Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia
Année Universitaire : 2016-2017

16 50

نماذج امتحانات

EXEMPLE EXAMENS

ANALYSE NUMERIQUE

CORRIGER

MIP – S4

FSTM COPIE CENTRE

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia
Année Universitaire : 2016-2017

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia
Département de Mathématiques

Parcours MIP
4 Janvier 2018

Module M148 : Analyse Numérique

Rattrapage

Durée : 1h30min

N.B. Documents interdits. On tiendra compte de la présentation de la copie.

Exercice 1

Soit λ un point de $]0,1[$ et f une fonction de classe C^3 sur $[0,1]$.

1. Calculer le polyôme P_2^λ qui interpole f en 0, λ, 1 dans la base de Newton

$$1\,,\,x\,,\,x(x-\lambda)$$

2. Donner la formule de l'erreur $f(x) - P_2^\lambda(x)$.

3. Montrer que pour chaque $x \in [0,1]$, on a

$$\lim_{\lambda\to 0} P_2^\lambda(x) = f(0) + x\,f'(0) + (f(1) - f(0) - f'(0))\,x^2 \qquad (*)$$

4. Vérifier que le polynôme $P(x)$ défini par (*) est l'unique polynôme tel que

$$P(0) = f(0) \quad , \quad P'(0) = f'(0) \quad , \quad P(1) = f(1)$$

5. Pour un x_0 arbitraire de l'intervalle $]0,1[$, on pose $K = \dfrac{f(x_0) - P(x_0)}{x_0^2\,(x_0 - 1)}$, puis

$$\varphi(t) = f(t) - P(t) - K\,t^2\,(t-1)$$

Montrer que la fonction φ' est nulle en trois points, la fonction $\varphi^{(2)}$ en deux points et enfin $\varphi^{(3)}$ en un point $\xi \in]0,1[$.

En déduire une majoration de l'erreur $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P(x)|$ en fonction de $M = \sup_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)|$.

Exercice 2

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6\,\alpha \\ 3\,\alpha & -1 \end{pmatrix}$$

1. Effectuer l'élimination de Gauss (sans permutation de lignes) sur le système $Ax = b$ avec $b = \begin{pmatrix} 3 \\ \beta \end{pmatrix}$.

2. Calculer le déterminant de A en vous servant de l'élimination de Gauss.

3. Déterminer les valeurs de α et de β pour lesquelles la matrice A est non inversible.

4. Que pouvez-vous dire de la solution de ce système quand $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = 1$?

Exercice 3

Soit la différence centrée :

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

1. Donner l'ordre de cette approximation en utilisant les développements de Taylor appropriés.

2. Utiliser cette formule de différence pour obtenir une approximation de $f''(2.0)$ pour la fonction tabulée suivante, en prenant $h = 0.2$ et ensuite $h = 0.1$.

x	f(x)
1.8	1.5877867
1.9	1.6418539
2.0	1.6931472
2.1	1.7419373
2.2	1.7884574

$= 1 + \ln(x)$

Rattrapage M148 - 2 - 17-18 (04/01/2018)

Exercice 1

1) $P_2^\lambda(x) = f[0] + f[0,\lambda]x + f[0,\lambda,1].x(x-\lambda)$.

avec $f[0] = f(0)$; $f[0,\lambda] = \dfrac{f(\lambda)-f(0)}{\lambda-0}$ et $f[0,\lambda,1] = \dfrac{f(1)-f(\lambda)}{1-\lambda} - \dfrac{f(\lambda)-f(0)}{\lambda-0}$

Donc

$$P_2^\lambda(x) = f(0) + \frac{f(\lambda)-f(0)}{\lambda}x + \left(\frac{f(\lambda)-f(1)}{\lambda-1} - \frac{f(\lambda)-f(0)}{\lambda}\right)x(x-\lambda)$$

2) $E_\lambda(x) = f(x) - P_2^\lambda(x) = x(x-\lambda)(x-1).\dfrac{f^{(3)}(\xi_x)}{6}$ $\quad \xi_x \in [0,1]$.

3) $\lim\limits_{\lambda\to 0} P_2^\lambda(x) = f(0) + f'(0).x + \left(f(1) - f(0) - f'(0)\right)x^2$

4) Soit $P(X) = f(0) + f'(0)X + \left(f(1) - f(0) - f'(0)\right)X^2$ $\quad (*)$

On a $P \in \mathbb{R}_2[X]$

On a $\begin{cases} P(0) = f(0) \\ P(1) = f(1) \\ P'(0) = f'(0) \end{cases}$ $\quad (**)$

Unicité : Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $(**)$

$Q(x) = ax^2 + bx + c$. d'où $\begin{cases} c = f(0) = Q(0) \\ b = f'(0) = Q'(0) \\ a+b+c = f(1) = Q(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = f(0) \\ b = f'(0) \\ a = f(1) - f(0) - f'(0) \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{Q = P}$

5) $x_0 \in]0,1[$ arbitraire ; $K = \dfrac{f(x_0) - P(x_0)}{x_0^2(x_0-1)}$; $\varphi(t) = f(t) - P(t) - Kt^2(t-1)$

on φ est nulle en 3 points : $0, 1, x_0$ et $\varphi'(0) = 0$

Donc Th de Rolle : φ' s'annulle en 3 points : 0, $\xi_{1x_0} \in]0, x_0[$; $\xi_{2x_0} \in]x_0, 1[$

De m φ'' s'annulle en 2 points : $\eta_1 \in]0, \xi_{1x_0}[$; $\eta_2 =]\xi_{1x_0}, \xi_{2x_0}[$

- de m $\varphi^{(3)}$ " en 1 point $\xi_{x_0} \in]\eta_1, \eta_2[\subset]0,1[$. $(\varphi^{(3)}(\xi_{x_0}) = 0)$

On a $\varphi'(t) = f'(t) - P'(t) - K(3t^2 - 2t)$

$\varphi''(t) = f''(t) - P''(t) - K(6t - 2)$

$\varphi^{(3)}(t) = f^{(3)}(t) - 6K \qquad (P(t) \in \mathbb{R}_2[x])$

D'où $6K = f^{(3)}(\xi_x)$

Donc $\forall x \in]0,1[\ ; \ \exists\, \xi_x \in]0,1[$ tq

$$E(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{6} \cdot x^2(x-1) = \lim_{h \to 0} E_h(x)$$

Majoration de l'erreur :

$$|E(x)| \leq \frac{M}{6} \sup_{x \in [0,1]} |x^3 - x^2| \quad \text{avec } M = \sup_{[0,1]} |f^{(3)}(x)|$$

$(x^3 - x^2)' = 3x^2 - 2x$ s'annule pour $x = 0$ et $x = 2/3$

x	0		$2/3$		1
$(x^3-x^2)'$	0	$-$	0	$+$	1
$x^3 - x^2$	0	$\searrow$	$-4/27$	$\nearrow$	0

Donc $\sup_{[0,1]} |x^3 - x^2| = \frac{4}{27}$.

D'où $|E(x)| \leq \frac{M}{6} \cdot \frac{4}{27} = \frac{2M}{81}$. avec $M = \sup |f^{(3)}(x)|$

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6\alpha \\ 3\alpha & -1 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ \beta \end{pmatrix}$$

1) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -6\alpha & 3 \\ 3\alpha & -1 & \beta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -6\alpha & 3 \\ 0 & -1+9\alpha^2 & \beta - \frac{9\alpha}{2} \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3\alpha}{2} L_1$

2) $\det(A) = 2 \times (9\alpha^2 - 1) = 18\alpha^2 - 2$

3) A non inversible $\Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \pm \frac{1}{3}}$

4) $\alpha = \frac{1}{3}$, A n'est pas inversible.

Si $\beta = 1$, (S) n'admet pas de solution

Si $\beta = \frac{3}{2}$, (S) admet 1 infinité de solution : $\begin{cases} x = \frac{3}{2} + y \\ y \text{ qcq} \end{cases}$

Exercice 3

1) On a $f''(x) = \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + E(f)$

On a $f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_1)$

$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_2)$

$\Rightarrow f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{24}\left(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)\right)$

$\Rightarrow \boxed{E(f) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)}$ donc approximation d'ordre 2

2) Pour $h = 0{,}2$: $f''(2) \simeq \dfrac{f(2{,}2) - 2f(2) + f(1{,}8)}{(0{,}2)^2} \simeq -0{,}2512575$

Pour $h = 0{,}1$: $f''(2) \simeq \dfrac{f(2{,}1) - 2f(2) + f(1{,}9)}{(0{,}1)^2} \simeq -0{,}2503200$

Valeur exacte : $f(x) = 1 + \ln(x) \Rightarrow f''(2) = -0{,}25$

Rattrapage : [illegible] — 04/04/2016

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6\alpha \\ 3\alpha & -1 \end{pmatrix} \; ; \; b = \begin{pmatrix} 3 \\ \beta \end{pmatrix}$$

1) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -6\alpha & 3 \\ 3\alpha & -1 & \beta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -6\alpha & 3 \\ 0 & -1+9\alpha^2 & \beta - \frac{9\alpha}{2} \end{array}\right) \; L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3\alpha}{2} L_1$

2) $\det(A) = 2 \times (9\alpha^2 - 1) = 18\alpha^2 - 2$

3) A non inversible $\Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \pm\frac{1}{3}}$

4) $\alpha = \frac{1}{3}$, A n'est pas inversible.

Si $\beta \neq \frac{3}{2}$, (S) n'admet pas de solution.

(Si $\beta = \frac{3}{2}$) (S) admet une infinité de solutions $\begin{cases} x = \frac{3}{2} + y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

Exercice 3

1) On a $f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + E(h)$

On a $f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi)$

$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\eta)$

donc $f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{24}\left(f^{(4)}(\xi) + f^{(4)}(\eta)\right)$

d'où $\boxed{E(h) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\theta)}$ [illegible]

2) [illegible] $f''(0) \approx \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2}$ [illegible]

[illegible]

Université Hassan II Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia
Département de Mathématiques

Parcours MIP
9 Décembre 2017

Module M148 : Analyse Numérique

Partiel

N.B. : Il sera tenu compte de la clareté de la copie.

Exercice 1

Soient les points d'interpolation suivants : $(-1,0)\,,(0,-1)\,,(1,0)\,,(2,-1)$.
Trouver le polynôme d'interpolation de Newton de degré 3 passant par ces points.

Exercice 2

On cherche à établir la formule de quadrature suivantes :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A\,(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) + R(f)$$

de sorte qu'elle soit exacte pour f appartenant à l'espace vectoriel des polynômes de degré n, n aussi grand possible.

1/ Ecrire les équations déterminées par $R(x^k) = 0$, $k = 0, 1, 2, 3$.

2/ Soit $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$.

Vérifier que :

$$\begin{cases} a_2 = -(x_1 + x_2 + x_3) \\ a_1 = x_1\,x_2 + x_2\,x_3 + x_1\,x_3 \\ a_0 = -x_1\,x_2\,x_3 \end{cases}$$

En utilisant les équations du **1/**, montrer que :

$$P(x) = x^3 - \frac{x}{2}$$

Indication : calculer $(x_1 + x_2 + x_3)^2$ et $(x_1 + x_2 + x_3)^3$.

En déduire $x_1\,, x_2\,, x_3$ et la formule de quadrature. Quel est son degré de précision p ?

3/ Déterminer K en prenant $f(x) = x^{p+1}$ et en supposant que $R(f) = K\,f^{(p+1)}(\xi)$, $\xi \in [-1, +1]$.

Exercice 3

Soient les deux fonctions suivantes :

$$f(x) = x \quad et \quad g(x) = \ln(1 + 2x)$$

On cherche à calculer numériquement l'aire comprise entre ces deux courbes. On note $h(x) = f(x) - g(x)$.

1/ Etudier la fonction h. Montrer qu'il existe deux valeurs pour lesquelles h s'annule : une valeur évidente (laquelle ?) et une valeur que l'on note α. Localiser α dans un intervalle $I = [i, i+1]$ où i est un entier.

2/ Pour approcher α, on définit la suite suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

Montrer que cette suite converge bien vers α.

3/ Ecrire la méthode de Newton qui permet de trouver une approximation de α. Justifier le choix de x_0 qui assure la convergence et calculer trois itérés.

Exercice 4

Soit le système linéaire de dimension 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha \neq 0$$

1. La résolution de ce système peut être ramenée à celle d'un système linéaire de dimension 3, l'inconnue x_4 étant facile à déterminer, donner cette inconnue et le système de dimension 3 restant que l'on notera

$$(S) \qquad A\,x = b$$

2. Pour quelles valeurs de α le système (S) admet-il une solution unique ?

3. Donner la décomposition LU de A où L est une matrice triangulaire inférieure et U est une matrice triangulaire supérieure à diagonale égale à 1.

4. Résoudre, en utilisant la question précédente, le système (S) pour $\alpha = -1$.

Partiel 9 décembre 2017

Exercice 1

calcul des différences divisées :

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	
-1	0	—	—	—
0	-1	-1	—	—
1	0	1	1	—
2	-1	-1	-1	$-2/3$

Donc $P(x) = 0 - 1\cdot(x+1) + 1\cdot(x+1)\cdot x - \frac{2}{3}(x+1)\cdot x(x-1)$.

$$\Longrightarrow \boxed{P(x) = -(x+1) + x(x+1) - \frac{2}{3}x(x^2-1).}$$

Sur la base canonique, $P(x)$ s'écrit :

$$\boxed{P(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + \frac{2}{3}x - 1.}$$

Exercice 2 :

1) On a $R(x^k) = \int_{-1}^{1} x^k\,dx - A\left(x_1^k + x_2^k + x_3^k\right)$

$R(x^k) = 0, \quad 0 \leq k \leq 3 \quad \Longrightarrow \begin{cases} 3A = 2 \\ A(x_1 + x_2 + x_3) = 0 \\ A(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \frac{2}{3} \\ A(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 0 \end{cases}$

D'où $\begin{cases} A = 2/3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0 \end{cases}$

2) On va chercher x_1, x_2, x_3 solutions du système :

$$(S)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0 \end{cases} \qquad \left(A = \frac{2}{3}\right)$$

Soit $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$$= (x - x_1)\left(x^2 - (x_2 + x_3)x + x_2 x_3\right)$$

$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)x - x_1 x_2 x_3$$

$\Rightarrow P(x) = x^3 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)x - x_1 x_2 x_3$

$(\text{car } x_1 + x_2 + x_3 = 0)$.

On a $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$

$\Rightarrow 0 = 1 + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$

$\Rightarrow x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -1/2$.

Donc $P(x) = x^3 - \frac{1}{2}x - x_1 x_2 x_3$

Pour déterminer $x_1 x_2 x_3$, on calcule $(x_1 + x_2 + x_3)^3$

On a $(x_1 + x_2 + x_3)^3 = (x_1 + x_2)^3 + 3(x_1 + x_2)^2 x_3 + 3(x_1 + x_2)x_3^2 + x_3^3$

$$= x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + x_2^3 + 3x_1^2 x_3 + 3x_2^2 x_3 + 6x_1 x_2 x_3 + 3x_1 x_3^2 + 3x_2 x_3^2 + x_3^3.$$

$$= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1 x_2 x_3 + 3\left(x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2\right)$$

Exercice 2 (suite)

Donc $(x_1+x_2+x_3)^3 = x_1^3+x_2^3+x_3^3+6x_1x_2x_3 + 3\big(x_1x_2(x_1+x_2)+x_1x_3(x_1+x_3) + x_2x_3(x_2+x_3)\big)$

et en utilisant les équations de (S), on déduit :

$$0 = 0 + 6x_1x_2x_3 + 3(-x_1x_2x_3 - x_1x_2x_3 - x_1x_2x_3)$$

$$\Rightarrow 6x_1x_2x_3 - 9x_1x_2x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1x_2x_3 = 0.$$

D'où $P(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$

$= x\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$

$= x\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Ainsi $P(x)$ s'écrit sous la forme :

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(x-0)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

On en déduit : $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D'où la formule de quadrature :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{3}\left(f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) + R(f)$$

qui est exacte pour $f \in \mathbb{R}_3[x]$.

Pour déterminer le degré de précision, vérifions si la formule précédente est exacte ou non pour $f(x) = x^4$.

On a $\int_{-1}^{1} x^4 \, dx = \frac{2}{5}$.

$$\Rightarrow R(x^4) = \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\left(\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^4 + 0^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4\right)$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \neq 0.$$

Donc la formule n'est pas exacte pour $f(x) = x^4$.

D'où le degré de précision de cette formule est

$\boxed{P = 3}$.

3) En prenant $f(x) = x^4$ et en supposant $R(f) = K f^{(4)}(\xi) = 24K$

On déduit $K = \frac{R(x^4)}{24} = \frac{2/5 - 1/3}{24} = \frac{1/15}{24}$.

d'où $\boxed{K = \frac{1}{360}}$.

Exercice 3

$$h(x) = x - \ln(1+2x)$$

1) h définie sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[= D_h$.

On a $h'(x) = 1 - \dfrac{2}{1+2x} = \dfrac{2x-1}{2x+1}$.

D'où le tableau de variation :

x	$-\frac{1}{2}$	β		$\frac{1}{2}$		α	$+\infty$
$h'(x)$			$-$	0	$+$		
$h(x)$	$+\infty$	0	$\searrow$	$\underbrace{\frac{1}{2}-\ln(2)}_{<0}$	$\nearrow$	0	$+\infty$

Donc d'après le tableau de variation de h, il existe deux valeurs pour lesquelles h s'annule : $\begin{cases} \beta \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\\ \alpha \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\end{cases}$

On vérifie facilement que $\beta = 0$.

Pour localiser α, on vérifie : $h(1) = 1 - \ln(3) < 0$

$h(2) = 2 - \ln(5) > 0$.

et on a h cont et strictement croissante sur $[1, 2]$

donc α est une racine unique de h dans $[1, 2]$.

$\boxed{\alpha \in [1, 2]}$.

) Méthode de pt fixe :

$$\begin{cases} x_0 \in [1, 2] \\ x_{n+1} = g(x_n)\ ; \quad g(x) = \ln(1+2x) \end{cases}$$

(i) On a $g(\alpha) - \alpha = -h(\alpha) = 0$

donc α est point fixe de g.

(ii) $g(x)$ est dérivable sur $[1, 2]$.

$$g'(x) = \frac{2}{1+2x} \quad \text{et} \quad g''(x) = \frac{-4}{(1+2x)^2} < 0$$

$\Rightarrow g'(x)$ décroissante sur $[1, 2]$

$\Rightarrow g'(2) \leq g'(x) \leq g'(1)$

$\Rightarrow \frac{2}{5} \leq g'(x) \leq \frac{2}{3}$

$\Rightarrow |g'(x)| \leq \frac{2}{3} < 1$.

donc $g(x)$ est 1 contraction sur $[1, 2]$.

(iii) on a $g'(x) > 0$ sur $[1, 2]$

$\Rightarrow g(x)$ est croissante sur $[1, 2]$

$\Rightarrow g(1) \leq g(x) \leq g(2)$

$\Rightarrow \ln(3) \leq g(x) \leq \ln(5)$ $\quad \left(\text{on a } \begin{matrix} \ln(3) > 1 \\ \ln(5) < 2 \end{matrix}\right)$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $g([1, 2]) \subset [1, 2]$

Les conditions (i), (ii) et (iii) sont vérifiées donc la suite (x_n) définie par : $\begin{cases} x_0 \in [1, 2] \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$ converge vers α.

Exercice 3 (suite)

3) La méthode de Newton pour approximer α :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{h(x_n)}{h'(x_n)} = F(x_n). \\ x_0 \in V(\alpha) \text{ (un voisinage de } \alpha\text{)}. \end{cases}$$

On a $F'(\alpha) = 0$

donc $\exists\, V(\alpha) \,/\, |F'(x)| < 1 \quad \forall x \in V(\alpha)$

donc $F(x)$ est contractante sur le voisinage $V(\alpha)$

Ainsi, la méthode de Newton est une méthode d'ordre 2 qui converge rapidement pour un choix de x_0 dans le voisinage $V(\alpha)$.

Dans la pratique, on choisit ~~..~~ x_0 dans l'intervalle $[1,2]$ contenant α et on applique l'algorithme de Newton:

Si l'algorithme converge vers α, alors le choix de x_0 est bon.

Si l'algorithme ne converge pas, alors le choix de x_0 n'est pas bon : On change x_0 et on relance l'algorithme de Newton.

<u>Algorithme de Newton :</u> Définir $F(x) = x - \dfrac{h(x)}{h'(x)}$

Choisir x_0, epsilon, Nmax

$n \leftarrow 1$

~~Tant que ...~~

$x1 \leftarrow F(x_0)$

Tant que $n \leq Nmax$ et $Abs(X_1 - X_0) > epsilon$ faire

$X_0 \Leftarrow X_1$

$X_1 \Leftarrow F(X_0)$

$n \Leftarrow n+1$

Fin tant que

Si $n > Nmax$ alors

ecrire ("solution non trouvée après Nmax itérations")

ecrire ("changer x_0")

Sinon

écrire ("solution trouvée après", n, "itérations")

ecrire ("solution approchée =", X1)

FinSi

Calculons trois itérés :

Pour $x_0 = 1,5$, on trouve :

$x_1 = F(x_0)$ avec $F(x) = x - \dfrac{h(x)}{h'(x)}$

$= \dfrac{4\ln 4 - 3}{2} \simeq 1,272588$ $\quad = \dfrac{(2x+1)\ln(2x+1) - 2x}{2x-1}$

$x_2 = F(x_1) = \dfrac{(4\ln 4 - 2)\ln(4\ln 4 - 2)}{4\ln 4 - 4} \simeq 1,256527$

$x_3 = F(x_2) = \ldots$

$\simeq 1,256431$

Exercice 4

1) On a dans le système de dimension 4, la 4ème équation s'écrit : $2x_4 = 2$

d'où $\boxed{x_4 = 1}$.

En remplaçant cette valeur de x_4 ds le système de dimension 4, les 3 premières équations deviennent

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ \alpha x_2 + x_3 + 3 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2 = 2 \end{cases}$$

D'où le système de dimension 3 pour les inconnues x_1, x_2, x_3 :

$$(S) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ \alpha x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \iff Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Calculons $\det(A)$ suivant la 2ème ligne :

$$\det(A) = \alpha \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3\alpha + 3$$

(S) admet une solution unique ssi $\det(A) \neq 0$.

Donc (S) admet une solution unique ssi $\boxed{\alpha \neq 1}$

Dans la suite, on suppose $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$.

3) Décomposition LU de A :

On pose $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$; $U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow LU = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21} & l_{21}u_{12}+l_{22} & l_{21}u_{13}+l_{22}u_{23} \\ l_{31} & l_{31}u_{12}+l_{32} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33} \end{pmatrix}$$

$$LU = A \Leftrightarrow \begin{cases} l_{11} = 1 \ ; \ l_{21} = 0 \ ; \ l_{31} = 3 \\ u_{12} = 2 \ ; \ u_{13} = 3 \\ l_{22} = \alpha \ ; \ l_{32} = 3 - 6 = -3 \\ u_{23} = 1/\alpha \\ l_{33} = 6 - 9 + \frac{3}{\alpha} = -3 + \frac{3}{\alpha} \end{cases}$$

Donc $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 3 & -3 & \frac{3}{\alpha} - 3 \end{pmatrix}$; $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1/\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Pour $\alpha = -1$

$$AX = b \Leftrightarrow LUX = b \Leftrightarrow \begin{cases} LY = b \\ UX = Y \end{cases}$$

$$LY = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -2 = \frac{2}{\alpha} \\ y_3 = 2 \end{cases}$$

$$UX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Solution $\forall \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$)

Université Hassan II Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia
Département de Mathématiques

Parcours MIP
4 Janvier 2017

Module M148 : Analyse Numérique

Partiel

N.B. : Il sera tenu compte de la clareté de la copie.

Exercice 1

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1/ Déterminer le polynôme d'interpolation de Newton P vérifiant :

$$P(-1) = f(-1)\,,\ P(0) = f(0)\,,\ P(1) = f(1)$$

2/ Intégrer le polynôme P sur l'intervalle $[-1, +1]$. En déduire une formule d'intégration numérique. Quelle formule reconnaissez-vous ? Quel est son degré de précision et l'erreur de cette formule ?

3/ Par changement de variables, donner la formule équivalente sur l'intervalle $[a, b]$.

4/ Donner enfin, la même formule sur un intervalle $[a, b]$ découpé en $n = 2m$ sous intervalles.
Quelle est l'erreur d'intégration faite avec cette nouvelle formule ?

Exercice 2

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Décomposer A sous une forme $L\,U$. Puis calculer l'inverse de A en calculant au préalable les inverses des matrices L et U précédemment obtenues.

Exercice 3 **les questions 1/ et 2/ sont indépendantes**

1/ Déterminer la suite des premiers trois itérés des méthodes de Dichotomie dans l'intervalle $[1,3]$ et de Newton-Raphson avec $x_0 = 2$ pour l'approximation de la racine positive de la fonction $f(x) = x^2 - 2$.

2/ Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(x^2) - 4\,x^2$

2.1 Situer les 4 racines de f. (c-à-d : indiquer 4 intervalles disjoints qui contiennent chacun une et une seule racine).

2.2 Montrer qu'il y a une racine α comprise entre 0 et 1.

2.3 Soit la méthode de point fixe

$$\begin{cases} x_{k+1} = \varphi(x_k) \\ x_0 \in]0,1[\end{cases}$$

avec φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{\exp(x^2)}}{2}$.
Examiner la convergence de cette méthode et en préciser l'ordre de convergence.

2.4 Ecrire l'algorithme de Newton-Raphson pour la recherche des zéros de la fonction f. Traduire cet algorithme en langage Maple.

Exercice 4

A l'aide de la formule de différence centrée d'ordre 2 :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2\,h} + O(h^2)$$

montrer que

$$f''(x) \approx \frac{f(x+2\,h) - 2\,f(x) + f(x-2\,h)}{4\,h^2}$$

Partiel 4 janvier 2017

Exercice 1

1) On a $P(x) = f[-1] + f[-1,0](x+1) + f[-1,0,1]\,x(x+1)$

calcul des différences divisées :

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
-1	$f(-1)$	—	—
0	$f(0)$	$f(0)-f(-1)$	—
1	$f(1)$	$f(1)-f(0)$	$\dfrac{f(1)-f(0)-f(0)+f(-1)}{2}$

D'où

$$P(x) = f(-1) + \big(f(0)-f(-1)\big)(x+1) + \frac{f(1)-2f(0)+f(-1)}{2}\,x(x+1)$$

2) $$\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = f(-1)\big[x\big]_{-1}^{1} + \big(f(0)-f(-1)\big)\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1} + \frac{f(1)-2f(0)+f(-1)}{2}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \cancel{2f(-1)} + 2\big(f(0)-\cancel{f(-1)}\big) + \frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{f(1)-2f(0)+f(-1)}{\cancel{2}}$$

$$= \frac{f(-1)+4f(0)+f(1)}{3}$$

D'où une formule d'intégration :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq \frac{1}{3}\big(f(-1)+4f(0)+f(1)\big) \qquad (\mathrm{I})$$

On reconnait la formule de Simpson.

On vérifie que cette formule est exacte pour $f(x) = 1, x, x^2$ et x^3. Elle n'est pas exacte pour x^4.
Donc son degré de précision est 3.

L'erreur de cette formule est :

$$E(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad \text{avec } \xi \in [-1,1]$$

$$\underline{\text{et}} \quad h = \frac{b-a}{2} = 1.$$

3) Calculons $\int_a^b f(x)\,dx$

On pose le changement de variables affine :

$$y = \alpha x + \beta \quad \text{tq} \quad (S) \begin{cases} \alpha a + \beta = -1 \\ \alpha b + \beta = 1 \end{cases}$$

On résout (S) ; on obtient $\alpha = \frac{2}{b-a}$; $\beta = \frac{a+b}{a-b}$

soit $y = \frac{2}{b-a} x - \frac{a+b}{b-a}$

et donc $x = \frac{(b-a)}{2} y + \frac{a+b}{2} \Rightarrow dx = \frac{b-a}{2} dy$

Alors on a : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2} y + \frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{2} dy$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} g(y)\,dy$$

En utilisant la formule (I), on obtient :

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(g(-1) + 4 g(0) + g(1) \right)$$

$$= \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Donc la formule équivalente sur $[a,b]$ est :

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

Avec l'erreur

$$E(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad ; \quad \text{avec } \xi \in [a,b] \text{ et } h = \frac{b-a}{2}$$

4) En découpant $[a,b]$ en $n = 2m$ sous intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ (ou m ss-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$).

avec $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{b-a}{2m}$

$$\begin{cases} t_i = a + ih \; ; & 0 \leq i \leq n = 2m \\ x_i = a + 2ih \; ; & 0 \leq i \leq m \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \text{On a} \\ x_i = t_{2i} \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx + E_i(f)\right)$$

$$\Rightarrow I(f) \simeq \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{6}\left(f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1})\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h}{3}\left(f(x_i) + 4f(x_i+h) + f(x_i+2h)\right)$$

$$= \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{m-1}\left(f(t_{2i}) + 4f(t_{2i+1}) + f(t_{2i+2})\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I(f) \simeq \frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(t_{2i}) + 4\sum_{i=0}^{m-1} f(t_{2i+1}) + f(b)\right)}$$

Avec l'erreur

$$E(f) = \sum_{i=0}^{m-1} E_i(f) = \sum_{i=0}^{m-1} -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i) \; ; \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\Rightarrow E(f) = -\frac{h^5}{90}\sum_{i=0}^{m-1} f^{(4)}(\xi_i) \; ; \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

$$\Rightarrow E(f) = -m\,\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \; ; \quad \xi \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \boxed{E(f) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) \; ; \quad \xi \in [a,b]}$$

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & -1 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LU$$

Calculons L^{-1} et ~~A~~ U^{-1}.

Pour cela, on peut résoudre les systèmes $Lx_i = e_i$ et $Ux_i = e_i$; $1 \leq i \leq 3$

On a $Lx_i = e_i \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix}$; $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$; $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

et ~~$Ux_1 = e_1 \Rightarrow x_1$~~

D'où
$$L^{-1} = (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

(voir exercice 4 série 5)

De même, on a

$$UX_i = e_i \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où $U^{-1} = (X_1, X_2, X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et puisque $A = LU$ alors $A^{-1} = U^{-1} L^{-1}$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & \frac{1}{2} & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & \frac{1}{2} & 3/4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

1) $f(x) = x^2 - 2$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Approximons la racine positive de $f(x) = 0$

1.1) Méthode de Dichotomie : $\sqrt{2} \in [1, 3]$. racine séparée.

On a $x_1 = \frac{a+b}{2} = 2$; $\quad f(1) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2} \in [1, 2]$

$x_2 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$; $\quad f(1) \cdot f(3/2) < 0 \Rightarrow \alpha \in [1, 3/2]$

$x_3 = \frac{1+3/2}{2} = \frac{5}{4}$; $\quad f(1) \cdot f(\frac{5}{4}) > 0 \Rightarrow \alpha \in [\frac{5}{4}, 3/2]$

$\vdots$

1.2) Méthode de Newton

On a $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \dfrac{x_n^2 + 2}{2x_n} \\ x_0 = 2 \end{cases}$

D'où

$$x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$x_2 = \frac{9/4 + 2}{3} = \frac{17}{12} \simeq 1{,}41666$$

$$x_3 = \frac{\left(\frac{17}{12}\right)^2 + 2}{\frac{17}{6}} = \frac{577}{408} \simeq 1{,}414215$$

2) $f(x) = e^{x^2} - 4x^2$

On a $f'(x) = 2x e^{x^2} - 8x = 2x\left(e^{x^2} - 4\right)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \,;\; x^2 = \ln 4$

$\Leftrightarrow x = 0 \,;\; x = \pm\sqrt{\ln 4} \simeq \pm 1{,}177.$

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\ln 4}$		0		$\sqrt{\ln 4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow 0 \searrow$	$4(1-\ln 4) < 0$	$\nearrow 0 \nearrow$	1	$\searrow 0 \searrow$	$4(1-\ln 4) < 0$	$\nearrow 0 \nearrow$	$+\infty$

Donc

f admet 4 racines (f est paire)

On a $f(0) = 1$

$f(1) = f(-1) = e - 4 < 0$

$f(2) = f(-2) = e^4 - 16 > 0$

Donc les racines sont séparées respectivement dans les intervalles $[-2,-1]$; $[-1,0]$; $[0,1]$; $[1,2]$.

2.2) f continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ et $f(0).f(1) < 0 \Rightarrow \exists!\, \alpha \in [0,1] \;/\; f(\alpha) = 0$.
(Il en est de même pour les autres racines).

2.3) Soit la méthode de point fixe

$$\begin{cases} x_{n+1} = \varphi(x_n) = \frac{1}{2}\sqrt{\exp(x_n^2)} \\ x_0 \in]0,1[\end{cases}$$

On vérifie trois conditions :

(i) $\varphi(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\exp(x^2)} = x, \quad x > 0$
$\Leftrightarrow \exp(x^2) = 4x^2, \quad x > 0$
$\Leftrightarrow f(x) = 0, \quad x > 0$

(ii) $\varphi'(x) = \frac{1}{4} 2x \frac{\exp(x^2)}{\sqrt{\exp(x^2)}} = \frac{1}{2} x \sqrt{\exp(x^2)} = x\varphi(x)$

On a $\varphi''(x) = \varphi(x) + x\varphi'(x) = \varphi(x) + x^2\varphi(x) = (x^2+1)\varphi(x)$
$\varphi''(x) > 0 \Rightarrow \varphi'(x)$ croissante sur $]0,1[$.

Donc $\forall x \in]0,1[\,; \quad \varphi'(0) < \varphi'(x) < \varphi'(1)$

$\Rightarrow \quad 0 < \varphi'(x) < \frac{\sqrt{e}}{2}$

$\Rightarrow \quad |\varphi'(x)| < \frac{\sqrt{e}}{2} \simeq 0{,}824 < 1 \quad \forall x \in]0,1[$

(iii) On a $\varphi'(x) > 0 \quad \forall x \in]0,1[\Rightarrow \varphi(x)$ croissante sur $]0,1[$

Donc $\varphi(]0,1[) =]\varphi(0), \varphi(1)[=]\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{2}[\subset [0,1[$.

conclusion :

On a les conditions (i), (ii) et (iii) vérifiées donc la méthode de point fixe définie par $\varphi(x)$ converge vers la racine $\alpha \in]0,1[$ $\forall$ la valeur initiale $x_0 \in]0,1[$.

On a $\alpha \in]0,1[\Rightarrow 0 < \varphi'(\alpha) < \frac{\sqrt{e}}{2}$

donc $\varphi'(\alpha) \neq 0$

D'où l'ordre de convergence est 1.

Exercice 4

On a $f'(x) \simeq \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ (*)

Alors

$$f''(x) = (f'(x))' \simeq \frac{1}{2h}\left(f'(x+h) - f'(x-h)\right)$$

$$\simeq \frac{1}{2h}\left(\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h} - \frac{f(x)-f(x-2h)}{2h}\right)$$

(On applique la formule centrée (*) pour calculer $f'(x+h)$ et $f'(x-h)$).

D'où $f''(x) \simeq \dfrac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2}$

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia — Parcours MIP
Département de Mathématiques — 25 Mai 2017

Module M148 : Analyse Numérique

Partiel

N.B. : Il sera tenu compte de la clareté de la copie

Exercice 1

Soient les trois nombres réels :

$$x = 8.22 \quad , \quad y = 0.00317 \quad , \quad z = 0.00432$$

1/ Représenter les nombres x, y et z en virgule flottante.

2/ En utilisant l'arrondi à 3 chiffres significatifs, calculer la somme $x+y+z$ en faisant :

i) $(x+y)+z$

ii) $x+(y+z)$

3/ Commenter les résultats obtenus. Conclure.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sin(\pi x)$, $x \in [-1, 1]$

1/ Déterminer le polynôme d'interpolation de f, noté P_2, aux points -1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$.

2/ Déterminer le polynôme d'interpolation de f, noté Q_2, aux points $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1.

3/ Soit le polynôme $P(x) = \dfrac{1}{2}\Big((x+1)\,Q_2(x) - (x-1)\,P_2(x)\Big)$

a/ Montrer que P est le polynôme d'interpolation de f aux points -1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1.

b/ Peut-on affirmer que P est le polynôme d'interpolation de f aux points -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1?

4/ Calculer $P_2(\frac{1}{3})$, $Q_2(\frac{1}{3})$ et $P(\frac{1}{3})$ puis comparer les résultats obtenus.

9

Exercice 3

Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On se donne les points $\{x_i\}$ subdivision de l'intervalle $[a,b]$: $x_i = a + i\,h$ avec $h = \dfrac{b-a}{n}$, $i = 0, ..., n$.

Le but de l'exercice est de trouver une formule de quadrature à $2n$ points pour approcher

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

On propose dans un premier temps (question 1 à 2) de construire la formule de quadrature à deux points

$$\int_{-1}^1 g(x)\,dx \approx \frac{4}{3}\,g(-\frac{\omega}{2}) + \frac{2}{3}\,g(\omega) \qquad (2)$$

où $0 < \omega \leq 1$ est à déterminer.

1/ Montrer que cette formule est exacte pour tout polynôme g de degré 1.

2/ Déterminer ω pour que la formule de quadrature (2) soit exacte pour tout polynôme g de degré $m > 1$ et donner la plus grande valeur de m.

3/ A l'aide d'un changement de variable affine, en déduire une formule de quadrature pour l'intégrale suivante

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \qquad (3)$$

4/ En déduire une formule de quadrature à $2\,n$ points, notée F, pour le calcul approché de (1).

5/ Ecrire une procédure maple qui calcule F.

Exercice 4

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe au moins $\mathcal{C}^5$ sur l'intervalle $[a,b]$.

On se fixe un nombre ($h > 0$) "petit" ainsi qu'un point quelconque $x \in]a,b[$.

Soit le rapport

$$A = \frac{f(x+3\,h) - 3\,f(x+h) + 3\,f(x-h) - f(x-3\,h)}{8\,h^3} \qquad (4)$$

1/ Montrer que le rapport A approche une dérivée d'ordre supérieur que l'on déterminera.

2/ Donner l'ordre de précision de cette approximation.

Partiel 25 Mai 2017

Exercice 1

1) $fl(x) = 0,822 \times 10$

$fl(y) = 0,317 \times 10^{-2}$

$fl(z) = 0,432 \times 10^{-2}$

2)(i) $(x \oplus y) \oplus z = fl((0,822 + 0,000317) \cdot 10) \oplus z$

$= fl(0,822 \times 10 + 0,000432 \times 10)$

$= fl(0,822432 \cdot 10)$

$= 0,822 \times 10.$

(ii) $y \oplus z = 0,749 \times 10^{-2}$

$x \oplus (y \oplus z) = fl(0,822 \times 10 + 0,000749 \times 10)$

$= fl(0,822749 \times 10)$

$= 0,823 \times 10.$

3) On a la valeur exacte est $8,22749$

Le résultat obtenu dans (ii) est plus précis

(On a effectué la somme dans l'ordre croissant).

Dans (i), on a effectué la somme dans l'ordre décroissant donc il y a eu perte de chiffres significatifs.

Conclusion L'addition en virgule flottante n'est pas ~~~~ toujours associative.

(1)

Exercice 2

$f(x) = \sin \pi x \ ; \quad x \in [-1, 1]$.

1)

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
-1	0	—	—
$-\frac{1}{2}$	-1	-2	—
$\frac{1}{2}$	1	2	$8/3$

D'où $P_2(x) = -2(x+1) + \frac{8}{3}(x+1)(x+\frac{1}{2})$

2)

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
$-\frac{1}{2}$	-1	—	—
$\frac{1}{2}$	1	2	—
1	0	-2	$-8/3$

D'où $Q_2(x) = -1 + 2(x+\frac{1}{2}) - \frac{8}{3}(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$

3) $P(x) = \frac{1}{2}\left((x+1)Q_2(x) - (x-1)P_2(x)\right)$

a) On a $P(-1) = P_2(-1) = f(-1)$

$P(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} Q_2(-\frac{1}{2}) + \frac{3}{2} P_2(-\frac{1}{2})\right) = f(-\frac{1}{2})$

$P(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} Q_2(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} P_2(\frac{1}{2})\right) = f(\frac{1}{2})$

$P(1) = Q_2(1) = f(1)$

Donc $P(x)$ est le polynome d'interpolation de f aux points $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$:

Exercice 2 (suite)

b) On a $P(0) = \frac{1}{2}\left(Q_2(0) + P_2(0)\right)$
$= \frac{1}{2}\left(-1+1+\frac{2}{3} - 2 + \frac{4}{3}\right) = 0$

Donc on a $P(0) = f(0)$

Donc $P(x)$ est le polynôme d'interpolation de $f(x)$ aux points $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$.

4) $P_2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-8}{3} + \frac{8}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{-72+80}{27} = \frac{8}{27}$.

$Q_2\left(\frac{1}{3}\right) = -1 + 2 \cdot \frac{5}{6} + \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{-27+45+10}{27} = \frac{28}{27}$

$P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{28}{27} + \frac{2}{3} \frac{8}{27}\right) = \frac{64}{81}$

On a la valeur exacte est $f\left(\frac{1}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}866$

On a $E_1\left(\frac{1}{3}\right) = \left|P_2\left(\frac{1}{3}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right| \simeq 0{,}57$

$E_2\left(\frac{1}{3}\right) = \left|Q_2\left(\frac{1}{3}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right| \simeq 0{,}17$

$E_3\left(\frac{1}{3}\right) = \left|P\left(\frac{1}{3}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right| \simeq 0{,}076$

Donc $P\left(\frac{1}{3}\right)$ plus précise que $Q_2(1/3)$ plus précise que $P_2(1/3)$.

Exercice 3

1) On a $\int_{-1}^{1} dx = 2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}$ vérifiée

$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0 = \frac{4}{3}\left(-\frac{w}{2}\right) + \frac{2}{3} w = 0$ vérifiée.

Donc la formule (2) est exacte pour tout polynôme de degré 1 $\forall w$.

2) Pour $f(x) = x^2$, on a $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

la formule (2) donne $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{4}{3}\frac{w^2}{4} + \frac{2}{3} w^2 = w^2$

Donc (2) est exacte pour $f(x) = x^2$ ssi

$$w^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{w = \sqrt{\frac{2}{3}}} \quad (\text{On a } 0 < w \leq 1)$$

Pour $f(x) = x^3$, on a $\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \neq \frac{4}{3}\left(\frac{-w^3}{8}\right) + \frac{2}{3} w^3 = \frac{1}{2} w^3$

Donc la formule (2) n'est pas exacte pour $g(x) = x^3$

D'où $\boxed{m = 2}$

3) $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$

On pose le changement de variables

$y = \alpha x + \beta$

On cherche α et β tq $\begin{cases} \alpha x_i + \beta = -1 \\ \alpha x_{i+1} + \beta = 1 \end{cases}$

Exercice 3 (suite)

$$\begin{cases} \alpha x_i + \beta = -1 \\ \alpha x_{i+1} + \beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{2}{x_{i+1} - x_i} \\ \beta = \dfrac{x_{i+1} + x_i}{x_i - x_{i+1}} \end{cases}$$

Donc, en posant $y = \dfrac{2}{x_{i+1} - x_i} x - \dfrac{x_{i+1} + x_i}{x_{i+1} - x_i}$

On obtient

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} y + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) \cdot \frac{x_{i+1} - x_i}{2} dy$$

$$= \frac{h}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{h}{2} y + a + ih + \frac{1}{2} h\right) \cdot dy$$

$$\left(\text{car } x_{i+1} - x_i = h \quad x_{i+1} + x_i = 2a + (2i+1)h\right)$$

D'où

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{2} \int_{-1}^{1} f\left(a + \left(i + \frac{1}{2} + \frac{y}{2}\right)h\right) dy$$

En appliquant la formule (2), on obtient :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left(\frac{4}{3} f\left(a + \left(i + \frac{1}{2} - \frac{w}{4}\right)h\right) + \frac{2}{3} f\left(a + \left(i + \frac{1}{2} + \frac{w}{2}\right)h\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{2h}{6}\left[2f\left(a + \frac{2-w}{4}h + ih\right) + f\left(a + \frac{1+w}{2}h + ih\right)\right]}$$

4) En découpant $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ avec $h = x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n}$, on obtient :

(5)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[2\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+\frac{2-w}{4}h+ih\right) + \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+\frac{1+w}{2}h+ih\right)\right] \text{ avec } w=\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

5) Procédure Maple pour calculer $\int_a^b f(x)\,dx$ avec ~~c~~ cette dernière formule :

```
Formule := proc(f, a, b, n)
local h, i, S1, S2, F, w, A1, A2
h := (b-a)/n;
w := sqrt(2/3)
A1 := a + (2-w)*h/4;
A2 := a + (1+w)*h/2;
S1 := 0;
S2 := 0;
for i from 0 to n-1 do
    S1 := S1 + f(A1 + i*h);
    S2 := S2 + f(A2 + i*h);
od;
F := (2*S1 + S2)*h/3;
print(F);
end:
```

Exercice 4

Appliquons le développement de Taylor à l'ordre ...

$$f(x+3h) = f(x) + 3h f'(x) + \frac{9h^2}{2} f''(x) + \frac{27h^3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{81h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \frac{(3h)^5}{5!} f^{(5)}(\xi_1)$$

$$f(x-3h) = f(x) - 3h f'(x) + \frac{9h^2}{2} f''(x) - \frac{27h^3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{81h^4}{4!} f^{(4)}(x) - \frac{(3h)^5}{5!} f^{(5)}(\xi_2)$$

$$\Rightarrow f(x+3h) - f(x-3h) = 6h f'(x) + 9h^3 f^{(3)}(x) + \frac{81h^5}{40}\left(f^{(5)}(\xi_1) + f^{(5)}(\xi_2)\right)$$

De même :

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(\xi_3)$$

$$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(\xi_4)$$

$$\Rightarrow f(x+h) - f(x-h) = 2h f'(x) + \frac{h^3}{3} f^{(3)}(x) + \frac{h^5}{5!}\left(f^{(5)}(\xi_3) + f^{(5)}(\xi_4)\right)$$

D'où

$$f(x+3h) - f(x-3h) - 3\left(f(x+h) - f(x-h)\right) = 8h^3 f^{(3)}(x) + h^5\left(\frac{81}{20} f^{(5)}(\xi_5) - \frac{1}{20} f^{(5)}(\xi_6)\right)$$

On en déduit :

$$f^{(3)}(x) = \frac{f(x+3h) - f(x-3h) - 3\left(f(x+h) - f(x-h)\right)}{8h^3} - \frac{h^2}{160}\left(81 f^{(5)}(\xi_5) - f^{(5)}(\xi_6)\right)$$

avec $\xi_5 \in [x-3h, x+3h]$
$\xi_6 \in [x-h, x+h]$

Conclusion :

l'expression A approche la dérivée à l'ordre 3

7

Conclusion :

1) L'expression A approche la dérivée d'ordre 3.

2) l'ordre de précision de cette approximation est 2.

Université Hassan II de Casablanca | Parcours MIP
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia | 14 Janvier 2016
Département de Mathématiques | Durée : 1h30min

Module M148 : Analyse Numérique

Rattrapage

N.B. Documents interdits. On tiendra compte de la présentation de la copie.

Exercice 1

Soit f une fonction réelle dont on connaît les valeurs :

x_i	-2	-1	0	1	2
$y_i = f(x_i)$	40	3	-2	1	12

1/ Déterminer le polynôme d'interpolation de Newton $p(x)$ de la fonction f aux points $x_i : 0 \leq i \leq 4$.

2/ On suppose $-0.035 \leq f^{(5)}(x) \leq 0.015$. Donner une majoration de l'erreur d'interpolation.

Exercice 2

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction régulière. On considère la formule d'intégration numérique (M) suivante :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f(-\omega) + f(\omega) \quad avec\ \omega \in [0,1] \qquad (M)$$

1/ Calculer l'erreur

$$E(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - (f(-\omega) + f(\omega))$$

pour $f(x) = 1, x, x^2$ respectivement. Pour quelle valeur de $\omega = \omega^*$ la méthode est d'ordre 3 ?

2/ Calculer exactement l'intégrale suivante

$$\int_{1}^{3} \frac{1}{x}\,dx$$

3/ En utilisant un changement de variable, déduire de la formule (M) la valeur approchée de $\ln(3)$ en fonction de ω. Quelle est la valeur obtenue pour $\omega = \omega^*$.

14

Exercice 3

On considère la fonction $\Phi_a(x) = x + a\,(\tan(x) - 1)$, $a \in \mathbb{R}$, sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$.

1/ Montrer que Φ_a admet $y = \frac{\pi}{4}$ comme point fixe.

2/ Pour quelles valeurs du paramètre a ce point fixe est-il attractif ?

Exercice 4

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & 25 \end{pmatrix}$$

1/ Déterminer la décomposition $A = B.B^T$ avec $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & 0 \\ b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$.

2/ En utilisant cette décomposition, résoudre le système $Ax = d$ avec $d = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 63 \end{pmatrix}$.

Exercice 1 5,5 pts

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
-2	40				
		-37			
-1	3		16		
		-5		-4	
0	-2		4		1
		3		0	
1	1		4		
		11			
2	12				

0,25/val

Le polynôme d'interpolation de Newton $p(x)$ est donné par :

$$p(x) = 40 - 37(x+2) + 16(x+2)(x+1) - 4(x+2)(x+1)x + (x+2)(x+1)x(x-1)$$

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x - 2$$

2°) L'erreur d'interpolation est donnée par :

$$e(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \underbrace{(x+2)(x+1)x(x-1)(x+2)}_{F(x)}, \quad \xi \in [-2, 2]$$ 0,5

$$\underbrace{|e(x)| \leq \frac{|f^{(5)}(\xi)|}{5!} |F(x)|}_{0,5} \leq \underbrace{\frac{0.035}{5!} \times 4 \times 3 \times 2 \times \cancel{1}^{3} \times 4}_{0.028 \to 0,084.}$$

1 pt = 2 x 0,5

Exercice 2 5 pts

$f : [-1, +1] \to \mathbb{R}$, $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \approx f(-\omega) + f(\omega)$, $\omega \in [0, 1]$ 0,25

1) $f(x) = 1$: $E(f) = 0$ (0,25) ; $f(x) = x$: $E(f) = 0$ (0,25) ; $f(x) = x^2$: $E(f) = \frac{2}{3} - 2\omega^2$

La méthode est 3 pour ω vérifiant : $\frac{2}{3} - 2\omega^2 = 0$ c.à.d $\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 0,25

(ω est choisi positif et pour $f(x) = x^3$, on a : $E(f) = 0$) 1 pt

pour $f(x) = x^4$; $E(f) \neq 0$ 0,5

3) En faisant le changement de variable : $X = x - 2$, on trouve :

$$\ln(3) = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{X+2}\,dX \approx \frac{1}{-\omega+2} + \frac{1}{\omega+2} = \frac{4}{4-\omega^2}$$ 1 pt

Pour $\omega = \omega^* = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on obtient la valeur approchée $\frac{12}{11}$ ($\ln 3 \simeq 1.0986122$) 1 pt

Rechin 2 : 0,5

Exercice 3

1) $\phi_a(x) = x + a(\tan(x) - 1)$, $\phi_a(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$ (1 pt), $\phi_a'(x) = 1 + a(1 + \tan^2(x))$ (1 pt)

2) Le point fixe $\frac{\pi}{4}$ est attractif si $|\phi_a'(\frac{\pi}{4})| < 1$ (1 pt) soit : $-1 < a < 0$ (1 pt)

Exercice 4 1 pt

1) $A = BB^T$ où $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ 0,25 x 6

2) $Ax = d$ ssi $B\underbrace{B^T x}_{Y} = d$ ssi $\begin{cases} BY = d & : Y = (-3, -5, 12)^T \\ B^T x = Y & : x = \end{cases}$ $x = (1, 2, 3)^T$

1,5 pt

1,5 pt

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Université Hassan II Casablanca

Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia — Parcours MIP

Département de Mathématiques — 7 Janvier 2016

Module M148 : Analyse Numérique

Partiel

N.B. : Il sera tenu compte de la clareté de la copie.

Exercice 1 **les deux questions sont indépendantes**

1/ Evaluer l'expression $e \times (\pi - \frac{2}{3})$ en arithmétique flottante à 5 chiffres en utilisant l'arrondi avec $e \approx \mathbf{2.7118282}$ et $\pi \approx \mathbf{3.141593}$.

2/ Si x est voisin de 0, expliquer comment calculer $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} + 1 - \cos(x)$ en évitant la perte de chiffres significatifs.

Exercice 2

Soit la formule d'intégration numérique suivante :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = a\,f(0) + b\,f(\frac{1}{3}) + c\,f(\frac{2}{3}) + d\,f(1) + R(f)$$

1/ Déterminer a, b, c et d de sorte que $R(f) = 0$ quelle que soit f appartenant à l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Donner la forme matricielle du système qui résout a, b, c, d.

2/ Résoudre le système précédent par la méthode de Gauss.

3/ Donner la factorisation LU de la matrice.

Exercice 3

Soit la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

1/ Construire la table des différences divisées à partir des données $(x_i, f(x_i)), i = 0, \ldots 4$ avec $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 27$, $x_4 = 64$

TOURNEZ SVP

2/ Ecrire le polynôme d'interpolation de f, noté P_4, construit sur les données de **1/**, en utilisant la formule de Newton et les différences divisées, c'est-à-dire :

$$P_0(x) = f(x_0)$$
$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

Calculer $P_i(20)$ pour i=1,...,4 et comparer à f(20).

3/ Ecrire l'erreur d'interpolation $E_4(x) = f(x) - P_4(x)$.

Peut-on majorer $E_4(20)$ sur l'intervalle considéré ? Expliquer les résultats du **2/**.

<u>Exercice 4</u>

Soit $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$.

1/ Vérifier que $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{10 - x_n^3}$ est un schéma de point fixe pour approximer la racine réelle $\alpha \approx 1.36523$ de l'équation $f(x) = 0$.

2/ Etudier la convergence de cette méthode.

3/ Ecrire une procédure Maple qui calcule les itérés de la suite (x_n) en partant de $x_0 = 1.5$.

$$\begin{pmatrix} l_1 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ l_2 & l_3 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ l_4 & l_5 & l_6 & \cancel{0} \\ l_7 & l_8 & l_9 & l_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 1 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & 1 & u_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$l_1 u_3 = 1$

$l_3 u_5 = 3$

$l_1 = 1$, $l_2 = 0$, $l_4 = 0$, $l_7 = 0$

$l_1 u_1 = 1$

$l_2 u_1 + l_3 = \frac{1}{3}$

$l_4 u_1 + l_5 = 1/9$

$l_7 u_1 + l_8 = 1/27$

$l_1 u_2 = 1$

$l_3 + u_4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$

$l_5 u_3 + l_6 = \frac{4}{9}$

$l_8 u_4 + l_9 = \frac{8}{27}$

$\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + l_9 = \frac{8}{27}$

l_9

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1/9 & 4/9 & 1 \\ 0 & 1/27 & 8/27 & 1 \end{pmatrix}$$

$l_5 u_5 + l_6 u_6 = 1$

$l_8 u_5 + l_9 u_6 + l_{10} = 1$

$\frac{3}{28} + \frac{23}{81} \times 6 + l_{10}$

Solution Examen 07/01/2016

Exercice 2

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx \simeq a f(0) + b f\left(\tfrac{1}{3}\right) + c f\left(\tfrac{2}{3}\right) + d f(1)$$

1) $\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, $n = 0, 1, 2, 3$

On obtient :
$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ \frac{b}{3} + \frac{2c}{3} + d = 1/2 \\ \frac{b}{9} + \frac{4c}{9} + d = 1/3 \\ \frac{b}{27} + \frac{8c}{27} + d = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1/9 & 4/9 & 1 \\ 0 & 1/27 & 8/27 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

2) Méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 2/3 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/9 & 4/9 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1/27 & 8/27 & 1 & 1/4 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - \frac{1}{3}L_2 \\ L_4 - \frac{1}{9}L_2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2/9 & \frac{2}{3} & 1/6 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & 8/9 & 7/36 \end{array}\right) L_4 - L_3 \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2/9 & \frac{2}{3} & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{36} \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où
$$\begin{cases} d = \frac{1}{36} \times \frac{9}{2} = \frac{1}{8} \\ c = \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\right)\frac{9}{2} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} \\ b = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}\right)\cdot 3 = \frac{3}{8} \\ a = 1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

3) La factorisation LU :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 2/9 & 0 \\ 0 & 1/27 & 2/9 & 2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformations de Gauss :

$$A = IA \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1/9 & 4/9 & 1 \\ 0 & 1/27 & 8/27 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & 8/9 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{9}L_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_3$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 2/9 & 0 \\ 0 & 1/27 & 2/9 & 2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{9}{2}L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{9}{2}L_4 \end{array}$$

Solution Examen 07/01/2016

Exercice 3

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad x = [0, 1, 8, 27, 64] \qquad y = [0, 1, 2, 3, 4].$$

1)

x_i	y_i				
0	0	—	—	—	—
1	1	1	—	—	—
8	2	1/7	$-3/28 \simeq -0{,}1071429$	—	—
27	3	1/19	$\cancel{-6/1729}$ $-0{,}00347802$	$\frac{239}{62244} = 0{,}0038397$	—
64	4	1/37	$\frac{-9}{19684} \simeq -0{,}0004572$	$\frac{257}{5373732} \simeq 0{,}0000478$	$\frac{-30565}{515878272} = -0{,}000059$

2) $P_0(x) = f_0(x) = 0$

$$P_1(x) = f_0(x) + 1(x-0) = x$$

$$P_2(x) = f_0(x) + 1(x-0) + -\frac{3}{28}x(x-1) = x - \frac{3}{28}x(x-1)$$

$$P_3(x) = x - \frac{3}{28}x(x-1) + \frac{239}{62244}x(x-1)(x-8)$$

$$P_4(x) = x - \frac{3}{28}x(x-1) + \frac{239}{62244}x(x-1)(x-8) - \frac{30565}{515878272}x(x-1)(x-8)(x-27).$$

$L_0(20) = 0$; $L_1(20) = 20$; $L_2(20) \simeq -20{,}71428$

$L_3(20) \simeq -3{,}205128$; $L_4(20) \simeq -1{,}313916$

$$f(20) = \sqrt[3]{20} \simeq 2{,}71441761 7$$

3) $E_4(x) = f(x) - L_4(x) = \dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \prod_{i=1}^{5} (x - x_i)$; $\xi \in [0,6$

Ora

$$f(x) = x^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3}$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27} x^{-8/3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{80}{81} x^{-11/3}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{880}{243} x^{-\frac{14}{3}}$$

$\xi \in [0, 64]$.

$$\Rightarrow \boxed{E_4(x) = \frac{88}{2916 \times \xi^{14/3}} x(x-1)(x-8)(x-27)(x-64)}$$

(10)

Exercice 3

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \ , \quad \begin{cases} x = [0, 1, 8, 27, 64] \\ y = [0, 1, 2, 3, 4] \end{cases}$$

x_i	y_i				
0	0	—	—	—	—
1	1	1	—	—	—
8	2	1/7	$-\frac{6}{56} = -\frac{3}{28}$	—	—
27	3	1/19	$-\frac{12}{26\times 7\times 19}$	$\frac{257}{5373732}$	—
64	4	1/37	$-\frac{18}{56\times 19\times 37}$	$\frac{239}{62244}$	$-\frac{30565}{518878272}$
			$-\frac{6}{1729}$; $-\frac{9}{19684}$		

$$\frac{\frac{1}{7} - \frac{1}{19}}{6\times 37\times 19}$$

$$P_0(x) = f(x_0) = 0 \longrightarrow 0$$

$$\boxed{f(20) = \sqrt[3]{20} \simeq 2,714417}$$

$$P_1(x) = f(x_0) + x = x \longrightarrow 20$$

$$P_2(x) = x - \frac{3}{28}x(x-1) \rightarrow \frac{145}{7} \simeq -20,71428$$

$$P_3(x) = x - \frac{3}{28}x(x-1) + \frac{239}{62244}x(x-1)(x-8) \simeq -3,205128$$

$$P_4(x) = x - \frac{3}{28}x(x-1) + \frac{239}{62244}x(x-1)(x-8) - \frac{30565}{518878272}x(x-1)(x-8)(x-27)$$

$$\simeq -1,313916$$

$$E_4(x) = f(x) - P_4(x) = \prod (x - x_i) \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}$$

$$f(x) = x^{1/3} ; \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} , \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-4/3} ; \quad f^{(3)} = \frac{8}{27}x^{-7/3}$$

Exercice 4

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ $\quad \left(\begin{array}{l} f(1) = -5 \\ f(2) = 14 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha \in [1,2]$

$g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$ $\quad 10 - x^3 > 0 \Leftrightarrow x^3 < 10$

$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{10-x^3} = x \Leftrightarrow 4x^2 = 10 - x^3$

$\Leftrightarrow f(x) = 0$

$g(x) = \frac{1}{2}\left(10 - x^3\right)^{1/2}$

$g'(x) = \frac{1}{4} \cdot -3x^2 \left(10 - x^3\right)^{-1/2} = \frac{-3}{4}\frac{x^2}{\sqrt{10-x^3}} < 0$

$g'(1) = -\frac{1}{4}$, $\quad g'(2) = -\frac{3}{\sqrt{2}} < -1$!

$g'(3/2) = \frac{-3}{4} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{10 - \frac{27}{8}}} = -\frac{27\sqrt{8}}{16\sqrt{53}} > -1$

$g \searrow \Rightarrow g([a,b]) = [g(b), g(a)]$

$g(1) = \frac{3}{2} < 2$, $\quad g(2) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

$g(3/2) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - \frac{27}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{53}{8}}$

Donc on choisit $\alpha \in [1, 3/2]$

où $\left\{ \begin{array}{l} g([a,b]) \subset [a,b] \\ |g'(x)| \le |g'(3/2)| < 1 \end{array} \right.$

Donc la méthode cv $\forall x_0 \in [1, 1{,}5]$

Exercice 4

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

$$f'(x) = 3x^2 + 8x = x(3x+8)$$

x	$-\infty$		$-\frac{8}{3}$		0	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{14}{27}$	$\searrow$	-10	$\nearrow$

D'après tableau variation $f(x)$ admet une racine réelle positive.

On a $f(1) = -5$; $f(2) = 14 \Rightarrow \alpha \in [1, 2]$.

$\alpha \simeq 1,36523$

1) Soit $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$.

On a $g(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3} = x \Leftrightarrow 4x^2 = 10 - x^3$

$\Leftrightarrow f(x) = 0$

Donc si le schéma $x_{n+1} = g(x_n)$ converge, alors sa limite est la racine de $f(x) = 0$.

2) Etudions la convergence de ce schéma :

On a $g'(x) = -\dfrac{3x^2}{4\sqrt{10 - x^3}} < 0 \Rightarrow g(x) \downarrow$

$$g''(x) = \frac{-3x}{2\sqrt{10 - x^3}} - \frac{9x^4}{8\left(\sqrt{10 - x^3}\right)^3} < 0 \text{ sur } [1, 2]$$

$\Rightarrow g'(x) \downarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{g'(2)}_{= -2,12} \leq g'(x) \leq g'(1) = -0,25 < 0$$

Donc l'intervalle $[1, 2]$ ne convient pas

On a $g'(1.5) \simeq -0,65562 > -1$

Donc sur $[1; 3/2]$ on a $|g'(x)| \leq 0,6556 < 1$

On a $f(1) \cdot f(\frac{3}{2}) < 0 \Rightarrow \alpha \in [1, 3/2]$.

Il reste à vérifier la condition $g([1; \frac{3}{2}]) \subset [1; \frac{3}{2}]$

On a $g(x) \searrow \Rightarrow g(\frac{3}{2}) \leq g(x) \leq g(1)$

$\Rightarrow 1,2869 \leq g(x) \leq 3/2 = 1,5$

$\Rightarrow g([1, \frac{3}{2}]) \subset [1, 3/2]$.

$\left(g(2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,707 < 1 \Rightarrow [1, 2] \text{ ne convient pas} \right)$.

<u>Conclusion</u> :

$$\begin{cases} \alpha \in [1, \frac{3}{2}] \ ; \ f(1) \cdot f(\frac{3}{2}) < 0 \\ |g'(x)| \leq 0,66 < 1 \\ g([1, 3/2]) \subset [1, 3/2]. \end{cases}$$

Donc le schéma : $\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n) \\ x_0 \in [1, 1,5] \end{cases}$ CV globale

<u>Converge vers α.</u>

<u>Rque</u> On a $g'(\alpha) \simeq -0,51196$

$\Rightarrow |g'(\alpha)| < 1 \Rightarrow$ la méthode CV. (CV locale)

3) <u>Procédure Maple</u> :

```
PtFix := proc(p, eps, N, g)
local n, x0, xn;
n := 1; x0 := p, xn := g(x0);
While n <= N and abs(xn - x0) >= eps do
...
if n>N then
print("echec; n>"; N)
else
print("solution: alpha="; xn, "n="; n)
fi
end:
```

Université Hassan II Casablanca

Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia **Parcours MIP**

Département de Mathématiques **03 Juin 2015**

Module M148 : Analyse Numérique

Partiel

Durée : 2h

N.B. : **Il sera tenu compte de la clareté de la copie.**

Exercice 1 :

Ecrire un programme calculant une valeur approchée de $\cos(x)$ par l'intermédiaire de la série :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n}$$

Le calcul s'arrêtera quand le dernier terme à additionner sera inférieur ou égal en valeur absolue **abs**() à 10^{-5}.

Chaque terme de la somme sera évalué en fonction du terme précédent $u_{2n} = -\dfrac{x^2\, u_{2n-2}}{2n(2n-1)}$ pour $n \geq 1$ et $u_0 = 1$. On ne calcule pas les factorielles.

Exercice 2 :

Soit s un paramètre fixé dans $]0,1]$. On considère la formule de quadrature :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \alpha_s f(-s) + \beta_s f(0) + \gamma_s f(s)$$

1/ Déterminer les poids α_s, β_s et γ_s de sorte que la formule soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à deux.

2/ Vérifier que la formule intègre exactement les polynômes de degré trois.

3/ Quelle formule obtient-on pour $s = 1$?

4/ Déterminer $s \in]0, 1]$ pour que la formule soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à quatre.

Vérifier que la formule est encore exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à cinq.

Exercice 3 :

Pour approcher les racines réelles de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = (1+x)\, e^{1-x} - \frac{3}{2}$, on veut utiliser la méthode de point fixe suivante :

$$\begin{cases} x_0 & \text{donné} \\ x_{n+1} = g(x_n) & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \text{où } g(x) = \frac{3}{2}\, e^{x-1} - 1 \end{cases}$$

1/ Montrer qu'il existe deux racines réelles $l_1 < l_2$ de f.

2/ Notons $[m, m+1]$ l'intervalle contenant l_1. Calculer l'entier m et expliquer pourquoi la suite converge vers l_1 si $x_0 \in [m, m+1]$.

3/ Donner l'expression de la suite récurrente, notée $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donnée par la méthode de Newton associée à l'équation $f(x) = 0$.
En partant de $y_0 = 1.5$, calculer les deux premiers itérés y_1 et y_2.

Exercice 4 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix}$

1/ Effectuer la factorisation $A = L\,U$ avec les termes diagonaux de U égaux à 1 (Ceux de L sont quelconques).

2/ Calculer la solution de $A\,x = b$ en utilisant cette décomposition.

03 juin 2015

Ex 1

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}$$

$$\begin{cases} u_{2n} = -\dfrac{x^2\, u_{2n-2}}{2n(2n-1)} \ ; \quad n \geq 1. \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

Programme :

```
> cosinus := proc(x).
  local n, u, S, eps; x2;
  eps := 10^(-5)
  n:=0; u:=1; S:=u; x2:=x^2;
  while abs(u) > eps do
    n:=n+1;
    u:= -x2*u/(2*n*(2*n-1));
    S:=S+u;
  od;
  print("cos(", x, ")=", S);
  end:
> x:= .. : cosinus(x);
```

Ex 2

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \alpha_q f(-q) + \beta_q f(0) + \gamma_q f(q)$$

1) $\int_{-1}^{1} x^n dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ \dfrac{2}{n+1} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$

La formule étant exacte pour $f(x) = 1, x, x^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ -q\alpha + q\gamma = 0 \\ q^2\alpha + q^2\gamma = 2/3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(*) \begin{cases} \alpha = \gamma = \dfrac{1}{3q^2} \\ \beta = \dfrac{6q^2 - 2}{3q^2} \end{cases}}$$

2) Pour $f(x) = x^3$, on a $\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$

et $\alpha f(-q) + \beta f(0) + \gamma f(q) = 0$

Donc la formule est exacte pour les polynômes de degré 3.

3) Pour $q = 1$, on obtient la formule :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{3}\left(f(-1) + 4f(0) + \frac{1}{3}f(1)\right)$$

Formule de Simpson

4) Pour $f(x) = x^4$, on a $\int_{-1}^{1} x^4 dx = 2/5$

donc, on doit avoir, en plus de (*),

$$q^4\alpha + q^4\gamma = 2/5 \Rightarrow 2\alpha q^4 = 2/5 \Rightarrow \frac{1}{3q^2} q^4 = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow q^2 = 3/5 \Rightarrow \boxed{q = \sqrt{3/5}}$$

La formule devient : $\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq 5f(-\sqrt{3/5}) + 8f(0) + f(\sqrt{3/5})$

$f(x) = (1+x)e^{1-x} - 3/2$

$f(x) = 0$?

On a $f'(x) = -x e^{1-x}$

x	$-\infty$		l_1		0		l_2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$e-3/2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-3/2$

$f(0) = e - \frac{3}{2} \simeq 1,218$

D'après tableau de variation $f(x)$ admet 2 racines $l_1 < 0$ et $l_2 > 0$.

2) On a $f(0) > 0$
$f(-1) = -\frac{3}{2} < 0$ $\}$

Donc $\boxed{l_1 \in [-1, 0]}$

Soit la suite (x_n) définie par :

$(*) \begin{cases} x_0 \in [m, m+1] = [-1, 0] \\ x_{n+1} = g(x_n) \quad \text{où } g(x) = \frac{3}{2}e^{x-1} - \end{cases}$

$*$ On a $l_1 \in [-1, 0]$ et $g(l_1) = l_1$

$*$ On a $g'(x) = \frac{3}{2}e^{x-1} = g''(x) > 0$

$\Rightarrow g'(x) \nearrow$ croissante.

donc $\forall x \in [-1, 0]$; $g'(-1) \leq g'(x) \leq g'(0)$

$\Rightarrow \frac{3}{2}e^{-2} \leq g'(x) \leq \frac{3}{2}e^{-1}$

$\Rightarrow |g'(x)| \leq \frac{3}{2}e^{-1} < 1$.

$*$ En fin, on a $g(x)$ croissante, donc

$g([-1, 0]) = [g(-1), g(0)]$ $= [-0,797, -0,$

$= [\underbrace{\tfrac{3}{2}e^{-2} - 1}_{> -1}, \underbrace{\tfrac{3}{2}e^{-1} - 1}_{< 0}]$.

$\Rightarrow g([-1, 0]) \subset [-1, 0]$.

Alors le processus itératif $(*)$ cv vers l_1 $\forall x_0$

3) Soit l'équation $f(x) = 0$

la suite récurrente définie par la méthode de Newton et donnée par :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donnée} \\ y_{n+1} = y_n - \dfrac{f(y_n)}{f'(y_n)} \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} y_0 \text{ donnée} \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{(1+y_n)\, e^{1-y_n} - 3/2}{y_n e^{1-y_n}} \end{cases}$$

$$= y_n + \frac{1+y_n}{y_n} - \frac{3/2\, e^{y_n - 1}}{y_n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_0 \text{ donnée} \\ y_{n+1} = \dfrac{(y_n^2 + y_n + 1) - 3/2\, e^{y_n - 1}}{y_n} \end{cases}$$

Soit $y_0 = 1{,}5$; calculons y_1 et y_2 :

On a
$$y_1 = \frac{\frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 1}{3/2} - \frac{\cancel{3/2}\, e^{1/2}}{\cancel{3/2}} = \frac{19}{6} - e^{1/2} \simeq 1{,}5179454$$

$y_2 = 1{,}51799971.$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix}$$

1) $$A = LU = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} l_{11} = 2 \\ l_{21} = 4 \\ l_{31} = -2 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2u_{12} = 1 \\ 4u_{12} + l_{22} = 5 \\ -2u_{12} + l_{32} = 5 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2u_{13} = -2 \\ 4u_{13} + l_{22}u_{23} = -3 \\ -2u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} = 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} l_{11} = 2 \\ l_{21} = 4 \\ l_{31} = -2 \end{array} \left| \begin{array}{l} u_{12} = 1/2 \\ l_{22} = 3 \\ l_{32} = 6 \end{array} \right| \begin{array}{l} u_{13} = -1 \\ u_{23} = 1/3 \\ l_{33} = -1 \end{array}$$

D'où
$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Ax = b \iff LUx = b \iff \begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases}$$

$$Ly = b \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \\ y_2 = 3 \\ y_3 = 3 \end{cases}$$

$$Ux = y \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Université Hassan II Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia
Département de Mathématiques

Parcours MIP
15 Janvier 2015

Module M148 : Analyse Numérique

Rattrapage

N.B. : Il sera tenu compte de la clareté de la copie.

Exercice 1

Montrer que la fonction $f(x) = 1 - 3\, e^{-x}$ a une unique racine $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Par un procédé de dichotomie, trouver un intervalle de longueur 1 contenant cette racine.

Pour l'approcher, on propose les schémas suivants :

2. $x_0 \in [1, 2]$, $x_{n+1} = x_n + f(x_n)$

Cette suite converge-t-elle vers α ? Pourquoi ?

3. Trouver une valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ qui assure la convergence de la suite $x_{n+1} = x_n + \lambda\, f(x_n)$

4. Appliquer à $f(x)$ la méthode de Newton pour trouver α. Calculer deux itérés en partant de $x_0 = 1$.

Exercice 2

On considère la fonction f donnée par la table suivante :

x	0	1	4	9
f(x)	0	20	40	60

1. Construire la table des différences divisées à partir des données.

2. Ecrire le polynôme d'interpolation de Newton P de f exprimé dans la base canonique et construit sur les abscisses suivants : $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Calculer $P(2)$.

3. Faire de même avec les abscisses suivants : $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$. On notera Q le polynôme. Calculer $Q(2)$.

4. Sachant que $f(x) = 20\sqrt{x}$, calculer les erreurs réelles. Donner une borne supérieure des erreurs commises dans les deux cas. Conclure.

Exercice 3

On veut résoudre le système linéaire $A\,x = b$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Appliquer la méthode de Gauss sans permutation au système $Ax = b$.

2. Donner la décomposition LU de A.

3. Appliquer à nouveau la méthode de Gauss au système $Ax = b$ avec une permutation cette fois (on le notera $\tilde{A}x = \tilde{b}$). Soit P la matrice dite de permutation telle que $PA = \tilde{A}$.

4. Donner la décomposition $\tilde{L}\tilde{U}$ de la matrice $\tilde{A}$ puis utiliser la pour résoudre le système $\tilde{A}x = \tilde{b}$.

28

Solution Examen Rattrapage Janvier 2015

Exercice 1

$$f(x) = 1 - 3e^{-x}$$

On a $f'(x) = 3e^{-x} > 0 \Rightarrow f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{+\infty} f(x) = 1$

Donc f admet une racine unique $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) On a $f(0) = -2$; $f(1) = -0,103..$; $f(2) \simeq 0,59$

donc $\boxed{\alpha \in [1, 2]}$

2) $\begin{cases} x_0 \in [1, 2] \\ x_{n+1} = x_n + f(x_n) = g(x_n). \end{cases}$

Soit $g(x) = x + f(x)$

on a $g'(x) = 1 + f'(x) = 1 + 3e^{-x} > 1$.

Donc cette suite ne converge pas vers α

car on a $g'(\alpha) > 1$

3) posons $g_\lambda(x) = x + \lambda f(x)$

on a $g'_\lambda(x) = 1 + \lambda f'(x) = 1 + 3\lambda e^{-x}$

λ doit être < 0, sinon on aura $g'(\alpha) > 1$.

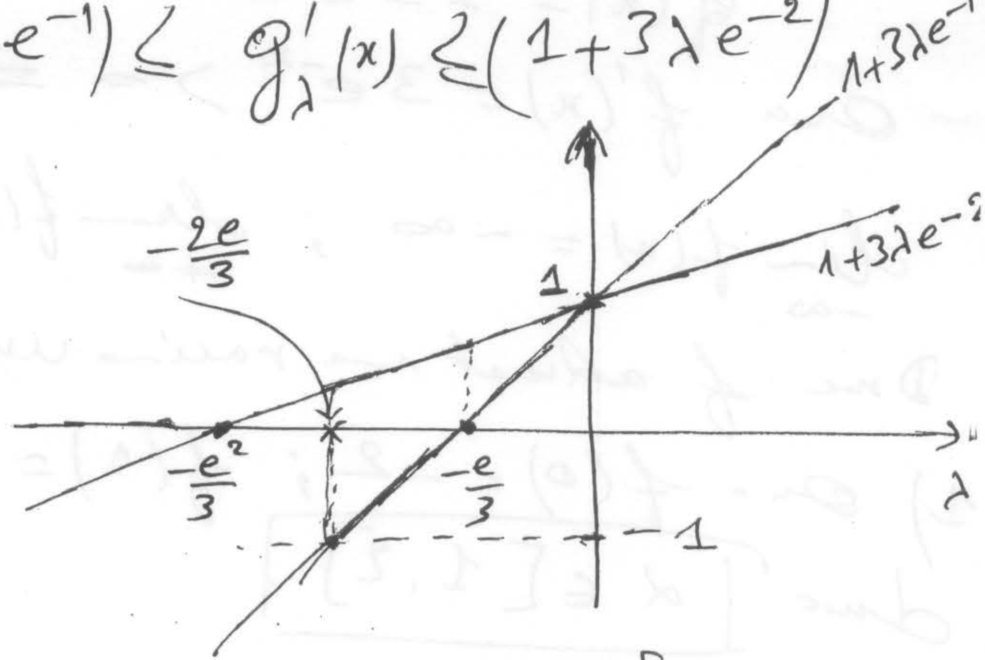
on a $g''(x) = -3\lambda e^{-x} > 0$

$\rightarrow g'(x)$ est croissante.

On a $g'_\lambda(x)$ est croissante $(\lambda < 0)$.

donc on a $\quad g'_\lambda(1) \leq g'_\lambda(x) \leq g'_\lambda(2)$

$\Rightarrow \quad (1 + 3\lambda e^{-1}) \leq g'_\lambda(x) \leq (1 + 3\lambda e^{-2})$



Donc

On doit choisir $\lambda \in \left]-\frac{2e}{3}, 0\right[$.

On a $\begin{cases} g_\lambda(1) = 1 + \lambda - 3\lambda e^{-1} = 1 + \lambda \cdot \frac{e-3}{e} > 1 \\ g_\lambda(2) = 2 + \lambda - 3\lambda e^{-2} = 2 + \lambda \cdot \frac{e^2-3}{e^2} < 2 \end{cases}$

Pour $\lambda = -\frac{e}{3}$; on a :

$|g'_\lambda(x)| < 1 + 3\lambda e^{-2} = 1 - e^{-1} < 1.$

$g_\lambda([1,2]) = [g_\lambda(1), g_\lambda(2)] \subset [1,2]$

$(g_\lambda(x)$ croissante$)$

Donc la suite définie par $\begin{cases} x_{n+1} = g_\lambda(x_n) \; ; \lambda = -\frac{e}{3}. \\ x_0 \in [1,2] \end{cases}$

CV vers α

$g(x) = x + \lambda f(x) = x + \lambda - 3\lambda e^{-x}$

$g'(x) = 1 + 3\lambda e^{-x}$ $\begin{cases} \lambda > 0 \Rightarrow \text{divergence} \\ \lambda < 0 \ ?? \end{cases}$

$g''(x) = -3\lambda e^{-x} > 0 \Rightarrow g'(x) \nearrow$

$\Rightarrow g'(1) \leq g'(x) \leq g'(2) \Rightarrow \boxed{1 + \frac{3}{e}\lambda \leq g'(x) \leq 1 + \frac{3}{e^2}}$

$1 + \frac{3}{e}\lambda > -1 \Leftrightarrow \frac{3}{e}\lambda > -2 \Leftrightarrow \boxed{\lambda > -\frac{2e}{3}}$

donc $\boxed{\lambda \in \left]-\frac{2e}{3}, 0\right[}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3\lambda}{e^x} = -1 \Leftrightarrow$

$g(1) = 1 + \lambda - 3\lambda e^{-1} > 1$?

$\lambda - 3\lambda e^{-1} > 0$

$\lambda(1 - \frac{3}{e}) > 0$ vérifiée

$g(2) = 2 + \lambda - 3\lambda e^{-2} < 2$

$\lambda - \frac{3\lambda}{e^2} < 0$

$\lambda\left(\frac{e^2 - 3}{e^2}\right) < 0$ vérifiée

On a $g'_\lambda(x)$ ~~croissante~~ croissante, donc sur $[1,2]$,

on a :
$$g'_\lambda(1) \leq g'_\lambda(x) \leq g'_\lambda(2)$$

$$\Rightarrow (1+3\lambda e^{-1}) \leq g'_\lambda(x) \leq (1+3\lambda e^{-2})$$

Donc $|g'_\lambda(x)| \leq \max\{|1+3\lambda e^{-1}|, |1+3\lambda e^{-2}|\}$

1° cas $1+3\lambda e^{-1} > 0$ alors $1+3\lambda e^{-2} > 0$

$$\left.\begin{array}{l} |g'_\lambda(x)| < 1+3\lambda e^{-2} < 1 \\ \Rightarrow \frac{3}{e}\lambda > -1 \Rightarrow \lambda > -\frac{e}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lambda \in \left[-\frac{e}{3}, 0\right[}$$

Exemple si $\boxed{\lambda = -\frac{e}{3}}$

$$g'_\lambda(x) = 1 - e^{1-x}$$

$$\Rightarrow 1 - e^0 = 0 \leq g_\lambda(x) \leq 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e} < 1$$

$$g_\lambda(x) = x - \frac{e}{3}(1-3e^{-x}) = x - \frac{e}{3} + e^{1-x}$$

$$g''_\lambda(x) = e^{1-x} > 0$$

2° cas $1+3\lambda e^{-2} < 0$ alors $1+3\lambda e^{-1} < 0$

$$|g'_\lambda(x)| \leq |1+3\lambda e^{-1}| = -1-3\lambda e^{-1} < 1$$

$$-3\lambda e^{-1} < 2$$

$$\lambda > -\frac{2e}{3}$$

$$\frac{3\lambda}{e^2} < -1 \Rightarrow \lambda < -\frac{e^2}{3}$$

$$3\lambda < -e^2$$

$$1, 3\lambda \, 1 - e < -1$$

-2 $\quad -e \quad 0$

Université Hassan II Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia
Département de Mathématiques

Parcours MIP
8 Janvier 2015

Module M148 : Analyse Numérique

Partiel

N.B. : Il sera tenu compte de la clareté de la copie.

---

x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{1}{2}-\ln 2<0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 1

Soient les deux fonctions suivantes :

$$f(x) = x \quad et \quad g(x) = \ln(1 + 2\,x)$$

On note $h(x) = f(x) - g(x)$. $\Rightarrow x - \ln(1+2x)$; $h'(x) = 1 - \frac{2}{1+2x} = \frac{2x-1}{2x+1}$

1. Montrer qu'il existe deux valeurs pour lesquelles h s'annule : une valeur évidente (laquelle ?) et une valeur que l'on note α. Localiser α dans un intervalle $I = [n, n+1]$ où n est un entier. On a $h(0) = 0$, donc 0 racine triviale

On a $h(1) = 1 - \ln(3) < 0$, $h(2) = 2 - \ln(4) > 0$ $\Rightarrow \alpha \in [1, 2]$

2. Pour approcher α, on définit la suite suivante :

On a $g'(x) = \frac{2}{1+2x}$

On a $|g'(x)| < g'(1) = 2/3$

$$\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = g(x_n)\ ,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer que cette suite converge bien vers α. Calculer deux itérés en prenant $x_0 = \frac{6}{5}$. $\Rightarrow x_1 = \ln(1 + \frac{12}{5}) = \ln(17/5)$

$x_2 = \ln(1 + 2x_1) = \dots$

3. Ecrire la méthode de Newton qui permet de trouver une approximation de α. Calculer deux itérés en partantde $x_0 = \frac{6}{5}$.

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n - \ln(1+2x_n))}{\frac{2x_n - 1}{2x_n+1}} \end{cases}$$

Exercice 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

1. Quel est le polynôme d'interpolation P de f exprimé dans la base canonique et construit sur les abscisses suivants :

$$x_0 = 0\ ,\ x_1 = 1\ ,\ x_2 = 2\ ,\ x_3 = 3 \longrightarrow y_0 = 1, y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{3}, y_3 =$$

2. Calculer $P(\frac{3}{2})$. Donner une borne supérieure de l'erreur commise. Comparer à l'erreur exacte.

$$\int_0^{3h} x^k\,dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^{3h} = \frac{(3h)^{k+1}}{k+1}$$

$k=0\ ;\ f=1 \Rightarrow A+B = 3h$

$k=1\ ;\ f=x \Rightarrow A+2B = \frac{9h^2}{2}$ $\Rightarrow \begin{cases} B = 3h/2 \\ A = \end{cases}$

Exercice 3

On désire développer une formule d'intégration numérique, dans l'intervalle $[0, 3h]$, qui est de la forme

$$\int_0^{3h} f(x)dx \simeq Af(h) + Bf(2h)$$

1. Déterminer les valeurs de A et B de sorte que cette formule ait un degré de précision le plus élevé possible.

2. Utiliser cette formule pour calculer la valeur approchée de l'intégrale

$$\int_0^3 e^{-x^2}dx \qquad (*)$$

3. Estimer l'intégrale (*) avec la méthode Simpson composée où n=2m=6.

Exercice 4

On veut résoudre le système linéaire $Ax = b$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad et \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que la méthode de Gauss **(sans pivotage)** ne peut être exécuté jusqu'au bout.

2. Trouver une matrice de permutation P telle que la matrice $B = PA$ soit factorisable (c-à-d telle que la méthode de Gauss puisse être exécuté jusqu'au bout).

3. Trouver une factorisation LU de la matrice B puis utiliser la pour résoudre le système de départ $Ax = b$.

Partiel M 148 — 8 janvier 2015

Exercice 1

$f(x) = x$; $g(x) = \ln(1+2x)$

$h(x) = f(x) - g(x) = x - \ln(1+2x)$; $D_h =]-\frac{1}{2}, +\infty[$

1) On a $h'(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$ $\Rightarrow$

x	$-1/2$		0		$\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
h'			$-$		0		$+$		
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{1}{2} - \ln 2 \simeq -0{,}193 < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'après T.V $h(x)$ admet 2 racines.

0,5 On a $h(0) = 0$ (racine évidente)

La 2ème racine est $> 1/2$.

on a $h(x)$ cont $\nearrow$ sur $[1/2, +\infty[$.

on a aussi $h(1) = 1 - \ln(3) \simeq$

$h(2) = 2 - \ln(4) \simeq$

1,5 Donc $\boxed{\alpha \in [1, 2] = I}$

2) sur la suite $\begin{cases} x_0 \in [1, 2] \\ x_{n+1} = \ln(1 + 2x_n) = g(x_n) \end{cases}$

On a $g(x) = \ln(1+2x)$

$\Rightarrow g'(x) = \frac{2}{1+2x}$; $g''(x) = \frac{-4}{(1+2x)^2} < 0 \quad \forall x \in D_g$.

donc $g'(x) \searrow \Rightarrow \frac{2}{5} = g'(2) \leq g'(x) \leq g'(1) = 2/3$

0,5 C/c $\forall x \in I$, $|g'(x)| \leq 2/3 < 1$

et on a $g(x) \nearrow$ sur $I \Rightarrow g(I) \subset [g(1), g(2)] = [\ln 3, \ln 5] \subset I$

1,5 enfin on a $g(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow (x = \alpha)$

Donc la suite (x_n) cv bien vers α $\forall x_0 \in I$. 3,5

$x_0 = \frac{6}{5}$ (1,2), $x_1 = g(x_0) = \ln\frac{17}{5} \simeq 1{,}2$ 0,5

0,5 $x_2 = g(x_1) \simeq 1{,}2376608$

3) Méthode Newton

1 $\begin{cases} x_0 \in V(\alpha) \\ x_{n+1} = \frac{(1+2x_n)\ln(1+2x_n) - \dots}{2x_n - 1} \end{cases}$

1 $x_0 = 6/5 \Rightarrow x_1 = \frac{17}{7}\ln\left(\frac{17}{5}\right) - \dots \simeq 1{,}257740$

$x_2 \simeq 1{,}256431$

Exercice 2 $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

$$\begin{cases} x_i = 0, 1, 2, 3 \\ y_i = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \end{cases}$$

Newton

0	1			
1	1/2	−1/2		
2	1/3	−1/6	1/6	
3	1/4	−1/12	1/24	−1/24

$$P(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x(x-1) - \frac{1}{24}x(x-1)(x-2)$$

(1)

$$= L_0(x) + \frac{1}{2}L_1(x) + \frac{1}{3}L_2(x) + \frac{1}{4}L_3(x)$$

Lagrange $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{3} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$

$$\Rightarrow P(x) = 1 - \frac{3}{4}x + \frac{7}{24}x^2 - \frac{1}{24}x^3$$

0,1

2) $P(3/2) = \frac{25}{64} \simeq 0{,}390625$

0,1

Erreur $e_3(f) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot x(x-1)(x-2)(x-3), \ \xi \in [0,3]$

erreur exacte: $f(3/2) - P(3/2) = \frac{2}{5} - \frac{25}{64} = \frac{3}{320} \simeq 0{,}009375$

0,1

Majoration de l'erreur

$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$; $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$; $f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$, $f^{(4)} = \frac{24}{(1+x)^5}$...

$f^{(5)} < 0 \Rightarrow f^{(4)} \downarrow \Rightarrow |f^{(4)}(\xi)| \leq |f^{(4)}(0)| = 24$

d'où $|e_3(f)| \leq \frac{24}{24} \cdot \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)\left(\frac{3}{2}-3\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| \left|-\frac{3}{2}\right|$

$$\Rightarrow |e_3(f)| \leq \frac{9}{16} \simeq 0{,}5625.$$

1+0,5

Ex3

$$\int_0^{3h} f(x)\,dx \simeq A f(h) + B f(2h) \quad *$$

1) $\displaystyle\int_0^{3h} x^k\,dx = \frac{(3h)^{k+1}}{k+1}$

(1) $k=0 \Rightarrow \begin{cases} A+B = 3h \\ A+2B = \frac{9h}{2} \end{cases}$ $k=1$ $\rightarrow$ $\underline{A = B = 3h/2}$

degré précision ≥ 1

0,5 $k=2$; $(*) \Rightarrow \frac{3h}{2}(h^2+4h^2) = \frac{15h^3}{2}$ et $\int_0^{3h} x^2\,dx = 9h^3$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ $\underline{\text{degré de précision} = 1}$.

2) $\displaystyle\int_0^3 e^{-x^2}\,dx \simeq \frac{3}{2}\left(e^{-1}+e^{-4}\right) = 0,5792926$

(1)

3) Méthode de Simpson

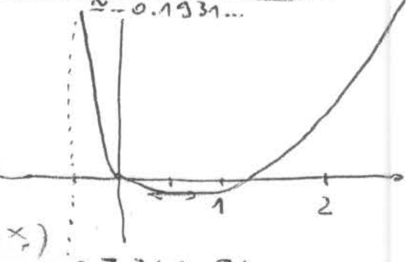
3,5

Corrigé Partiel 8/01/2015

Exercice 1

$$h(x) = x - \ln(1+2x) \quad , \quad h'(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$$

x	$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2} - \ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$
			$\simeq -0.1931\ldots$		



) h s'annule en 0 et en $\alpha \in [1,2]$

) $g(x) = \ln(1+2x)$, $g'(x) = \frac{2}{1+2x}$, $g''(x) = -\frac{4}{(1+2x)^2} < 0$, $\forall x \in D_g$

On a : $g'(2) < g'(\alpha) < g'(1)$ soit $\frac{2}{5} < \alpha < \frac{2}{3}$. ie $|g'(\alpha)| < 1$

La suite (x_n) converge donc vers α. (avec un bon choix de x_0)

$x_0 = \frac{6}{5}$; $x_1 = g(x_0) = \ln\frac{17}{5} \simeq \underline{1.2}2377 5432\ldots$; $x_2 = g(x_1) = \ln\left(1 + 2\ln\frac{17}{5}\right) \simeq \underline{1.2}3766084\ldots$

) méthode de Newton : $\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n - \ln(1+2x_n))(1+2x_n)}{2x_n - 1} \end{cases}$

$\underset{=\underline{1.2}}{x_0 = \frac{6}{5}}$; $x_1 = -\frac{12}{7} + \frac{17}{7}\ln\left(\frac{17}{5}\right) \simeq \underline{1.25}7740336$

$x_2 = \underline{1.25643}1851$; $x_3 = \underline{1.256431205}$

(valeur exacte est : $-\mathrm{LambertW}\left(-1, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2} \simeq 0.125643120862618\ldots$

Exercice 2

$f(x) = \frac{1}{1+x}$

0	1			
1	1/2	-1/2		
2	1/3	-1/6	1/6	
3	1/4	-1/12	1/24	-1/24

1) $P(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x(x-1) - \frac{1}{24}x(x-1)(x-2)$

$= 1 - \frac{3}{4}x + \frac{7}{24}x^2 - \frac{1}{24}x^3$

$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, $f^{(3)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}$, $f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$

2) $P(3/2) = \frac{25}{64} \simeq 0.390625$. $e_3(f) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x\cdot(x-1)(x-2)(x-3)$, $\xi \in (0,3)$

$|e_3(f)|_{x=3/2} \leq \frac{1}{\cancel{\ \ }}\cdot \underset{=0.5625}{\frac{9}{16}} \cancel{= \frac{9}{16384} \simeq 0.000549316406\ldots}$ $\left(f^{(4)}(0) = 24,\ f^{(4)}(3) = \frac{3}{128}\right)$

L'erreur exacte est : $\frac{3}{320} = 0.009375$

Exercice 3

1) $\begin{cases} A + B = 3h \\ Ah + 2Bh = \frac{9h^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{2}h \\ B = \frac{3}{2}h \end{cases}$

2) $\int_0^3 f(x)\,dx \simeq \frac{3}{2}f(1) + \frac{3}{2}f(2)$

$\int_0^3 e^{-x^2}dx \simeq \frac{3}{2}\left(e^{-1} + e^{-4}\right) = 0{,}5792926201\ldots$

La méthode de Simpson donne :

$\int_0^3 f(x)\,dx \simeq \frac{1}{6}\left(f(0) + 2(f(1) + f(2)) + 4\left(f(\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{3}{2}) + f(\tfrac{5}{2})\right) + f(3)\right)$

$\simeq 0.8861725696\ldots$

(La valeur exacte est : $\frac{1}{2}\mathrm{erf}(3)\sqrt{\pi} \simeq 0.8862073485\ldots$)

Exercice 4

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & 2 & 5 & \vdots & 2 \\ 4 & 6 & 8 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 4 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$ — $2^{\text{ème}}$ pivot

Le $2^{\text{ème}}$ pivot rencontré est nul

Suite exercice 4

2) On prend : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $PA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 4 & 6 & 8 & \vdots & 5 \\ 2 & 2 & 5 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$

3) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L\underbrace{Ux}_{y} = \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = \tilde{b} \\ Ux = y \end{cases}$

$Ly = \tilde{b} \Leftrightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Ux = y \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques 15 Novembre 2013

Pr. J. Abouir, Pr. B. Benouahmane

Module M312 : Analyse Numérique

Partiel 1

Durée : 1h30

N.B. : Il sera tenu compte de la clareté de la copie. Documents non autorisés.

Exercice 1

1/ Effectuer les opérations suivantes en arithmétique flottante à 3 chiffres :

a/ 2136 (9993+0.004567)

b/ $(1.235)^4$.

2/ Donner une façon d'évaluer les expressions suivantes qui permette d'éviter le plus possible les erreurs dûes à l'arithmétique flottante :

a/ $\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ pour des valeurs de θ autour de $\frac{\pi}{4}$

b/ $p(x) = 1 = 2\,x + 3\,x^2 - 4\,x^3$ pour $x = 2$.

Exercice 2

Soit $f(x)$ une fonction qui passe par les points

$$M_0 = (0, 3)\,,\ M_1 = (2, -1)\,,\ M_2 = (5, 8)$$

a/ A l'aide de l'interpolation de Lagrange, trouver le polynôme d'interpolation de degré 2 qui passe par les points M_0, M_1 et M_2 et proposer une approximation de $f(3)$.

b/ On sait aussi que $f'(0) = 6$. Calculer le polynôme d'interpolation de degré minimal passant par les points M_0, M_1 et M_2 dont la dérivée en $x = 0$ est égale à 6.

33

Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques 18 Novembre 2018

Pr. J. Abouir, Pr. B. Benouahmane

Module M312 : Analyse Numérique

Partiel 1

Durée : 1h30

N.B. : Il sera tenu compte de la clarté de la copie. Documents non autorisés.

Exercice 1

1) Effectuer les opérations suivantes en arithmétique flottante à 4 chiffres :

a) $2136\,(9993 + 0.004567)$

b) $(1.269)^4$

2) Donner une façon d'évaluer les expressions suivantes qui permette d'éviter le plus possible les erreurs dues à l'arithmétique flottante :

a) $\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ pour des valeurs de θ voisine de $\frac{\pi}{4}$

b) $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 - 4x^3$ pour $x = 2$

Exercice 2

Soit P_n un polynôme qui passe par les points

[illegible]

Examen - Novembre 2013

Exercice 3

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

$$Q(f) = w_0 f(-\alpha) + w_1 f(0) + w_2 f(\alpha)$$

$\alpha \in [0,1]$.

1) Soit $P \in \mathbb{P}_2 \iff P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$; $a_i \in \mathbb{K}$

On a $I(P) = I(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$
$= a_0 I(1) + a_1 I(x) + a_2 I(x^2)$

$Q(P) = Q(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$
$= a_0 Q(1) + a_1 Q(x) + a_2 Q(x^2)$

Alors $I(P) = Q(P) \iff \begin{cases} I(1) = Q(1) \\ I(x) = Q(x) \\ I(x^2) = Q(x^2) \end{cases}$ (S)

2) On a $I(P) = Q(P) \iff \begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 = 2 \\ \alpha(w_2 - w_0) = 0 \\ \alpha^2(w_0 + w_2) = 2/3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} w_0 = w_2 = 1/3\alpha^2 \\ w_1 = 2 - 2/3\alpha^2 \end{cases}$

3) Pour $\alpha = 1$: $\begin{cases} w_0 = w_2 = 1/3 \\ w_1 = 4/3 \end{cases}$

D'où $I(f) \simeq Q(f) = \frac{1}{3}\left(f(-1) + 4f(0) + f(1)\right)$

4) On a d'après la question 2 : $I(x^k) = Q(x^k)$; $k \leq 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_0 = w_2 = \dfrac{1}{3\alpha^2} \\ w_1 = 2 - \dfrac{2}{3\alpha^2} \end{cases}$$

pour $k=3$: $I(x^3) = Q(x^3) \Rightarrow \alpha^3 \underbrace{(w_2 - w_0)}_{\text{déjà vérifiée.}} = 0$

pour $k=4$: $I(x^4) = Q(x^4) \Rightarrow \dfrac{2}{5} = \alpha^4 (w_0 + w_2)$.

avec $(w_0 + w_2) = \dfrac{2}{3\alpha^2}$.

d'où $\dfrac{2}{5} = \alpha^4 \cdot \dfrac{2}{3\alpha^2}$

$\Rightarrow \alpha^2 = \dfrac{3}{5} \Longrightarrow \boxed{\alpha = \sqrt{\dfrac{3}{5}}}$.

pour $k=5$: $I(x^5) = Q(x^5) \Leftrightarrow \underbrace{\alpha^5 (w_2 - w_0) = 0}_{\text{vérifiée.}}$

pour $k=6$: $\begin{cases} I(x^6) = \dfrac{2}{7}. \\ Q(x^6) = \alpha^6 (w_0 + w_2) = \alpha^6 \cdot \dfrac{2}{3\alpha^2} = \dfrac{2\alpha^4}{3} \\ \qquad = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{9}{25} = \dfrac{6}{25} \end{cases}$

$\Rightarrow I(x^6) \neq Q(x^6)$.

Donc la formule $Q(f)$ est exacte jusqu'à $\boxed{n=5}$

D'où la formule :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

5) Pour $\int_0^1 f(t)dt$; on pose le changement de variables

$$x = 2t-1 \iff t = \frac{x+1}{2}.$$

D'où

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{x+1}{2}\right)\frac{dx}{2} = \int_{-1}^{1} g(x)\,dx$$

avec $g(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

D'où

$$\int_0^1 f(t)\,dt \simeq \frac{5}{9} g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} g(0) + \frac{5}{9} g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^1 f(t)\,dt \simeq \frac{5}{18} f\left(\frac{-\sqrt{\frac{3}{5}}+1}{2}\right) + \frac{8}{18} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{18} f\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{5}}+1}{2}\right)}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{-\sqrt{\frac{3}{5}}+1}{2} \\ b = \dfrac{\sqrt{\frac{3}{5}}+1}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \tilde{w}_0 = \tilde{w}_2 = \dfrac{5}{18} \\ \tilde{w}_1 = \dfrac{4}{9}. \end{cases}$$

91

~~Rattrap~~ Examen Novembre 201

Exercice 3

$$\left| \begin{array}{l} I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \\ Q(f) = w_0 f(-\alpha) + w_1 f(0) + w_2 f(\alpha) \ ; \ \alpha \in [0,1 \end{array} \right.$$

1) $p \in \mathcal{P}_2 \iff p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$I(P) = \int_{-1}^{1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\,dx = \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \frac{a_2}{3} x^3 \right]_{-}$$

$$\Rightarrow I(P) = 2a_0 + \frac{2a_2}{3}$$

$$Q(p) = w_0 (a_0 \cancel{+} a_1 \alpha + a_2 \alpha^2) + w_1 a_0 + w_2 (a_0 + a_1 \alpha + a_2$$

$$= (w_0 + w_1 + w_2) a_0 + (-\alpha w_0 + \alpha w_2) a_1 + (\alpha^2 w_0 + \alpha^2 w$$

$$a_2$$

$$I(P) = Q(P) \iff (S) \begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 = 2 \\ \alpha (w_2 - w_0) = 0 \\ \alpha^2 (w_0 + w_2) = 2/3 . \end{cases}$$

$$\begin{cases} I(1) = Q(1) \\ I(x) = Q(x) \\ I(x^2) = Q(x^2) \end{cases} \iff \begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 = 2 \\ \alpha (w_2 - w_0) = 0 \\ \alpha^2 (w_0 + w_2) = 2/3 \end{cases} \iff (S)$$

2) $$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 = 2 \\ \alpha (w_2 - w_0) = 0 \\ \alpha^2 (w_0 + w_2) = 2/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = w_2 = 1/3\alpha^2 \\ w_1 = 2 - \frac{2}{3\alpha^2} \end{cases}$$

3) Pour $\alpha = 1$; $\begin{cases} w_0 = w_2 = 1/3 \\ w_1 = 4/3 \end{cases}$ Simpson

$$\Rightarrow Q(f) = \frac{1}{3} \left(f(-1) + 4 f(0) + f(1) \right) = \frac{b-a}{6} (\ \_\_ \ )$$

4) On a $I(x^3) = Q(x^3) \iff \alpha^3 \underbrace{(w_2 - w_0)}_{\text{déjà vérifiée.}} = 0$

$I(x^4) = Q(x^4) \iff \frac{2}{5} = \alpha^4 (w_0 + w_2)$

et on a déjà d'après question 2 : $w_0 + w_2 = \frac{2}{3}$

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_{-1}^1 g(x)\,dx$$

$t = \cancel{ax+b}$
$u(x)$

$\cancel{\int_0^{1/2} f(t)\,dt + \int_{1/2}^1 f(t)\,dt}$

$\begin{cases} t = u(x) \\ x = v(t) \end{cases}$

$\begin{cases} v(0) = -1 \\ v(1) = 1 \end{cases}$

$x = At + b = v(t)$
$= At - 1$

$\boxed{x = 2t - 1}$
$\Updownarrow$
$\boxed{t = \frac{x+1}{2}}$

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} f\left(\frac{x+1}{2}\right) dx$$

$$= \int_{-1}^1 \underbrace{\frac{1}{2} f\left(\frac{x+1}{2}\right)}_{g(x).} dx$$

$$\simeq Q(g) = w_0\, g(-\alpha) + w_1\, g(0) + w_2\, g(\alpha)$$

$$= \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} f\left(\frac{-\sqrt{\frac{3}{5}}+1}{2}\right) + \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{18} f\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{5}}+1}{2}\right)$$

$$\boxed{\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{5}{18} f\left(\frac{-\sqrt{\frac{3}{5}}+1}{2}\right) + \frac{4}{9} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{18} f\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{5}}+1}{2}\right)}$$

$$Q(f) = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$