la valeur de I.

Exercice 2.

(A) On considère l'équation différentielle (E_1) : $xy' - y = \ln x$, définie sur $\mathbb{R}^{*+}$.

1. (a) Résoudre l'équation homogène associée.
   (b) Déterminer une solution particulière de l'équation complète.
   (c) Exprimer l'ensemble des solutions de l'équation (E_1).
2. Préciser la solution f de (E_1) telle que $f(1) = 0$.

(B) On considère l'équation différentielle (E_2) : $x^2y'' - xy' + y = 1 - \ln x$, définie sur $\mathbb{R}^{*+}$.

1. (a) Déterminer une solution de l'**équation homogène associée**, de la forme $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (b) Déterminer **TOUTES** les solution de l'**équation homogène** associée en les cherchant sous la forme $x \mapsto K(x)x^\alpha$, en donnant à $\alpha = 1$ et en établissant que : $xK''(x) + K'(x) = 0$.
   ***Attention** : dans cette question on travaille toujours avec l'équation homogène!!!*
2. (a) Vérifier que la fonction y_p définie par $y_p(x) = -1 - \ln x$ est une solution particulière de l'équation (E_2).
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E_2).
3. Démontrer que la fonction f (définie à la question A) 2.) est l'unique solution de (E_2) telle que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$.

Exercice 3.

Soit la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$.

1. Calculer l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)dt$ et en déduire sa nature.
2. Déterminer le tableau de variation de f.
3. Citer la proposition du cours concernant la comparaison d'une série à une intégrale généralisée.
4. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.
5. Généraliser le résultat en déterminant la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$, où $\beta > 1$.

(17)

Partiel Mai 2017

Ex1) Soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}\, dx$

1) $R(t) = \dfrac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)} = \dfrac{a}{1+t} + \dfrac{b}{(1+t)^2} + \dfrac{ct+d}{1+t^2}$ $\quad \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}$

$$R(t) = -\frac{2}{(1+t)^2} + \frac{2}{1+t^2}$$

2) On pose $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$ $\qquad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$

$$I = \int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$I = \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2+2t} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$I = \int_0^1 \frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)}$$

$$I = -2\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} + 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$I = \left[\frac{2}{1+t} + 2\arctan t\right]_0^1 = 1 + 2\cdot\frac{\pi}{4} - 2.$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{2} - 1}$$

Ex 2) A) (E_1) : $xy' - y = \ln x$ $\quad \mathbb{R}^{*+}$

1) a) $(E_{1,0})$: $xy' - y = 0$

$$x \frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$y_0(x) = \lambda x \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Solution particulière :

On pose $y_p(x) = \lambda(x)\, x$

$$y_p'(x) = \lambda'(x)\, x + \lambda(x)$$

On introduit dans (E') :

$$x^2 \lambda'(x) + \cancel{x\lambda(x)} - \cancel{x\lambda(x)} = \ln x$$

$$\lambda'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$\lambda(x) = \int \frac{\ln x}{x^2}\, dx \overset{IPP}{=\!=} -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$y_p(x) = -\ln x - 1.$$

c) $y(x) = \lambda x - \ln x - 1 \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$

2) $f(1) = 0 \Rightarrow \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$

$$\boxed{f(x) = x - \ln x - 1}$$

B) (E_2) : $x^2 y'' - x y' + y = 1 - \ln x$ $\mathbb{R}^{*+}$

1) a) (E_{2_0}) : $x^2 y'' - x y' + y = 0$

$y_0(x) = x^\alpha \Rightarrow y_0'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

$y_0''(x) = \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2}$

(E_{2_0}) : $x^2 . \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} - x . \alpha x^{\alpha-1} + x^\alpha = 0$

$\alpha(\alpha-1) x^\alpha - \alpha x^\alpha + x^\alpha = 0$

$(\alpha^2 - \alpha - \alpha + 1) x^\alpha = 0$

$(\alpha - 2\alpha + 1) x^\alpha = 0$

$(\alpha - 1)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1.$

donc $y_0(x) = x.$

b) $y_0(x) = x K(x)$

$y_0'(x) = K(x) + x K'(x)$

$y_0''(x) = 2K'(x) + x K''(x)$

(E_{2_0}): $2x^2 K'(x) + x^3 K''(x) - x \cancel{K(x)} - x^2 K'(x) + x \cancel{K(x)} = 0$

$x^3 K''(x) + x^2 K'(x) = 0$

$x K''(x) + K'(x) = 0$

$x \dfrac{dK'}{dx} = -K'(x)$

$\dfrac{dK'}{K'} = -\dfrac{dx}{x} \Rightarrow K'(x) = \dfrac{\lambda}{x}$

Part Mai 2017

$K(x) = \lambda \int \frac{dx}{x} = \lambda \ln x + \mu$

$y_0(x) = K(x) \cdot x = \lambda x \ln x + \mu x$

2) a) $y_p(x) = -1 - \ln x$

$y_p'(x) = -\frac{1}{x}$

$y_p''(x) = \frac{1}{x^2}$

$x^2 y_p'' - x y_p' + y_p = x^2 \frac{1}{x^2} - x\left(-\frac{1}{x}\right) - 1 - \ln x = 1 - \ln x$

donc $y_p = -1 - \ln x$ est solution particulière de (E_2)

b) $y(x) = (\lambda \ln x + \mu)x + 1 - \ln x \; ; \; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

3) $y'(x) = \frac{\lambda}{x} \cdot x + \lambda \ln x + \mu - \frac{1}{x} = \lambda + \lambda \ln x + \mu - \frac{1}{x}$

$y(1) = 0 \Rightarrow \mu - 1 = 0 \Rightarrow \mu = 1.$

$y'(1) = 0 \Rightarrow \lambda + \mu - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\mu + 1 = 0.$

$f(x) = x - 1 - \ln x.$

Ex 3) : $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$ définie sur $[2,+\infty[$.

1) $F(t) = \displaystyle\int \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{(\ln t)^2} = \int \frac{(\ln t)'}{(\ln t)^2}\, dt$

$$F(t) = -\frac{1}{\ln t} + C$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \lim_{X \mapsto +\infty} \int_2^{X} \frac{dt}{t(\ln t)^2}$$

$$= \lim_{X \mapsto +\infty} \left(F(X) - F(2)\right)$$

$$= \lim_{X \mapsto +\infty} \left(-\underbrace{\frac{1}{\ln X}}_{\to 0} + \frac{1}{\ln 2}\right)$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2} \text{ converge.}$$

2) $f'(t) = -2\dfrac{\left(t(\ln t)^2\right)'}{\left(t(\ln t)^2\right)^3} = -2\dfrac{(\ln t)^2 + t \cdot 2 \cdot \ln t \cdot \frac{1}{t}}{t^3(\ln t)^6}$

$$= -2\frac{\ln t + 2}{t^3(\ln t)^5} < 0 \qquad t \in [2,+\infty[$$

f fct positive et décroissante sur $[2,+\infty[$

donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 2} f(n)$ ont la même nature

$\displaystyle\sum_{n\geq 2} f(n) = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ cv (Bertrand $\alpha = 1$, $\beta = 2 > 1$)

donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2}$ converge.

Part. Mai 2017

5) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ cv $(\beta > 1)$

donc $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$ converge où $\beta > 1$.

23

Université Hassan II - F.S.T. Mohammedia
Département de mathématiques - Année 2016 - 2017
Parcours MIP
Partiel Analyse 2 - 4 Janvier 2017
Responsables : I. Aounil, A. Balayadi et S. Chaira

Exercice 1.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{x^n}{\sqrt{n+1}}$.

1. Calculer la limite de la suite de terme général u_n quand $|x| > 1$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.
2. Montrer que si $|x| < 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
3. Etudier la convergence et l'absolue convergence de la série $\sum u_n$ quand $x = 1$ et quand $x = -1$.

Exercice 2.

Soit $I =]1, +\infty[$. On désigne par f la fonction définie sur I par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{(t-1)^2} dt.$$

On ne cherchera pas à exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

1. Déterminer le signe de $f(x)$.
2. Justifier la dérivabilité de f sur I, et montrer que pour tout $x \in I$:
$$f'(x) = -\frac{\ln x}{(x+1)^2}.$$
3. En déduire le sens de variation de f sur I.
4. Sachant que pour tout $t \in I$:
$$t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln t < t - 1,$$
calculer $\lim\limits_{x \mapsto 1^+} f(x)$.

Exercice 3.

1. Soit $p > 0$ un paramètre fixé.
Montrer (sans calculer) que l'intégrale
$$I = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dx}{(e^x - 1)^p}$$
converge.
2. A l'aide du changement de variable $t = \sqrt{e^x - 1}$, calculer une primitive de la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}.$$
3. En déduire la valeur de $I_{\frac{1}{2}}$.

Exercice 4.

1. Résoudre l'équation différentielle :
$$(e^x + 1)y' - y = \frac{e^x}{1 + x^2} \qquad (E)$$
2. Donner la solution $y(x)$ telle que $y(0) = -\frac{\pi}{4}$.
3. Quelle est la limite de $y(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

Partiel Janvier 2017

Ex1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n = \dfrac{x^n}{\sqrt{n+1}}$

1) $|x| > 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \text{ou} \\ x < -1. \end{cases}$

$x > 1$ $\quad U_n = \dfrac{x^n}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{e^{n \ln x}}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \quad (\ln x > 0.)$

$x < -1$; $x = -\alpha$, $\alpha > 0$ $\quad U_n = \dfrac{x^n}{\sqrt{n+1}} = (-1)^n \dfrac{\alpha^n}{\sqrt{n+1}}$ n'a pas de limite

Dans les deux cas $U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \infty$

donc $\sum_{n \geq 0} U_n$ diverge grossièrement.

2) $|x| < 1$; $|U_n| = \dfrac{|x|^n}{\sqrt{n+1}} > 0$

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{|x|^n} = |x| \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} |x| < 1$$

donc $\sum |U_n|$ conv

Par suite $\sum U_n$ converge absolument.

3) • $x=1$; $U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$

Par comparaison à une série de Riemann div ($\alpha = \frac{1}{2} \ngtr 1$)

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{ diverge.}$$

$x=-1$: $U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

$v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ suite positive, décroissante et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$

D'après le C.S.S.A $\sum_{n\geq 1} U_n$ converge.

Ex 2) $I =]1;+\infty[$; $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{(t-1)^2}\, dt$

1) $\forall x \in I$ $x \leq x^2$

$1 < x \leq t \implies \left.\begin{array}{l} \ln t > 0 \\ (t-1)^2 > 0 \end{array}\right\} \implies \frac{\ln t}{(t-1)^2} > 0$

donc $\forall x \in I$ $f(x) > 0$.

2) La fct $t \mapsto \frac{\ln t}{(t-1)^2}$ continue sur I

Les fcts $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ dérivables sur I.

donc f est dérivable sur I.

$$f'(x) = \frac{\ln x^2}{(x^2-1)^2} \cdot 2x - \frac{\ln x}{(x-1)^2} \cdot 1.$$

$$= \frac{2\ln x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} - \frac{\ln x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{\ln x}{(x^2-1)^2}\left(4x - (x+1)^2\right)$$

$$= \frac{\ln x}{(x^2-1)^2}\left(4x - x^2 - 2x - 1\right)$$

$$= -\frac{\ln x}{(x^2-1)^2}\left(x^2 - 2x + 1\right)$$

$$= -\frac{\ln x \cdot (x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{\ln x}{(x+1)^2}$$

3) $f'(x) < 0$ sur I.

donc f est strictement décroissante.

4) $\forall t \in I$ $\quad t-1-\frac{(t-1)^2}{2} < \ln t < t-1$

$$\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} < \frac{\ln t}{(t-1)^2} < \frac{1}{t-1} \quad \left((t-1)^2 > 0\right)$$

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int_x^{x^2} dt < \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{(t-1)^2}\, dt < \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$$

$$\left[\ln(t-1)\right]_x^{x^2} - \left[\frac{t}{2}\right]_x^{x^2} < f(x) < \left[\ln(t-1)\right]_x^{x^2}$$

$$\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) - \frac{x^2-x}{2} < f(x) < \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$$

$$\ln(x+1) - \frac{x^2-x}{2} < f(x) < \ln(x+1)$$

$$\lim_{x \mapsto 1^+} \ln(x+1) - \frac{x^2-x}{2} = \ln 2$$

$$\lim_{x \mapsto 1^+} \ln(x+1) = \ln 2$$

D'après le th. des gendarmes : $\lim_{x \mapsto 1^+} f(x) = \ln 2.$

Ex 3) 1) Soit $p > 0$ fixé

$$I = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dx}{(e^x-1)^p}$$

La fct $x \longmapsto \frac{1}{(e^x-1)^p}$ est continue, positive sur $[\ln 2, +\infty[$

Au $V(+\infty)$ $\frac{1}{(e^x-1)^p} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e^{px}}$

et $x^2 \cdot \frac{1}{e^{px}} = \frac{x^2}{e^{px}} \xrightarrow[x \mapsto +\infty]{} 0$ $(p > 0)$

$\alpha = 2 > 1$

donc $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dx}{e^{px}}$ cv

Par suite $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dx}{(e^x-1)^p}$ converge

2) $F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} \underset{t=\sqrt{e^x-1}}{=\!=\!=} \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2t\,dt}{t^2+1} = 2\int \frac{dt}{t^2+1}$

$e^x - 1 = t^2$

$e^x = t^2 + 1 \qquad\qquad = 2\arctan t + C$

$x = \ln(t^2+1)$

$dx = \frac{2t\,dt}{t^2+1}$

$$F(x) = 2\arctan\sqrt{e^x-1} + C$$

3) $I_{\frac{1}{2}} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

$= \lim_{x \mapsto +\infty} \int_{\ln 2}^{x} f(x)\,dx$

$= \lim_{x \mapsto +\infty} \left(F(x) - F(\ln 2)\right)$

$= \lim_{x \mapsto +\infty} 2\left(\arctan\sqrt{e^x-1} - \arctan 1\right)$

$= 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{I_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}}$$

Ex 4) : 1) $(e^x+1)y' - y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ (E)

. Etape 1 : Résolution de l'équation homogène (E₀)

$$(e^x+1)y' - y = 0$$

$$(e^x+1)\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = -\frac{d(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}$$

$$y_0(x) = \frac{\lambda}{1+e^{-x}} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

. Etape 2 : Variation de la constante.

$$y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{1+e^{-x}}$$

$$y_p'(x) = \frac{\lambda'(x)(1+e^{-x}) + e^{-x}\lambda(x)}{(1+e^{-x})^2} = \frac{\lambda'(x)}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\lambda(x)$$

On introduit dans (E) :

$$(e^x+1)\left(\frac{e^x}{1+e^x}\lambda'(x) + \frac{\cancel{e^x}}{(1+e^x)^{2}}\lambda(x)\right) - \frac{e^x\cancel{\lambda(x)}}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+x^2}$$

$$e^x\lambda'(x) = \frac{e^x}{1+x^2} \Rightarrow \lambda'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \lambda(x) = \arctan x$$

$$y_p(x) = \frac{\arctan x}{1+e^{-x}}$$

cl $\quad y(x) = \dfrac{\lambda + \arctan x}{1+e^{-x}} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Part Janv 2017

2) $y(0) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\lambda}{2} = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \lambda = -\frac{\pi}{2}.$

$$y(x) = \frac{-\pi/2 + \arctan x}{1 + e^{-x}}$$

3) $$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\pi/2 + \arctan x}{1 + e^{-x}} = 0.$$

Université Hassan II - F.S.T. Mohammedia
Département de mathématiques - Année 2015 - 2016
Parcours MIP
Partiel Analyse 2 - 7 Janvier 2016
Responsables : A. Balayadi et S. Chaira

Exercice 1.

1. Etudier la convergence de la série de terme général donné pour tout $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \frac{1}{n + \sqrt[3]{n^2}}$$

2. Etudier la convergence de la série de terme général donné pour tout $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^2}$$

3. Etudier la convergence de la série : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 3} \frac{(-1)^n}{n + 2\sin(n^3)}$

Exercice 2.
Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1 - x^2)}{x^2}$.

1. Montrer que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ converge.
2. Soit $0 < a < b < 1$. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 3.
Calculer l'intégrale suivante après avoir établi sa convergence :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1 + t^2)^2} dt$$

Exercice 4.

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} + y^2(x) \ln x = 0$$

pour $x \in]0, +\infty[$ avec la condition $y(1) = 1$.

2. Résoudre l'équation différentielle :

$$6y'' - 7y' + 2y = xe^{\frac{x}{2}}$$

Partiel Janvier 2016

Ex 1) 1) $U_n = \dfrac{1}{n+\sqrt[3]{n^2}} > 0 \quad \forall n \geq 1$

$$U_n = \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Par comparaison à une série harmonique, $\sum_{n\geq 1} U_n$ div

2) $$U_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^2} > 0$$

$$\sqrt[n]{U_n} = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e^{-\frac{n}{\sqrt{n}}} = e^{-\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}} = 0 < 1$$

D'après le critère de Cauchy, $\sum_{n\geq 1} U_n$ converge

3) $$U_n = \frac{(-1)^n}{n+2\sin(n^3)}$$

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+2\frac{\sin n^3}{n}}\right)$$

Ex 2) $f(x) = \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2}$, sur $]0,1[$

1) . La fct $x \mapsto \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2}$ continue, négative sur $]0,1[$

. L'intégrale est généralisée en 0 et 1.

. Charles : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx + \int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx$

Au $\mathcal{V}(0)$ $\dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2} \xrightarrow[x\mapsto 0]{} -1.$

donc f est prolongeable par continuité sur $[0,1]$

Par suite $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx$ converge.

Au $\mathcal{V}(1)$ $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx = \int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-x)}{x^2}\,dx + \int_{1/2}^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx$

$$\int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-x)}{x^2}\,dx \underset{\substack{t=1-x\\x=1-t\\dx=-dt}}{=} \int_{1/2}^0 \frac{\ln(t)}{(1-t)^2}(-dt) = \int_0^{1/2} \frac{\ln t}{(1-t)^2}\,dt$$

. $\dfrac{\ln t}{(1-t)^2} \underset{0}{\sim} \ln t = \dfrac{1}{t^0(\ln t)^{-1}}$

Par comparaison à une intégrale de Bertrand en

$\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx$ converge

Cl $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx$ converge.

Part. Janv 2016

2) $0 < a < b < 1$

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

$u = \ln(1-x^2) \Rightarrow u' = \frac{-2x}{1-x^2}$

$$= \int \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx$$

$v' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$

$$\underset{\text{IPP}}{=} -\frac{\ln(1-x^2)}{x} + 2\int \frac{dx}{1-x^2}$$

$$= -\frac{\ln(1-x^2)}{x} + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + C$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$= -\frac{\ln(1-b^2)}{b} + \ln\left(\frac{1-b}{1+b}\right) + \frac{\ln(1-a^2)}{a} - \ln\left(\frac{1-a}{1+a}\right).$$

3) $$I = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{1/2} f(x)\,dx + \int_{1/2}^1 f(x)\,dx$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \int_x^{1/2} f(x)\,dx + \lim_{y \to 1} \int_{1/2}^{y} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(F(1/2) - F(x)\right) + \lim_{y \to 1} \left(F(y) - F(1/2)\right)$$

$$= -\lim_{x \to 0^+} F(x) + \lim_{y \to 1} F(y).$$

$$= + \lim_{x\mapsto 0^+}\left(\frac{\cancel{\ln(1-x^2)}^{\to 0}}{x} + \ln\left(\cancel{\frac{1-x}{1+x}}^{\to 0}\right)\right)$$

$$+ \lim_{y\mapsto 1}\left(-\frac{\ln(1-y^2)}{y} + \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right)\right)$$

$+\infty - \infty$ FI

$$-\frac{\ln(1-y^2)}{y} + \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) = -\frac{\ln(1-y)-\ln(1+y)}{y} + \ln(1-y) - \ln(1+y)$$

$$= -\ln(1-y)\left(\frac{1}{y}-1\right) - \frac{\ln(1+y)}{y} - \ln(1+y)$$

$$= + \frac{\cancel{\ln(1-y)(1-y)}^{\to 0}}{y} - \frac{\ln(1+y)}{y} - \ln(1+y)$$

$$\xrightarrow[y\mapsto 1]{} -\ln 2.$$

donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = -\ln 2.$

Ex 3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt$

· ~~La~~ Chasles : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt$

Au $\mathcal{V}(0)$ $\displaystyle\lim_{t\mapsto 0} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2} = 0$

donc la fct est prolongeable par continuité en 0

par suite $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt$ converge

Au $\mathcal{V}(+\infty)$ $\quad \dfrac{t\ln t}{(1+t^2)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t\ln t}{t^4} = \dfrac{1}{t^3(\ln t)^{-1}}$

Par comparaison à une intégrale de Bertrand conv

$$\int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt \quad \text{conv}$$

$\underline{\text{Cl}}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt$ converge.

. Calcul $\quad F(t) = \displaystyle\int \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt \qquad u=\ln t \Rightarrow u' = \frac{dt}{t}$

$$v' = \frac{t}{(1+t^2)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{2(1+t^2)}$$

$$= -\frac{\ln t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(1+t^2)}$$

$$= -\frac{\ln t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$= -\frac{\ln t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{4}\ln(1+t^2) + C$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$= \lim_{x\mapsto 0}\left(F(1) - F(x)\right) + \lim_{y\mapsto+\infty}\left(F(y) - F(1)\right)$$

$$= \lim_{x\mapsto 0} F(x) + \lim_{y\mapsto+\infty} F(y).$$

$$\lim_{x\mapsto 0} F(x) = \lim_{x\mapsto 0}\left(\frac{-\ln x}{2(1-x^2)} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(1+x^2)\right)$$

$$= \lim_{x\mapsto 0}\left(\frac{x^2\ln x}{2(1-x^2)} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2)\right)$$

$$= 0.$$

$$\lim_{y\mapsto+\infty} F(y) = \lim_{y\mapsto \infty}\left(\frac{-\ln y}{2(1-y^2)} + \frac{1}{2}\ln y - \frac{1}{4}\ln(1+x^2)\right)$$

$$= \lim_{y\mapsto+\infty}\left(\frac{-\ln y}{2(1-y^2)} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)\right)$$

$$= 0.$$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt = 0.$

Ex4) 1) $\quad y'(x) + \frac{y(x)}{x} + y^2\ln x = 0 \quad (B) \qquad \alpha = 2$

$(B)\times y^{-2}$: $\quad y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} + \ln x = 0$

On pose $\quad z(x) = y^{-1}(x) \quad \Rightarrow \quad z'(x) = -y^{-2}(x)\,y'(x)$

$$-z' + \frac{1}{x}z + \ln x = 0$$

$$z' - \frac{1}{x}z = \ln x \qquad (E)$$

C'est une équation linéaire d'ordre 1 en z.

Etape 1 : Résolution de l'équation homogène

$$z' - \frac{z}{x} = 0 \quad (E_0)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow z_0(x) = \lambda x \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Etape 2 : Variation de la constante

$$z_p(x) = \lambda(x)\, x$$

$$z'_p(x) = \lambda'(x)\, x + \lambda(x)$$

$$(E) : \quad \lambda'(x)\, x + \lambda(x) - \lambda(x) = \ln x$$

$$\lambda'(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\lambda(x) = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int \ln x \cdot (\ln x)'\, dx$$

$$\lambda(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

$$z_p(x) = \frac{1}{2}\, x \cdot (\ln x)^2$$

$$z(x) = \lambda x + \frac{x}{2}(\ln x)^2 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = z^{-1}(x) = \frac{1}{z(x)}$$

$$y(x) = \frac{2}{2\lambda x + x(\ln x)^2} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Part Janv 2016

CI : $y(1)=1 \Rightarrow \frac{2}{2\lambda}=1 \Rightarrow \lambda=1$

$$y(x)=\frac{2}{2x+x(\ln(x))^2}$$

2) $$6y''-7y'+2y=xe^{\frac{x}{2}} \quad (E)$$

Etape 1 : Résolution de l'équation homogène

$$6y''-7y'+2y=0$$

dont $P(r)=6r^2-7r+2=0$ admet $r_1=\frac{1}{2}$ et $r_2=\frac{1}{3}$ sol.

$$y_0(x)=C_1 e^{\frac{x}{2}}+C_2 e^{\frac{x}{3}}$$

Etape 2 : Solution particulière

$$f(x)=e^{\alpha x}.R(x) \qquad \begin{cases}\alpha=1/2\\ R(x)=x \rightarrow d^\circ R=1\end{cases}$$

$$y_p(x)=e^{x/2}.x^s.Q(x) \qquad d^\circ Q=1.$$

$P(\alpha)=P(\frac{1}{2})=0$ et $P'(\frac{1}{2})\neq 0 \Rightarrow s=1$

$$y_p(x)=e^{\frac{x}{2}}.x.(ax+b)=e^{\frac{x}{2}}(ax^2+bx)$$

$$y_p'(x)=e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{a}{2}x^2+\frac{b}{2}x+2ax+b\right)$$

$$y_p''(x)=e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{a}{4}x^2+\frac{b}{4}x+ax+\frac{b}{2}+ax+\frac{b}{2}+2a\right)$$

$$=e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{a}{4}x^2+\left(2a+\frac{b}{4}\right)x+2a+b\right)$$

On introduit dans (E) :

$$e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{3a}{2}x^2+6\left(2a+\frac{b}{4}\right)x+12a+6b \right.$$
$$\left. -\frac{7}{2}a x^2-7\left(2a+\frac{b}{2}\right)x-7b+2ax^2+2bx\right)=x\,e^{\frac{x}{2}}$$

$$-2a x + 12a - b = x$$

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ 12a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 12a = -6 \end{cases}$$

$$y_p(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}x^2-6x\right)$$

$$\text{cl}\quad y(x) = C_1\, e^{\frac{x}{2}} + C_2\, e^{\frac{x}{3}} + e^{x}\left(-\frac{x^2}{2}-6x\right).$$
$$(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Université Hassan II - F.S.T. Mohammedia
Département de mathématiques - Année 2016 - 2017
MIP - Module M112
Rattrapage
Responsables : S. Amine et S. CHAIRA

Pensez à éteindre votre téléphone portable.

Commencez par les questions qui vous semblent les plus faciles. **Soignez la présentation et encadrez vos résultats.** la qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation : justifiez vos réponses, mettez les bons connecteurs logiques, ...

Exercice 1. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^2(x^2+1)}.$$

1. Trouver trois réels a, b et c tels que :
$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}.$$
2. Calculer une primitive $F(x) = \int f(x)\, dx$.
3. Intégrer l'équation différentielle linéaire :
$$(x^2+1)y' - 2(x + \frac{1}{x})y = 2x^3 - 1.$$

Exercice 2.
Pour quelle valeur du paramètre réel strictement positif α, l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{\tan t - t}{t^\alpha \sin t} dt$$

est convergente ?

Exercice 3.

1. Préciser la nature de la série :
$$\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$
2. Préciser la nature de la série :
$$\sum_{n\geqslant 1} \ln(n \sin \frac{1}{n}).$$
3. La série numérique :
$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}$$
est-elle convergente ? Est-elle absolument convergente ?

Bon courage

Rattrapage Juin 2017

Ex 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan t - t}{t^\alpha \sin t}\,dt$

DL$_3(0)$: $\tan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$

$$\frac{\tan t - t}{t^\alpha \sin t} = \frac{-\frac{t^3}{3} + o(t^3)}{t^\alpha\left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right)} = \frac{-\frac{t^3}{3} + o(t^3)}{t^{\alpha+1}\left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)}$$

$$= -\frac{1}{3t^{\alpha-2}} \cdot \frac{1 + o(1)}{1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)}$$

$$= -\frac{1}{3t^{\alpha-2}} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)$$

$\displaystyle\int \frac{dt}{t^{\alpha-2}}$ cv si $\alpha - 2 < 1$ soit $\alpha < 3$.

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan t - t}{t^\alpha \sin t}\,dt$ conv si $\alpha < 3$.

Université Hassan II - F.S.T. Mohammedia
Département de mathématiques - Année 2017 - 2018
MIP - Module M112
Rattrapage
Responsables : S. AMINE, S. CHAIRA et F. M'RABET

Pensez à éteindre votre téléphone portable.

Commencez par les questions qui vous semblent les plus faciles. **Soignez la présentation et encadrez vos résultats.** la qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation : justifiez vos réponses, mettez les bons connecteurs logiques, ...

Exercice 1.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $\dfrac{1}{x(1+x^2)}$.
2. Déterminer sur $]0, +\infty[$
$$I = \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx.$$
3. En déduire
$$I_0 = \int_{1/2}^{1} \frac{\arctan x}{x^2} dx.$$

Exercice 2.

On considère l'équation différentielle linéaire :
$$y'' + 2y' + 4y = xe^x. \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).
3. Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.

Exercice 3.

Pour quelle valeur du paramètre réel strictement positif α, l'intégrale généralisée
$$\int_0^1 \frac{\tan t - t}{t^\alpha \sin t} dt$$
est convergente ?

Exercice 4.

La série numérique :
$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n} + 1)}$$
est-elle convergente ? est-elle absolument convergente ?

Bon courage

Rattrapage Juin 2018

Ex1)

1) DES

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(1+x^2)}$$

Par identification, on trouve $a=1$, $b=-1$ et $c=0$

donc $$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

2) Calcul de I :

$$I = \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

3) Calcul de I_0 :

On a $$\int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx \overset{IPP}{=} -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$u = \arctan x \Rightarrow u' = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad = -\frac{\arctan x}{x} + \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

$v' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$

$$I_0 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\arctan x}{x}\,dx = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 5 + 2\arctan 2.$$

(45

Université Hassan II - F.S.T. Mohammedia
Département de mathématiques - Année 2015 - 2016
MIP - Module M112
Rattrapage
Responsables : S. Chaira, O. Khadir, F. M'rabet et N. Moussaid

Pensez à éteindre votre téléphone portable.

Commencez par les questions qui vous semblent les plus faciles. **Soignez la présentation et encadrez vos résultats.** La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation : justifiez vos réponses, mettez les bons connecteurs logiques, ...

Exercice 1.
Déterminer la nature de l'intégrale généralisée :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 2.
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x^3-1}{x^2(x^2+1)}.$$

1. Trouver trois réels a, b et c tels que :
$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}.$$
2. Calculer une primitive $F(x) = \int f(x)\,dx$.
3. Intégrer l'équation différentielle linéaire :
$$(x^2+1)y' - (2x+\frac{2}{x})y = 2x^3-1.$$

Exercice 3.
1. Préciser la nature de la série :
$$\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$
2. Préciser la nature de la série :
$$\sum_{n\geqslant 1} \ln(n \sin \frac{1}{n}).$$
3. La série numérique :
$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}$$
est-elle convergente ? absolument convergente ?

Rattrapage Juin 2016

Ex 1)
$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

• La fct $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ continue et positive sur $[0,1[$.

• L'intégral est généralisé en 1.

Au $\mathcal{V}(1)$: $\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{(1+x)(1-x)}} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \underset{\substack{t=1-x \\ x=1-t \\ dx=-dt}}{=\!=\!=} \int_1^0 -\frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}}$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ cv $\left(\text{Riemann } \alpha = \frac{1}{2} < 1\right) \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ cv

Par comparaison $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ converge.

Ex 2)
$$f(x) = \frac{2x^3-1}{x^2(x^2+1)}$$

1) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2x+1}{x^2+1}$ $\quad \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 2 \\ d = 1 \end{cases}$

2) $F(x) = \int f(x)\, dx$

$$= -\int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{2x+1}{x^2+1}\, dx$$

$$= -\int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{2x\, dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$F(x) = -\frac{1}{x} + \ln(x^2+1) + \arctan x + C$$

3) $(x^2+1)y' - \left(2x + \frac{2}{x}\right) y = 2x^3 - 1 \quad (E)$

• Etape 1 : Résolution de l'équation homogène (E_0)

$$(x^2+1)y' - \left(2x + \frac{2}{x}\right) y = 0$$

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} = \left(2x + \frac{2}{x}\right) y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x^2+2}{x(x^2+1)}\, dx = 2\frac{dx}{x}$$

$$y_0(x) = \lambda x^2$$

•• Etape 2 : Variation de la constante

$$y_p(x) = \lambda(x) . x^2$$

$$y_p'(x) = \lambda'(x) x^2 + 2x\lambda(x)$$

On introduit dans (E) :

$$(x^2+1)\left(\lambda'(x)\,x^2+2x\lambda(x)\right)-\left(2x+\frac{2}{x}\right)\lambda(x)x^2=2x^3-1$$

$$(x^2+1)x^2\lambda'(x)=2x^3-1$$

$$\lambda'(x)=\frac{2x^3-1}{x^2(x^2+1)}$$

$$\lambda(x)=\int\frac{2x^3-1}{x^2(x^2+1)}\,dx$$

$$\lambda(x)=F(x)=-\frac{1}{x}+\ln(x^2+1)+\arctan x$$

$$y_p(x)=-x+x^2\ln(1+x^2)+x^2\arctan x$$

$$\boxed{y(x)=\lambda x^2-x+x^2\ln(1+x^2)+x^2\arctan x\,;\quad \lambda\in\mathbb{R}.}$$

Ex 3) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n>0$

$\sqrt[n]{U_n}=\frac{n}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ On ne peut pas conclure

$$U_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}=e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\underset{+\infty}{\sim}e^{-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=e^{-1}=\frac{1}{e}\neq 0$$

Donc $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ diverge grossièrement

3

Rat. Juin 2016

2) : $\sum_{n\geq 1} \ln\left(n \sin\frac{1}{n}\right)$

DL au V(∞) $\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$\frac{1}{n} \mapsto 0$.

$$n \sin\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln\left(n \sin\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \cancel{1} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison à une série de Riemann cv $(\alpha = 2 > 1)$

$\sum_{n\geq 1} \ln\left(n \sin\frac{1}{n}\right)$ converge.

3) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}$

• Convergence simple :

La suite $\left(\frac{1}{\ln(\sqrt{n}+1)}\right)_n$ est positive décroissante et

$$\lim_{n\mapsto +\infty} \frac{1}{\ln(\sqrt{n}+1)} = 0.$$

D'après le C.S.S.A $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

• Convergence absolue

$$|u_n| = \frac{1}{\ln(\sqrt{n}+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln\sqrt{n}} = \frac{2}{\ln n}$$

Par comparaison à une intégrale de Bertrand div

$\sum |u_n|$ div $\Rightarrow$ $\sum u_n$ n'est pas Abs. Cv (4)

Université Hassan II - F.S.T. Mohammedia
Département de mathématiques - Année 2015 - 2016
MIP - Module M112
Rattrapage - Durée 1 H 30
Responsables : A. BALAYADI et S. CHAIRA

Pensez à éteindre votre téléphone portable.

- Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.
- La qualité et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de l'examen.

Exercice 1.

Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $R(t) = \dfrac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)}$.
2. Montrer, en utilisant un changement approprié, que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)}dt$.
3. Calculer alors la valeur de I.

Exercice 2.

1. (a) Résoudre dans $]0,+\infty[$ l'équation différentielle
$$y' - y = \frac{e^x}{2\sqrt{x}} \qquad (E_1)$$
   (b) Déterminer la solution f de (E_1) qui vaut e en $x = 1$.
2. (a) Montrer que f est solution de l'équation
$$y'' - 2y' + y = \frac{-e^x}{4x\sqrt{x}} \qquad (E_2)$$
   (b) En déduire toutes les solutions de (E_2) sur $]0,+\infty[$.

Exercice 3.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ sont convergentes. (Sans les calculer)
2. Etablir que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$

   On pourra effectuer le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$

Rattrapage Janvier 2016

Ex 2) a) $y' - y = \frac{e^x}{2\sqrt{x}}$ (E_1) sur $]0, +\infty[$

· Etape 1 : Résolution de l'équation homogène

$$y' - y = 0 \quad (E_{1,0})$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\ln\left(\frac{y_0(x)}{\lambda}\right) = x \Rightarrow y_0(x) = \lambda e^x$$

· Etape 2 Variation de la constante

$$y_p(x) = \lambda(x)\, e^x$$

$$y_p'(x) = \left(\lambda'(x) + \lambda(x)\right) e^x$$

(E) : $\lambda'(x)\, e^x + \cancel{\lambda(x)\, e^x} - \cancel{\lambda(x)\, e^x} = \frac{e^x}{2\sqrt{x}}$

$$\lambda'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \lambda(x) = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

$$y_p(x) = \sqrt{x}\, e^x$$

$$y(x) = \left(\lambda + \sqrt{x}\right) e^x \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$$

b) CI $y(1) = e \Rightarrow (\lambda + 1)e = e \Rightarrow \lambda = -1$

Donc $f(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right) e^x$

2) a) $f(x) = (\sqrt{x} - 1)\, e^x$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 1\right) e^x$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{4x\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 1\right) e^x$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{4x\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 1\right) e^x$$

$$f'' - 2f' + f = \left(-\frac{1}{4x\sqrt{x}} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{x}}} + \cancel{\sqrt{x}} - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 2\sqrt{x} + \cancel{2} + \sqrt{x} - \cancel{1}\right) e^x$$

$$= -\frac{e^x}{4x\sqrt{x}}$$

donc f est solution de (E_2).

b) Solution homogène :

$$y'' - 2y' + y = 0 \qquad (E_{2,0})$$

$P(r) = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0 \Rightarrow$ sol. double $r_0 = 1$

$$y_0(x) = e^x (C_1 x + C_2)$$

c) $$y(x) = e^x (C_1 x + C_2) - \frac{e^x}{4x\sqrt{x}} \; ; \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Ex 3.)

1) $\displaystyle \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$

$$\frac{\ln t}{1+t^2} \underset{0}{\sim} \ln t = \frac{1}{t^0 (\ln t)^{-1}}$$

Par comparaison à une intégrale de Bertrand conv

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt \text{ converge.}$$

$\displaystyle \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$

$$\frac{\ln t}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^2} = \frac{1}{t^2 (\ln t)^{-1}}$$

Par comparaison à une intégrale de Bertrand conv

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt \text{ converge.}$$

2) $$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt \underset{\substack{u=\frac{1}{t}\\ t=\frac{1}{u}\\ dt=-\frac{du}{u^2}}}{=\!=\!=} \int_{+\infty}^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\frac{1}{u^2}}\left(-\frac{du}{u^2}\right)$$

$$= -\int_{+\infty}^1 \frac{-\ln u}{\frac{u^2+1}{u^2}} \cdot \frac{du}{u^2} = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}\,du$$

3) $$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$$

$$= 0.$$

Université Hassan II - F.S.T. Mohammedia
Département de mathématiques - Année 2015 - 2016
Parcours MIP
Partiel Analyse 2 - Mai 2016
Responsables : S. Chaira, O. Khadir, F. Mrabet et N. Moussaid

Exercice 1.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = e^x$.
2. Trouver les solutions du système d'équations différentielles

$$y' - z = 0$$
$$2y + z' - 3z = e^x$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $z(0) = 0$. Calculer alors $\int_0^1 z(x)dx$.

Exercice 2.

1. Calculer une primitive valable sur $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$ de la fonction définie par :

$$f(t) = \frac{1}{1+t^3}$$

2. Pour quelles valeurs du réel p l'intégrale $I_p = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx$ est convergente ?
3. Calculer $I_{1/2}$.
4. Calculer $I_{1/3}$ (On pourra utiliser le changement de variable donné par $x = t^3$).

Exercice 3.

1. Préciser la nature de la série :

$$\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

2. Préciser la nature de la série :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\cos^2(n)}.$$

3. Etudier la nature et calculer la somme de la série :

$$\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right).$$

Partiel Mai 2016

Ex 1) 1) $y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (E)$

. Etape 1 : Résolution de l'équation homogène

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad (E_0)$$

Soit l'équation caractéristique :

$$P(r) = r^2 - 3r + 2 = 0$$

qui admet deux solutions réelles distinctes $r_1 = 1, r_2 = 2$

donc $y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad ; \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$

. Etape 2 : Solution particulière

On a $f(x) = e^{\alpha x} . R(x) \qquad \alpha = 1 \quad , \quad d^\circ R = 0$

donc $y_p(x) = e^{\alpha x} . x^s . Q(x) \qquad d^\circ Q = 0.$

$s = 1 \qquad$ car $P(\alpha) = P(1) = 0$ et $P'(1) \neq 0$

$$y_p(x) = a x e^x$$
$$y_p'(x) = a(x+1) e^x$$
$$y_p''(x) = a(x+2) e^x$$

On introduit dans (E) :

$$a(x+2) e^x - 3a(x+1) e^x + 2ax e^x = e^x$$

$$-a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1$$

$$y_p(x) = -x e^x$$

$\mathcal{G}$: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x$, $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.

2) $\begin{cases} y' - z = 0 & (1) \\ 2y + z' - 3z = e^x & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow z = y' \Rightarrow z' = y''$

dans (2) : $2y + y'' - 3y' = e^x$

$y'' - 3y' + 2y = e^x$

D'après 1) $\begin{cases} y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x \\ z(x) = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} - (x+1) e^x. \end{cases}$

$\begin{cases} y(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1 \\ z(0) = 0 \Rightarrow c_1 + 2c_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$

$y(x) = (1-x) e^x$

$z(x) = -x e^x$

$\int_0^1 z(x)\,dx = -\int_0^1 x e^x\,dx$

$= \left[(1-x) e^x\right]_0^1$

$\boxed{\int_0^1 z(x)\,dx = -1}$

Part Mai 2016

Ex2) 1) $f(t) = \dfrac{1}{1+t^3} = \dfrac{1}{(1+t)(1-t+t^2)}$

$$= \frac{a}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2-t+1}$$

$$= \frac{a(t^2-t+1) + (t+1)(bt+c)}{(t+1)(t^2-t+1)}$$

$at^2 - at + a + bt^2 + ct + bt + c = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -a+b+c=0 \\ a+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=1-a \\ -a-a+1-a=0 \end{cases} \Rightarrow -3a=-1$

$\Rightarrow a = \frac{1}{3}$

$b = -\frac{1}{3}$

$c = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$$f(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t+1} - \frac{1}{3} \frac{t-2}{t^2-t+1}$$

$$\int f(t)\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{3}\int \frac{t}{t^2-t+1}\,dt + \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2-t+1}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{2}{3}\int \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

On pose $t - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} u \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{3}}{2} du$

$$\frac{2}{3}\int \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}du}{\frac{3}{4}u^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan u + C$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Cl $\displaystyle\int f(t)\,dt = \frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

mai 16 3

Ex 2) 1) $f(t) = \dfrac{1}{1+t^3} = \dfrac{1}{(1+t)(1-t+t^2)}$

$$= \frac{a}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2-t+1}$$

$$= \frac{a(t^2-t+1)+(t+1)(bt+c)}{(t+1)(t^2-t+1)}$$

$$at^2 - at + a + bt^2 + ct + bt + c = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = 0 \\ -a+b+c = 0 \\ a+c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = 1-a \\ -a-a+1-a = 0 \end{cases} \Rightarrow -3a = -1$$

$\Rightarrow a = \dfrac{1}{3}$

$b = -\dfrac{1}{3}$

$c = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

$$f(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t+1} - \frac{1}{3}\,\frac{t-2}{t^2-t+1}$$

$$\int f(t)\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{3}\int \frac{t}{t^2-t+1}\,dt + \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2-t+1}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

On pose $t - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}u \Rightarrow dt = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,du$

$$\frac{2}{3}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,du}{\frac{3}{4}u^2+\frac{3}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan u + C$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Cl $\displaystyle\int f(t)\,dt = \frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

2) $I_p = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx$

- La fct $x \mapsto \frac{x^{p-1}}{1+x}$ est continue, positive sur $]0,+\infty[$.
- L'intégrale est généralisée en 0 et $+\infty$.
- Chasles : $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx$

<u>Au $\mathcal{V}(0)$</u> : $\frac{x^{p-1}}{1+x} \underset{0}{\sim} \frac{x^{p-1}}{1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{1-p}}$

Or $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-p}}$ cv ssi $1-p<1$ soit $p>0$.

<u>Au $\mathcal{V}(+\infty)$</u> : $\frac{x^{p-1}}{1+x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^{p-1}}{x} = \frac{1}{x^{2-p}}$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2-p}}$ cv ssi $2-p>1$ soit $p<1$.

Cl $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx$ cv ssi $0<p<1$.

3) $I_{\frac{1}{2}} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$

$t=\sqrt{x} \Rightarrow x=t^2$ $= \int_0^{+\infty} \frac{2\cancel{t}\, dt}{\cancel{t}\,(1+t^2)}$

$\Rightarrow dx = 2t\, dt$

$= 2 \lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{dt}{1+t^2} = 2 \lim_{X\to+\infty} (\arctan X - \arcta$

$\boxed{I_{\frac{1}{2}} = \pi}$

remarque ④

4) $I_{\frac{1}{3}} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{-2/3}}{1+x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{2/3}(1+x)}$.

On pose $x = t^3 \Rightarrow t = \sqrt[3]{x}$, $dx = 3t^2\, dt$ $= \int_0^{+\infty} \frac{3\cancel{t^2}\, dt}{t^2(1+t^3)} = 3\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$

D'après 1)

$$I_{\frac{1}{3}} = 3 \lim_{x \mapsto +\infty} \left(F(x) - F(0) \right)$$

$$= 3 \lim_{x\mapsto+\infty} \left(\frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{4\sqrt{3}}{9} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{4\sqrt{3}}{9} \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= 3 \lim_{x\mapsto+\infty} \left(\frac{1}{3} \ln\left(\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-x+1}}\right) + \frac{4\sqrt{3}}{9} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right) - \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$I_{\frac{1}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$I_{\frac{1}{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{27} \cdot \pi$$

Ex 3) 1) $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} > 0 \quad \forall n \geq 1$

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$$

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

cl $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge

2) $U_n = \dfrac{1}{n \cos^2(n)}$ $n \geq 1.$

$\cos^2 n \leq 1$

$n \cos^2 n \leq n \Rightarrow \dfrac{1}{n \cos^2 n} \geq \dfrac{1}{n}$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente,

alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

3) $U_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{(n+2)^2}\right)$ $n \geq 1.$

$\forall n \geq 1$ $u_n < 0.$

$\dfrac{1}{(n+2)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$

$\ln\left(1 - \dfrac{1}{(n+2)^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^2}$

Par comparaison à une série de Riemann négative convergente $(\alpha = 2 > 1)$, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

mai 16 (6)

Ex3) : 2) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\cos^2(n)}$

$U_n = \frac{1}{n\cos^2 n} > 0$

$\cos^2 n \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 n} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n\cos^2 n} \geq \frac{1}{n}$

Par comparaison à la série harmonique div,

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2\cos^2 n}$ diverge.

3) $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)$

• $U_n = \ln\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right) < 0 \quad ; n \geq 1$

$\ln\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{(n+2)^2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$

Par comparaison à une série de Riemann négative cv

$(\alpha = 2 > 1)$; $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)$ converge.

• $\ln\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right) = \ln\left(\frac{(n+2)^2-1}{(n+2)^2}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}\right)$

$= \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+3}{n+2}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) - \ln\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$

$U_n = v_n - v_{n+1} \qquad v_n = \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$

Télescopié $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k+1}) = v_1 - v_{n+1}$

$S_n = \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{n+2}{n+3}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

Donc $\sum_{n\geq 1} U_n = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

Rattrapage Janvier 2017

Ex 1) $\quad y'' + 2y' + 4y = 49x\,e^{x} \quad (E)$

1)

- Etape 1 : Résolution de l'équation homogène

$$y'' + 2y' + 4y = 0 \qquad (E_0)$$

$P(r) = r^2 + 2r + 4 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées $\quad r = -1 \pm \sqrt{3}\,i$

$$y_0(x) = e^{-x}\left(C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}\,x\right)$$

2)

- Etape 2 : Solution particulière

$$f(x) = 49x\,e^{x} = e^{\alpha x}.\,R(x) \qquad \begin{cases} \alpha = 1 \\ d^\circ R = 1 \end{cases}$$

$$y_p(x) = e^{x}.\,x^{s}.\,Q(x) \qquad d^\circ Q = 1.$$

$P(\alpha) = P(1) \neq 0 \Rightarrow s = 0$

$$y_p(x) = e^{x}(ax+b)$$

$$y_p'(x) = e^{x}(ax+a+b)$$

$$y_p''(x) = e^{x}(ax+2a+b)$$

$$(E) : e^{x}\left(ax+2a+b+2ax+2a+2b+4ax+4b\right) = 49x\,e^{x}$$

$$\begin{cases} 7a = 49 \\ 4a + 7b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -\frac{4}{7}a = -4 \end{cases}$$

$$y_p(x) = (7x-4)\,e^{x}$$

3) $\boxed{y(x) = e^{-x}\left(c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x\right) + (7x-4)e^x}$
$(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$

4) $h(0) = 1 \Rightarrow c_1 - 4 = 1 \Rightarrow c_1 = 5$

$y'(x) = e^{-x}\left(-\sqrt{3}\, c_1 \sin\sqrt{3}x + \sqrt{3}\, c_2 \cos\sqrt{3}x - c_1 \cos\sqrt{3}x - c_2 \sin\sqrt{3}x\right)$
$+ e^x(7x+3)$

$h'(0) = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\, c_2 - c_1 + 3 = 0$
$\Rightarrow \sqrt{3}\, c_2 = c_1 - 3 = 5 - 3 = 2 \Rightarrow c_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{h(x) = e^{-x}\left(5 \cos\sqrt{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\sqrt{3}x\right) + (7x-4)e^x}$

5) Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux-fois derivable
verifiant $t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4 f(t) = 49\, t \ln t$

a) On pose $g(t) = f(e^t)$
$g'(t) = f'(e^t) \cdot e^t$
$g''(t) = e^t f'(e^t) + e^{2t} f''(e^t)$

$g''(t) + 2g'(t) + 4g(t) = e^t f'(e^t) + e^{2t} f''(e^t)$
$+ 2 e^t f'(e^t) + 4 f(e^t)$
$= (e^t)^2 f''(e^t) + 3 e^t f'(e^t) + 4 f(e^t)$
$= 49\, e^t \cdot \ln(e^t) = 49\, t\, e^t$

b) $f(t) = g(\ln t)$

$$= e^{-\ln t}\left(c_1 \cos\sqrt{3}\ln t + c_2 \sin\sqrt{3}\ln t\right) + (7\ln t - 4)\, e^{\ln t}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{t}\left(c_1 \cos(\sqrt{3}\ln t) + c_2 \sin(\sqrt{3}\ln t)\right) + t(7\ln t - 4)}$$

Ex2) 1) DES $\quad \dfrac{t^2+1}{t(t+1)^2} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{2}{(1+t)^2}$

2) a) $F(x) = \displaystyle\int \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{ch} x}\, dx$

$$= \int \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}{1 + \frac{e^x+e^{-x}}{2}}\, dx$$

$$= \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x} + 2}\, dx$$

$$\underset{\substack{t = e^x \\ x = \ln t \\ dx = \frac{dt}{t}}}{=} \int \frac{t + \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t} + 2}\, \frac{dt}{t}$$

$$= \int \frac{t^2+1}{t(t^2+2t+1)}\, dt$$

$$= \int \frac{t^2+1}{t(1+t)^2}\, dt$$

$$= \int \frac{dt}{t} - 2\int \frac{dt}{(1+t)^2}$$

Rat Janv 2017 $\qquad = \ln t + \dfrac{2}{1+t} + C$

$$\dot{F}(x) = \ln e^x + \frac{2}{1+e^x} + c$$

$$F(x) = x + \frac{2}{1+e^x} + C$$

b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{x\mapsto 0} \int_x^1 f(x)\,dx$

$\displaystyle = \lim_{x\mapsto 0} \left(F(1) - F(x)\right)$

$\displaystyle = \lim_{x\mapsto 0} \left(1 + \frac{2}{1+e} - \cancel{x} - \frac{2}{1+e^x}\right)$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{1+e}.$$

Ex 3) 1) $\sum 2^n$ div car $2^n \underset{n\mapsto+\infty}{\not\to} 0$

2) $\displaystyle\sum \frac{2^n+3^n}{4^n+2^n}$ conv

$\displaystyle\frac{2^n+3^n}{4^n+2^n} \geq 0$ et $\displaystyle\frac{2^n+3^n}{4^n+2^n} \simeq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ cv

3) $\displaystyle\sum \left(\frac{4n+3}{3n+2}\right)^n$ div

$$\sqrt[n]{\left(\frac{4n+3}{3n+2}\right)^n} = \frac{4n+3}{3n+2} \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} \frac{4}{3} > 1.$$

Ex 2) 1) $\displaystyle\int_1 e^{\sqrt{x}}\,dx \underset{\substack{t=\sqrt{x}\\ x=t^2\\ dx=2t\,dt}}{=\!=\!=} \int_1 2^t \cdot 2t\,dt = 2\int_1 t\,e^{t\ln 2}\,dt$

2) $\displaystyle F(t)=\int t\,e^{t\ln 2}\,dt$ $\qquad u=t \Rightarrow u'=1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad v'=e^{t\ln 2} \Rightarrow v=\dfrac{e^{t\ln 2}}{\ln 2}$

$$= \frac{t\,e^{t\ln 2}}{\ln 2} - \int \frac{e^{t\ln 2}}{\ln 2}\,dt$$

$$= \frac{t\,e^{t\ln 2}}{\ln 2} - \frac{e^{t\ln 2}}{(\ln 2)^2} + C$$

$$\int_1^{\sqrt{n}} e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\left(F(\sqrt{n}) - F(1)\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{n}\,2^{\sqrt{n}}}{\ln 2} - \frac{e^{\sqrt{n}}}{(\ln 2)^2} - \frac{2}{\ln 2} + \frac{2}{(\ln 2)^2}\right)$$

Ex 3) $\quad I =]1;+\infty[\quad ; \quad f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{(t-1)^2}\,dt$

1) Soit $x \in]1,+\infty[$

$\forall t \in [x, x^2] \quad \ln t > 0 \quad (\text{car } t > x > 1)$

donc $\quad \frac{\ln t}{(t-1)^2} > 0$

Par suite $\quad \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{(t-1)^2}\,dt > 0$. Soit $f(x) > 0, \forall x \in I$.

2) La fct $x \mapsto \frac{\ln t}{(t-1)^2}$ est continue sur $[x, x^2]$ $(x>1)$

Les fcts $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sont dérivables sur I

donc f est dérivable sur I

Et $\quad f'(x) = \frac{\ln x^2}{(x^2-1)^2} \cdot 2x - \frac{\ln x}{(x-1)^2}$.

$= \frac{2\ln x}{(x^2-1)^2} \cdot 2x - \frac{\ln x}{(x-1)^2}$

$= \frac{\ln x}{(x^2-1)^2}\left(4x - (x+1)^2\right)$

$= \frac{\ln x}{(x^2-1)^2}\left(4x - x^2 - 2x - 1\right)$

$= \frac{\ln x}{(x^2-1)^2}\left(-x^2 + 2x - 1\right)$

$= \frac{\ln x}{\cancel{(x-1)^2}(x+1)^2} \cdot \left(-\cancel{(x-1)^2}\right)$

$\Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{\ln x}{(x+1)^2}$

3) $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$

donc f est décroissante sur I.

4) $\forall t \in I$

$$t-1-\frac{(t-1)^2}{2} < \ln t < t-1$$

$$\frac{t-1}{(t-1)^2}-\frac{(t-1)^2}{2(t-1)^2} < \frac{\ln t}{(t-1)^2} < \frac{t-1}{(t-1)^2}$$

$$\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2} < \frac{\ln t}{(t-1)^2} < \frac{1}{t-1}$$

$$\int_x^{x^2}\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int_x^{x^2}dt < \int_x^{x^2}\frac{\ln t}{(t-1)^2}dt < \int_x^{x^2}\frac{dt}{t-1}$$

$$\left[\ln(t-1)-\frac{1}{2}t\right]_x^{x^2} < f(x) < \left[\ln(t-1)\right]_x^{x^2}$$

$$\ln(x^2-1)-\ln(x-1)-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x < f(x) < \ln(x^2-1)-\ln(x-1)$$

$$\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x < f(x) < \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$$

$$\ln(x+1)-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x < f(x) < \ln(x+1)$$

$\lim\limits_{x\mapsto 1^+}\ln(x+1)=\ln 2$; $\lim\limits_{x\mapsto 1^+}\ln(x+1)-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x=\ln 2$

Gendarmes $\Rightarrow \lim\limits_{x\mapsto 1^+} f(x)=\ln 2$

4) $\sum \frac{1}{n \ln n}$ div (Bertrand $\alpha = 1$ et $\beta = 1$)

5) $\sum (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}\right)$ conv

Serie alternée et $v_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}$

$(v_n)_n$ positive, décroissante vers 0.

6) $\sum \frac{n!}{n^n}$ conv

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = e^{-n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1.$$

DEVOIR MAISON

Ex 1)

$$y''+2y'+4y = xe^{x} \qquad (E)$$

1) (E_0) : $\quad y''+2y'+4y=0.$

dont l'équation caractéristique :

$$P(r)=r^2+2r+4=0 \iff \begin{cases} r_1=-1-i\sqrt{3} \\ r_2=-1+i\sqrt{3} \end{cases}$$

donc $y_0(x) = e^{-x}\left(c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\sin\sqrt{3}x\right)$
où $(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2$

2) On a $f(x)=xe^{x}$

donc $\quad y_p(x) = e^{x}.x^{s}.(ax+b)$

comme $\quad P(1)\neq 0 \Rightarrow s=0.$

$$y_p(x) = e^{x}(ax+b)$$

$$y_p'(x) = e^{x}(ax+b+a)$$

$$y_p''(x) = e^{x}(ax+b+a+a) = e^{x}(ax+b+2a)$$

On introduit dans (E), on obtient :

$$e^{x}\left(ax+b+2a+2ax+2b+2a+4ax+4b\right) = xe^{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7a = 1 \\ 4a+7b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{7} \\ b=-\frac{4}{49} \end{cases}$$

donc $\quad y_p(x) = \left(\frac{1}{7}x-\frac{4}{49}\right)e^{x}$

et $\quad y(x) = e^{-x}\left(c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\sin\sqrt{3}x\right) + \left(\frac{1}{7}x-\frac{4}{49}\right)e^{x}.$

3) $h(0) = 1 \Rightarrow c_1 - \frac{4}{49} = 1 \Rightarrow c_1 = 1 + \frac{4}{49} = \frac{53}{49}$

$h(1) = 0 \Rightarrow e^{-1}\left(c_1 \cos\sqrt{3} + c_2 \sin\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{4}{49}\right)e^{1} = 0$

$\Rightarrow c_2 = \frac{1}{\sin\sqrt{3}}\left(-\frac{53}{49}\cos\sqrt{3} - \frac{3}{49}\right)$

4) $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \ln t$$

a) $g(x) = f(e^x)$

$g'(x) = f'(e^x) . e^x$

$g''(x) = f''(e^x)\left(e^x\right)^2 + f'(e^x)\, e^x$

$g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) = f''(e^x)\left(e^x\right)^2 + f'(e^x)\, e^x + 2f'(e^x)\, e^x + 4f(e^x)$

$= f''(e^x)\left(e^x\right)^2 + 3f'(e^x)\, e^x + 4f(e^x)$

$t = e^x$ $\quad = e^x . \ln e^x$

$x = \ln t$ $\quad = x e^x$

donc g solution de (E).

$g(x) = e^{-x}\left(c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x\right) + \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)e^x$

Par conséquent :

$f(t) = g(\ln t)$

$= \frac{1}{t}\left(c_1 \cos\sqrt{3}\ln t + c_2 \sin\sqrt{3}\ln t\right) + \left(\frac{1}{7}\ln t - \frac{4}{49}\right)t.$

$(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$

Ex4)

1) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int \frac{2(3+2x)}{1+2x}\,dx$

$\displaystyle = 2\int \frac{1+2x+2}{1+2x}\,dx$

$\displaystyle = 2\int dx + 2\int \frac{2\,dx}{1+2x}$

$= 2x + 2\ln|1+2x| + C.$

$\displaystyle\int g(x)\,dx = \int (1+2x)^2 e^{2x}\,dx$ $\qquad u=(1+2x)^2 \Rightarrow u' = 4(1+2x)$

$\qquad v' = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2}$

$\displaystyle = \frac{e^{2x}}{2}(1+2x)^2 - 2\int (1+2x)e^{2x}\,dx$

$\qquad u = 1+2x \Rightarrow u' = 2$

$\qquad v' = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2}$

$\displaystyle = \frac{e^{2x}}{2}(1+2x)^2 - (1+2x)e^{2x} + 2\int e^{2x}\,dx$

$\displaystyle = \frac{e^{2x}}{2}(1+2x)^2 - e^{2x}(1+2x) + e^{2x} + C$

$\displaystyle = \frac{e^{2x}}{2}\left(4x^2 + \cancel{4x} + 1 - \cancel{2} - \cancel{4x} + \cancel{2}\right) + C$

$\displaystyle = \frac{e^{2x}}{2}(4x^2+1) + C$

$\displaystyle = \left(2x^2 + \frac{1}{2}\right)e^{2x} + C.$

2) (E) : $(1+2x)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$

a) $y_H(x) = e^{-2x}$

$y_H'(x) = -2e^{-2x}$

$y_H''(x) = 4e^{-2x}$

$$(1+2x)\,y'' + (4x-2)\,y' - 8y = 4(1+2x)\,e^{-2x} - 2(4x-2)\,e^{-2x} - 8\,e^{-2x}$$

$$= \left(4+8x-8x+4-8\right)e^{-2x}$$

$$= 0$$

donc $y(x) = e^{-2x}$ est solution de (E)

b) $y(x) = e^{-2x}\,z(x)$

$$y'(x) = -2e^{-2x}z(x) + e^{-2x}z'(x) = e^{-2x}\left(z'(x) - 2z(x)\right)$$

$$y''(x) = -2e^{-2x}\left(z'(x) - 2z(x)\right) + e^{-2x}\left(z''(x) - 2z'(x)\right)$$

$$= e^{-2x}\left(z''(x) - 4z'(x) + 4z(x)\right)$$

$$(1+2x)\,y'' + (4x-2)\,y' - 8y = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+2x)\,e^{-2x}\left(z'' - 4z' + 4z\right) + (4x-2)\,e^{-2x}\left(z' - 2z\right) - 8e^{-2x}z = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+2x)\,z'' + \left(-4(1+2x) + 4x - 2\right)z' + \left(4(1+2x) - \cancel{2(4x-2)} - 8\right)z = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+2x)\,z'' - 2(3+2x)\,z' = 0. \qquad (E_z)$$

c) sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ $\qquad Z = z' \Rightarrow Z' = z''$

$$(E_z) \Leftrightarrow (1+2x)\,Z' - 2(3+2x)\,Z = 0$$

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{2(3+2x)}{1+2x}\,dx$$

$$\ln\left(\frac{Z(x)}{\lambda}\right) = \int \frac{2(3+2x)}{1+2x}\,dx = \int f(x)\,dx$$

$$\ln\left(\frac{Z(x)}{\lambda}\right) = 2x + 2\ln(1+2x) + C.$$

$$Z(x) = \lambda\, e^{2x+2\ln(1+2x)}$$

$$= \lambda\, e^{2x} \cdot e^{2\ln(1+2x)}$$

$$= \lambda\, e^{2x} \cdot e^{\ln(1+2x)^2}$$

donc $\quad Z(x) = \lambda(1+2x)^2\, e^{2x}$

Comme $\quad Z(x) = z'(x)$

$$z'(x) = \lambda(1+2x)^2\, e^{2x}$$

$$z(x) = \lambda \int (1+2x)^2\, e^{2x}\, dx$$

$$z(x) = \lambda\, e^{2x}\left(2x^2 + \frac{1}{2}\right) + \mu$$

d) $\quad y(x) = e^{-2x} z(x) = \lambda\, e^{-2x} e^{2x}\left(2x^2 + \frac{1}{2}\right) + \mu\, e^{-2x}$

$$y(x) = \lambda\left(2x^2 + \frac{1}{2}\right) + \mu\, e^{-2x}$$

. $y(0) = 1 \implies \frac{\lambda}{2} + \mu = 1$

. $\mathcal{T}: \; y = mx + p \qquad m = y'(0) = -2\mu$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = y(0) + 2\mu \cdot 0 = 1$

$\mathcal{T}: \; y = -2\mu x + 1.$ tangente en $x = 0$

$\mathcal{T}$ passe par $(1, 0) \implies -2\mu + 1 = 0 \implies \mu = \frac{1}{2}$

$$\lambda = 2(1-\mu) = 1$$

et $\quad y(x) = 2x^2 + \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{2}.$

8

Ex5)

1) $R(x) = \dfrac{4x}{(1+x)^2(1+x^2)}$

$= \dfrac{a}{1+x} + \dfrac{b}{(1+x)^2} + \dfrac{cx+d}{1+x^2}$

$= \dfrac{a(1+x)(1+x^2) + b(1+x^2) + (cx+d)(1+x)^2}{(1+x)^2(1+x^2)}$

$\Rightarrow a + ax + ax^2 + ax^3 + b + bx^2 + cx + 2cx^2 + cx^3 + d + 2dx + dx^2 = 4x$

$\Rightarrow \begin{cases} a+c = 0 \\ a+b+2c+d = 0 \\ a+c+2d = 4 \\ a+b+d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2d = 4 \Rightarrow d = 2 \\ 2c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ a = 0 \\ b = -2 \end{cases}$

$R(x) = -\dfrac{2}{(1+x)^2} + \dfrac{2}{1+x^2}.$

2) $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \pi[$, $\sin x \neq -1 \Rightarrow 1 + \sin x \neq 0.$

f donc définie sur I.

f continue comme étant quotient et somme de fcts continues sur I.

3) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$

On pose $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t$

$\Rightarrow dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$

9

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{\cancel{1+t^2}}{(1+t)^2}\cdot\frac{2\,dt}{\cancel{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)}\,dt$$

$$= -2\int \frac{dt}{(1+t)^2} + 2\int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{2}{1+t} + 2\arctan t + C$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + 2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

$$= \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + 2.\frac{x}{2} + C$$

$$\int f(x)\,dx = x + \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C.$$