Chapitre 2: Théorème des accroissements finis

A. ELBOUR

Faculté des Sciences et Techniques
Errachidia

2022-2023

Plan

1. Théorème des accroissements finis lorsque la variable est réelle
2. Théorème des accroissements finis lorsque la variable est dans un e.v.n
3. Application du théorème des accroissements finis

Soient a et b deux points de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, le théorème classique des accroissements finis dit qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Ce résultat ne subsiste pas si l'application f est à valeurs dans un e.v.n réel E de dimension supérieur ≥ 2. Il suffit pour s'en convaincre de considérer l'application

$$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \longmapsto (\cos t, \sin t)\ ;$$

on a $f(2\pi) = f(0)$ mais il n'existe aucun $c \in]0, 2\pi[$ tel que $f(2\pi) - f(0) = (2\pi - 0)f'(c)$.
Il est cependant très important pour les applications de pouvoir donner une majoration précise et simple de $\|f(b) - f(a)\|$ connaissant une majoration de $\|f'(x)\|$ sur $]a, b[$; et nous allons établir un théorème plus général. Avant de l'énoncer, il faut donner une définition.

Soient a et b deux points de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, le théorème classique des accroissements finis dit qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Ce résultat ne subsiste pas si l'application f est à valeurs dans un e.v.n réel E de dimension supérieur ≥ 2. Il suffit pour s'en convaincre de considérer l'application

$$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \longmapsto (\cos t, \sin t)\,;$$

on a $f(2\pi) = f(0)$ mais il n'existe aucun $c \in]0, 2\pi[$ tel que $f(2\pi) - f(0) = (2\pi - 0)f'(c)$.

Il est cependant très important pour les applications de pouvoir donner une majoration précise et simple de $\|f(b) - f(a)\|$ connaissant une majoration de $\|f'(x)\|$ sur $]a, b[$; et nous allons établir un théorème plus général. Avant de l'énoncer, il faut donner une définition.

Soient a et b deux points de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, le théorème classique des accroissements finis dit qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Ce résultat ne subsiste pas si l'application f est à valeurs dans un e.v.n réel E de dimension supérieur ≥ 2. Il suffit pour s'en convaincre de considérer l'application

$$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \longmapsto (\cos t, \sin t)\,;$$

on a $f(2\pi) = f(0)$ mais il n'existe aucun $c \in]0, 2\pi[$ tel que $f(2\pi) - f(0) = (2\pi - 0)f'(c)$.
Il est cependant très important pour les applications de pouvoir donner une majoration précise et simple de $\|f(b) - f(a)\|$ connaissant une majoration de $\|f'(x)\|$ sur $]a, b[$; et nous allons établir un théorème plus général. Avant de l'énoncer, il faut donner une définition.

Définition

Soient a et b deux points de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. On dit qu'une application $f : [a, b] \longrightarrow F$ admet une dérivée à droite en un point $t_0 \in [a, b[$ si

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

existe ; cette limite se note alors $f'_d(t_0)$ et s'appelle la dérivée à droite de f au point t_0. C'est un élément de F. Voir note 1

On définit de même, si elle existe, la dérivée à gauche de f en un point $t_0 \in]a, b]$:

$$f'_g(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Pour qu'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow F$ admette une dérivée $f'(t_0)$ en un point $t_0 \in]a, b[$, il faut et il suffit que $f'_d(t_0)$ et $f'_g(t_0)$ existent, et soient égales.

Définition

Soient a et b deux points de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. On dit qu'une application $f : [a, b] \longrightarrow F$ admet une dérivée à droite en un point $t_0 \in [a, b[$ si

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

existe ; cette limite se note alors $f'_d(t_0)$ et s'appelle la dérivée à droite de f au point t_0. C'est un élément de F. Voir note 1

On définit de même, si elle existe, la dérivée à gauche de f en un point $t_0 \in]a, b]$:

$$f'_g(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Pour qu'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow F$ admette une dérivée $f'(t_0)$ en un point $t_0 \in]a, b[$, il faut et il suffit que $f'_d(t_0)$ et $f'_g(t_0)$ existent, et soient égales.

Définition

Soient a et b deux points de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. On dit qu'une application $f : [a, b] \longrightarrow F$ admet une dérivée à droite en un point $t_0 \in [a, b[$ si

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

existe ; cette limite se note alors $f'_d(t_0)$ et s'appelle la dérivée à droite de f au point t_0. C'est un élément de F. Voir note 1
On définit de même, si elle existe, la dérivée à gauche de f en un point $t_0 \in]a, b]$:

$$f'_g(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Pour qu'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow F$ admette une dérivée $f'(t_0)$ en un point $t_0 \in]a, b[$, il faut et il suffit que $f'_d(t_0)$ et $f'_g(t_0)$ existent, et soient égales.

Théorème (fondamental)

Soient a et b deux points de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$, F un espace vectoriel normé. Soient $f : [a, b] \longrightarrow F$ et $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a, b]$.
On suppose que f et g possèdent des dérivées à droite en chaque point x de l'intervalle ouvert $]a, b[$ vérifiant l'inégalité

$$\|f'_d(x)\| \leq g'_d(x), \quad \forall x \in]a, b[.$$

Alors on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Démonstration.

Nous allons prouver que pour tout sous-intervalle $[u, v]$ de $]a, b[$ on a

$$\|f(v) - f(u)\| \leq g(v) - g(u). \tag{1}$$

En faisant tendre u vers a et v vers b et en tenant compte de la continuité de f et g, on obtient

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Soit donc $[u, v]$ un sous-intervalle de $]a, b[$ (avec $u < v$). Pour établir l'inégalité (1), il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in [u, v]$ on a :

$$\|f(x) - f(u)\| \leq g(x) - g(u) + \varepsilon(x - u). \tag{2}$$

En effet, en appliquant l'inégalité (2) pour $x = v$, puis en faisant tendre ε vers 0, on obtiendra l'inégalité (1). □

Démonstration.

Nous allons prouver que pour tout sous-intervalle $[u, v]$ de $]a, b[$ on a

$$\|f(v) - f(u)\| \leq g(v) - g(u). \tag{1}$$

En faisant tendre u vers a et v vers b et en tenant compte de la continuité de f et g, on obtient

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Soit donc $[u, v]$ un sous-intervalle de $]a, b[$ (avec $u < v$). Pour établir l'inégalité (1), il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in [u, v]$ on a :

$$\|f(x) - f(u)\| \leq g(x) - g(u) + \varepsilon(x - u). \tag{2}$$

En effet, en appliquant l'inégalité (2) pour $x = v$, puis en faisant tendre ε vers 0, on obtiendra l'inégalité (1). □

Démonstration.

Soit donc $\varepsilon > 0$ donné, et soit I_ε l'ensemble des points $x \in [u, v]$ pour lesquels on a

$$\|f(t) - f(u)\| \leq g(t) - g(u) + \varepsilon(t - u), \quad \forall t \in [u, x] \tag{3}$$

Il s'agit de montrer que $I_\varepsilon = [u, v]$. Puisque l'ensemble $I_\varepsilon \subset [u, v]$ est non vide (car $u \in I_\varepsilon$) et majoré, $c = \sup I_\varepsilon$ existe, et on a $u \leq c \leq v$. Montrons d'abord que $I_\varepsilon = [u, c]$. Évidement on a $I_\varepsilon \subset [u, c]$. Si $c = u$, le résultat est évident car dans ce cas I_ε se réduit au singleton $\{u\}$. Supposons donc $c > u$. Soit $x \in [u, c[$. Par définition de la borne supérieure, il existe $x' \in I_\varepsilon$ tel que $x < x'$. Puisque l'inégalité (3) est vraie pour tout $t \in [u, x']$, elle est aussi vraie pour tout $t \in [u, x]$. Donc $x \in I_\varepsilon$. Cela montre que $[u, c[\subset I_\varepsilon$.
D'autre part, l'inégalité (3) est vraie pour chaque $t \in [u, c[$, donc aussi pour $t = c$ (puisque f et g sont continues), ce qui prouve que $c \in I_\varepsilon$. D'où $I_\varepsilon = [u, c]$. Voir note 2

Démonstration.

Soit donc $\varepsilon > 0$ donné, et soit I_ε l'ensemble des points $x \in [u, v]$ pour lesquels on a

$$\|f(t) - f(u)\| \leq g(t) - g(u) + \varepsilon(t - u), \quad \forall t \in [u, x] \tag{3}$$

Il s'agit de montrer que $I_\varepsilon = [u, v]$. Puisque l'ensemble $I_\varepsilon \subset [u, v]$ est non vide (car $u \in I_\varepsilon$) et majoré, $c = \sup I_\varepsilon$ existe, et on a $u \leq c \leq v$.
Montrons d'abord que $I_\varepsilon = [u, c]$. Évidement on a $I_\varepsilon \subset [u, c]$. Si $c = u$, le résultat est évident car dans ce cas I_ε se réduit au singleton $\{u\}$. Supposons donc $c > u$. Soit $x \in [u, c[$. Par définition de la borne supérieure, il existe $x' \in I_\varepsilon$ tel que $x < x'$. Puisque l'inégalité (3) est vraie pour tout $t \in [u, x']$, elle est aussi vraie pour tout $t \in [u, x]$. Donc $x \in I_\varepsilon$. Cela montre que $[u, c[\subset I_\varepsilon$.
D'autre part, l'inégalité (3) est vraie pour chaque $t \in [u, c[$, donc aussi pour $t = c$ (puisque f et g sont continues), ce qui prouve que $c \in I_\varepsilon$.
D'où $I_\varepsilon = [u, c]$. Voir note 2

Démonstration.

Soit donc $\varepsilon > 0$ donné, et soit I_ε l'ensemble des points $x \in [u, v]$ pour lesquels on a

$$\|f(t) - f(u)\| \leq g(t) - g(u) + \varepsilon(t - u), \quad \forall t \in [u, x] \tag{3}$$

Il s'agit de montrer que $I_\varepsilon = [u, v]$. Puisque l'ensemble $I_\varepsilon \subset [u, v]$ est non vide (car $u \in I_\varepsilon$) et majoré, $c = \sup I_\varepsilon$ existe, et on a $u \leq c \leq v$. Montrons d'abord que $I_\varepsilon = [u, c]$. Évidement on a $I_\varepsilon \subset [u, c]$. Si $c = u$, le résultat est évident car dans ce cas I_ε se réduit au singleton $\{u\}$.
Supposons donc $c > u$. Soit $x \in [u, c[$. Par définition de la borne supérieure, il existe $x' \in I_\varepsilon$ tel que $x < x'$. Puisque l'inégalité (3) est vraie pour tout $t \in [u, x']$, elle est aussi vraie pour tout $t \in [u, x]$. Donc $x \in I_\varepsilon$. Cela montre que $[u, c[\subset I_\varepsilon$.
D'autre part, l'inégalité (3) est vraie pour chaque $t \in [u, c[$, donc aussi pour $t = c$ (puisque f et g sont continues), ce qui prouve que $c \in I_\varepsilon$.
D'où $I_\varepsilon = [u, c]$. Voir note 2

Démonstration.

Soit donc $\varepsilon > 0$ donné, et soit I_ε l'ensemble des points $x \in [u, v]$ pour lesquels on a

$$\|f(t) - f(u)\| \leq g(t) - g(u) + \varepsilon(t - u), \quad \forall t \in [u, x] \tag{3}$$

Il s'agit de montrer que $I_\varepsilon = [u, v]$. Puisque l'ensemble $I_\varepsilon \subset [u, v]$ est non vide (car $u \in I_\varepsilon$) et majoré, $c = \sup I_\varepsilon$ existe, et on a $u \leq c \leq v$. Montrons d'abord que $I_\varepsilon = [u, c]$. Évidement on a $I_\varepsilon \subset [u, c]$. Si $c = u$, le résultat est évident car dans ce cas I_ε se réduit au singleton $\{u\}$. Supposons donc $c > u$. Soit $x \in [u, c[$. Par définition de la borne supérieure, il existe $x' \in I_\varepsilon$ tel que $x < x'$. Puisque l'inégalité (3) est vraie pour tout $t \in [u, x']$, elle est aussi vraie pour tout $t \in [u, x]$. Donc $x \in I_\varepsilon$. Cela montre que $[u, c[\subset I_\varepsilon$.

D'autre part, l'inégalité (3) est vraie pour chaque $t \in [u, c[$, donc aussi pour $t = c$ (puisque f et g sont continues), ce qui prouve que $c \in I_\varepsilon$. D'où $I_\varepsilon = [u, c]$. Voir note 2

Démonstration.

Soit donc $\varepsilon > 0$ donné, et soit I_ε l'ensemble des points $x \in [u, v]$ pour lesquels on a

$$\|f(t) - f(u)\| \leq g(t) - g(u) + \varepsilon(t - u), \quad \forall t \in [u, x] \tag{3}$$

Il s'agit de montrer que $I_\varepsilon = [u, v]$. Puisque l'ensemble $I_\varepsilon \subset [u, v]$ est non vide (car $u \in I_\varepsilon$) et majoré, $c = \sup I_\varepsilon$ existe, et on a $u \leq c \leq v$. Montrons d'abord que $I_\varepsilon = [u, c]$. Évidement on a $I_\varepsilon \subset [u, c]$. Si $c = u$, le résultat est évident car dans ce cas I_ε se réduit au singleton $\{u\}$. Supposons donc $c > u$. Soit $x \in [u, c[$. Par définition de la borne supérieure, il existe $x' \in I_\varepsilon$ tel que $x < x'$. Puisque l'inégalité (3) est vraie pour tout $t \in [u, x']$, elle est aussi vraie pour tout $t \in [u, x]$. Donc $x \in I_\varepsilon$. Cela montre que $[u, c[\subset I_\varepsilon$.
D'autre part, l'inégalité (3) est vraie pour chaque $t \in [u, c[$, donc aussi pour $t = c$ (puisque f et g sont continues), ce qui prouve que $c \in I_\varepsilon$.
D'où $I_\varepsilon = [u, c]$. Voir note 2

Démonstration.

Il reste donc à établir que $c = v$. Supposons $c < v$. L'existence de $f'_d(c)$ et $g'_d(c)$ entrainent celle d'un nombre $h > 0$ (auquel nous pouvons imposer de vérifier $h \leq v - c$) tel que, pour tout $t \in]c, c+h]$ on a à la fois

$$\left\| \frac{f(t)-f(c)}{t-c} - f'_d(c) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{g(t)-g(c)}{t-c} - g'_d(c) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Voir note 3

En tenant compte de $\|f'_d(c)\| \leq g'_d(c)$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit les inégalités Voir note 4

$$\left\| \frac{f(t)-f(c)}{t-c} \right\| \leq \|f'_d(c)\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq g'_d(c) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{g(t)-g(c)}{t-c} + \varepsilon,$$

Démonstration.

Il reste donc à établir que $c = v$. Supposons $c < v$. L'existence de $f'_d(c)$ et $g'_d(c)$ entrainent celle d'un nombre $h > 0$ (auquel nous pouvons imposer de vérifier $h \leq v - c$) tel que, pour tout $t \in]c, c+h]$ on a à la fois

$$\left\| \frac{f(t)-f(c)}{t-c} - f'_d(c) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{g(t)-g(c)}{t-c} - g'_d(c) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Voir note 3

En tenant compte de $\|f'_d(c)\| \leq g'_d(c)$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit les inégalités Voir note 4

$$\left\| \frac{f(t)-f(c)}{t-c} \right\| \leq \|f'_d(c)\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq g'_d(c) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{g(t)-g(c)}{t-c} + \varepsilon,$$

Démonstration.

d'où

$$\|f(t) - f(c)\| \leq g(t) - g(c) + \varepsilon(t - c);$$

et puisque $c \in I_\varepsilon$,

$$\|f(c) - f(u)\| \leq g(c) - g(u) + \varepsilon(c - u).$$

Donc :

$$\|f(t) - f(u)\| \leq g(t) - g(u) + \varepsilon(t - u);$$

pour tout $t \in]c, c + h]$ (et par suite pour tout $t \in [u, c + h]$), ce qui montre que $c + h \in I_\varepsilon$, ce qui contredit le fait que $c = \sup I_\varepsilon$. On a donc $c = v$.
Cela montre que $I_\varepsilon = [u, v]$, c'est-à-dire, l'inégalité (2) est satisfaite pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in [u, v]$. □

Démonstration.

d'où

$$\|f(t) - f(c)\| \leq g(t) - g(c) + \varepsilon(t - c);$$

et puisque $c \in I_\varepsilon$,

$$\|f(c) - f(u)\| \leq g(c) - g(u) + \varepsilon(c - u).$$

Donc :

$$\|f(t) - f(u)\| \leq g(t) - g(u) + \varepsilon(t - u);$$

pour tout $t \in]c, c + h]$ (et par suite pour tout $t \in [u, c + h]$), ce qui montre que $c + h \in I_\varepsilon$, ce qui contredit le fait que $c = \sup I_\varepsilon$. On a donc $c = v$.

Cela montre que $I_\varepsilon = [u, v]$, c'est-à-dire, l'inégalité (2) est satisfaite pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in [u, v]$. □

Démonstration.

d'où

$$\|f(t) - f(c)\| \leq g(t) - g(c) + \varepsilon(t - c);$$

et puisque $c \in I_\varepsilon$,

$$\|f(c) - f(u)\| \leq g(c) - g(u) + \varepsilon(c - u).$$

Donc :

$$\|f(t) - f(u)\| \leq g(t) - g(u) + \varepsilon(t - u);$$

pour tout $t \in]c, c + h]$ (et par suite pour tout $t \in [u, c + h]$), ce qui montre que $c + h \in I_\varepsilon$, ce qui contredit le fait que $c = \sup I_\varepsilon$. On a donc $c = v$.
Cela montre que $I_\varepsilon = [u, v]$, c'est-à-dire, l'inégalité (2) est satisfaite pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in [u, v]$. □

Remarques

1. *Sous les hypothèses du théorème 5 on a*

$$\|f(v) - f(u)\| \leq g(v) - g(u)$$

quels que soient $u, v \in [a, b]$ *vérifiant* $u \leq v$.

2. *Le théorème 5 reste vraie si on y remplace les mots "dérivée à droite" par "dérivée à gauche". Il suffit d'appliquer le théorème 5 aux fonctions* $x \longmapsto -f(-x)$ *et* $x \longmapsto -g(-x)$.

Voir note 5

Cas particuliers importants :

En prenant $f(x) = 0$ quel que soit $x \in [a, b]$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire

Si $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continue et possède une dérivée à droite* $g'_d(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in]a, b[$, *alors* g *est croissante.*

Remarques

1. *Sous les hypothèses du théorème 5 on a*

$$\|f(v) - f(u)\| \leq g(v) - g(u)$$

quels que soient $u, v \in [a, b]$ *vérifiant* $u \leq v$.

2. *Le théorème 5 reste vraie si on y remplace les mots "dérivée à droite" par "dérivée à gauche". Il suffit d'appliquer le théorème 5 aux fonctions* $x \longmapsto -f(-x)$ *et* $x \longmapsto -g(-x)$.

Voir note 5

Cas particuliers importants :

En prenant $f(x) = 0$ quel que soit $x \in [a, b]$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire

Si $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continue et possède une dérivée à droite* $g'_d(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in]a, b[$, *alors* g *est croissante.*

En prenant $g(x) = kx$ (k étant une constante positive), on obtient le résultat suivant :

Corollaire

Soit $f : [a, b] \longrightarrow F$ une application continue sur $[a, b]$ dans un e.v.n F, admettant en chaque point $x \in]a, b[$ une dérivée à droite vérifiant $\left\|f'_d(x)\right\| \leq k$, alors on a :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq k(b - a)$$

et, plus généralement :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k|x - y|$$

quels que soient $x, y \in [a, b]$.

En particulier, si $k = 0$ dans le corollaire 11, on obtient :

Corollaire

Soit $f : [a, b] \longrightarrow F$ une application continue sur $[a, b]$ dans un e.v.n F, admettant en chaque point $x \in]a, b[$ une dérivée à droite nulle. Alors f est constante sur $[a, b]$.

Plan

1 Théorème des accroissements finis lorsque la variable est réelle

2 Théorème des accroissements finis lorsque la variable est dans un e.v.n

3 Application du théorème des accroissements finis

Définition

Soient a et b deux points d'un e.v.n E. On appelle segment d'extrémités a et b, et on note $[a,b]$, l'ensemble des points $z \in E$ de la forme

$$z = (1-t)a + tb, \ \text{avec}\ 0 \leq t \leq 1.$$

En d'autres termes, $[a,b] = \{a + t(b-a)\,;\, 0 \leq t \leq 1\}$.
Une partie A de E est dite convexe si pour tous $a, b \in A$ on a $[a,b] \subset A$.

Théorème

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, et $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable sur U. Si a et b sont deux points de U tels que le segment $[a,b]$ est contenu dans U, alors on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b-a\| \cdot \sup_{z \in [a,b]} \|Df(z)\|.$$

Définition

Soient a et b deux points d'un e.v.n E. On appelle segment d'extrémités a et b, et on note $[a,b]$, l'ensemble des points $z \in E$ de la forme

$$z = (1-t)a + tb, \ \text{avec}\ 0 \leq t \leq 1.$$

En d'autres termes, $[a,b] = \{a + t\,(b-a)\,;\, 0 \leq t \leq 1\}$.
Une partie A de E est dite convexe si pour tous $a, b \in A$ on a $[a,b] \subset A$.

Théorème

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, et $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable sur U. Si a et b sont deux points de U tels que le segment $[a,b]$ est contenu dans U, alors on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b-a\| \cdot \sup_{z \in [a,b]} \|Df(z)\|.$$

Démonstration.

Soit $\phi : [0,1] \longrightarrow F$ la fonction définie par $\phi(t) = f(a + t(b-a))$. C'est une fonction continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, et d'après la proposition 1.13 on a

$$\phi'(t) = Df(a + t(b-a))(b-a),$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\phi'(t)\| &= \|Df(a + t(b-a))(b-a)\| \\ &\leq \|Df(a + t(b-a))\| \cdot \|b-a\| \\ &\leq \|b-a\| \cdot \sup_{z \in [a,b]} \|Df(z)\|. \end{aligned}$$

Démonstration.

En appliquant à ϕ le corollaire 11, on obtient

$$\|\phi(1)-\phi(0)\| \leq \left(\|b-a\| \cdot \sup_{z\in[a,b]} \|Df(z)\| \right) \cdot (1-0),$$

c'est-à–dire,

$$\|f(b)-f(a)\| \leq \|b-a\| \cdot \sup_{z\in[a,b]} \|Df(z)\|.$$

Démonstration.

En appliquant à ϕ le corollaire 11, on obtient

$$\|\phi(1)-\phi(0)\| \leq \left(\|b-a\| \cdot \sup_{z\in[a,b]} \|Df(z)\| \right) \cdot (1-0),$$

c'est-à–dire,

$$\|f(b)-f(a)\| \leq \|b-a\| \cdot \sup_{z\in[a,b]} \|Df(z)\|.$$

□

Supposons maintenant que l'ouvert U soit convexe, c'est-à-dire que, pour tout couple (a, b) de points de U, le segment $[a, b]$ soit contenu dans U.

Théorème

*Soit U un **ouvert convexe** d'un e.v.n E, et soit $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable à valeurs dans un e.v.n F. Supposons qu'il existe $k \geq 0$ tel que*

$$\|Df(x)\| \leq k \text{ pour tout } x \in U.$$

Alors, quels que soient $x, y \in U$, on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Autrement dit la fonction f est k-lipschitzienne.

Supposons maintenant que l'ouvert U soit convexe, c'est-à-dire que, pour tout couple (a, b) de points de U, le segment $[a, b]$ soit contenu dans U.

Théorème

*Soit U un **ouvert convexe** d'un e.v.n E, et soit $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable à valeurs dans un e.v.n F. Supposons qu'il existe $k \geq 0$ tel que*

$$\|Df(x)\| \leq k \text{ pour tout } x \in U.$$

Alors, quels que soient $x, y \in U$, on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Autrement dit la fonction f est k-lipschitzienne.

Corollaire

Sous les hypothèses précédentes, supposons que $k = 0$, c'est-à-dire que $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Alors f est constante dans U.

On va voir maintenant que ce corollaire est, en réalité, valable non seulement si U est convexe, mais plus généralement si U est connexe. Rappelons qu'un espace topologique X est dit connexe si, chaque fois que X est une réunion de deux ouverts disjoints, l'un deux est vide (et l'autre est X).

Théorème

*Soit U un **ouvert connexe** d'un e.v.n E, et soit $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable sur U à valeurs dans un e.v.n F. Si la dérivée $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$, alors f est constante.*

Corollaire

Sous les hypothèses précédentes, supposons que $k = 0$, c'est-à-dire que $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Alors f est constante dans U.

On va voir maintenant que ce corollaire est, en réalité, valable non seulement si U est convexe, mais plus généralement si U est connexe.

Rappelons qu'un espace topologique X est dit connexe si, chaque fois que X est une réunion de deux ouverts disjoints, l'un deux est vide (et l'autre est X).

Théorème

*Soit U un **ouvert connexe** d'un e.v.n E, et soit $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable sur U à valeurs dans un e.v.n F. Si la dérivée $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$, alors f est constante.*

Corollaire

Sous les hypothèses précédentes, supposons que $k = 0$, c'est-à-dire que $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Alors f est constante dans U.

On va voir maintenant que ce corollaire est, en réalité, valable non seulement si U est convexe, mais plus généralement si U est connexe. Rappelons qu'un espace topologique X est dit connexe si, chaque fois que X est une réunion de deux ouverts disjoints, l'un deux est vide (et l'autre est X).

Théorème

*Soit U un **ouvert connexe** d'un e.v.n E, et soit $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable sur U à valeurs dans un e.v.n F. Si la dérivée $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$, alors f est constante.*

Corollaire

Sous les hypothèses précédentes, supposons que $k = 0$, c'est-à-dire que $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Alors f est constante dans U.

On va voir maintenant que ce corollaire est, en réalité, valable non seulement si U est convexe, mais plus généralement si U est connexe. Rappelons qu'un espace topologique X est dit connexe si, chaque fois que X est une réunion de deux ouverts disjoints, l'un deux est vide (et l'autre est X).

Théorème

*Soit U un **ouvert connexe** d'un e.v.n E, et soit $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable sur U à valeurs dans un e.v.n F. Si la dérivée $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$, alors f est constante.*

Démonstration.

Soit $x_0 \in U$ fixé. Considérons l'ensemble

$$D = \{x \in U \quad | \quad f(x) = f(x_0)\}.$$

Montrons d'abord que D est un ouvert. Soit $x \in D$. Puisque U est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Pour tout $y \in B(x, r)$ on a $[x, y] \subset B(x, r) \subset U$, donc d'après le théorème 14 on a

$$f(y) = f(x).$$

Or $f(x) = f(x_0)$ (car $x \in D$). Donc $f(y) = f(x_0)$. D'où $y \in D$. Par suite $B(x, r) \subset D$. Cela montre que D est un ouvert. □

Démonstration.

Soit $x_0 \in U$ fixé. Considérons l'ensemble

$$D = \{x \in U \quad | \quad f(x) = f(x_0)\}.$$

Montrons d'abord que D est un ouvert. Soit $x \in D$. Puisque U est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Pour tout $y \in B(x, r)$ on a $[x, y] \subset B(x, r) \subset U$, donc d'après le théorème 14 on a

$$f(y) = f(x).$$

Or $f(x) = f(x_0)$ (car $x \in D$). Donc $f(y) = f(x_0)$. D'où $y \in D$. Par suite $B(x, r) \subset D$. Cela montre que D est un ouvert. □

Démonstration.

Soit $x_0 \in U$ fixé. Considérons l'ensemble

$$D = \{x \in U \quad | \quad f(x) = f(x_0)\}.$$

Montrons d'abord que D est un ouvert. Soit $x \in D$. Puisque U est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Pour tout $y \in B(x, r)$ on a $[x, y] \subset B(x, r) \subset U$, donc d'après le théorème 14 on a

$$f(y) = f(x).$$

Or $f(x) = f(x_0)$ (car $x \in D$). Donc $f(y) = f(x_0)$. D'où $y \in D$. Par suite $B(x, r) \subset D$. Cela montre que D est un ouvert. □

Démonstration.

Mais puisque f est continue, son complémentaire

$$V = U \backslash D = \{x \in U \quad | \quad f(x) \neq f(x_0)\}$$

est aussi un ouvert (comme image réciproque de l'ouvert $F \backslash \{f(x_0)\}$). On a

$$U = D \cup V \quad \text{et} \quad D \cap V = \emptyset.$$

Or D est non vide, car $x_0 \in D$. Donc si V était non vide, on aurait une partition de U en deux ouverts non vides, et U ne serait pas connexe, contrairement à l'hypothèse. D'où $V = \emptyset$ et $D = U$, et par suite pour tout $x \in U$ on a $f(x) = f(x_0)$. Cela montre que f est constante. □

Théorème

Soient E un e.v.n, U un ouvert de E, et $f : U \to \mathbb{R}$ une ***fonction numérique*** *différentiable sur U. Si a et b sont deux points distincts de U tels que le segment $[a, b]$ soit contenu dans U, alors il existe $c \in]a, b[$ avec*

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a) \tag{4}$$

Démonstration.

Soit $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction numérique définie par

$$\phi(t) = f(a + t(b - a)).$$

Elle est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et on a $\phi'(t) = Df(a + t(b - a))(b - a)$. □

Théorème

Soient E un e.v.n, U un ouvert de E, et $f : U \to \mathbb{R}$ une ***fonction numérique*** *différentiable sur U. Si a et b sont deux points distincts de U tels que le segment $[a, b]$ soit contenu dans U, alors il existe $c \in]a, b[$ avec*

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a) \tag{4}$$

Démonstration.

Soit $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction numérique définie par

$$\phi(t) = f(a + t(b - a)).$$

Elle est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et on a $\phi'(t) = Df(a + t(b - a))(b - a)$. □

Théorème

Soient E un e.v.n, U un ouvert de E, et $f : U \to \mathbb{R}$ une ***fonction numérique*** *différentiable sur U. Si a et b sont deux points distincts de U tels que le segment $[a, b]$ soit contenu dans U, alors il existe $c \in]a, b[$ avec*

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a) \tag{4}$$

Démonstration.

Soit $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction numérique définie par

$$\phi(t) = f(a + t(b - a)).$$

Elle est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et on a $\phi'(t) = Df(a + t(b - a))(b - a)$. □

Démonstration.

Donc d'après le théorème classique des accroissements finis il existe un nombre réel $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\theta),$$

c'est-à-dire,

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b-a),$$

avec $c = a + \theta(b-a) \in]a,b[$. □

Remarque

Si $E = \mathbb{R}^n$, la relation (4) s'écrit :

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(c).$$

avec $a = (a_1, \cdots, a_n) \in U$ et $b = (b_1, \cdots, b_n) \in U$. L'intérêt de cette relation vient de ce que les n dérivées partielles qui y figurent sont prises au même point c.

Plan

1 Théorème des accroissements finis lorsque la variable est réelle

2 Théorème des accroissements finis lorsque la variable est dans un e.v.n

3 Application du théorème des accroissements finis

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 1.19.

Proposition

Soient $E_1, \cdots, E_n$ des espaces vectoriels normés, et soit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$. Soit $f : U \longrightarrow F$ une application d'un ouvert U de E à valeurs dans un e.v.n F. Si les n différentielles partielles $D_i f(x)$ existent en tout point $x \in U$, et si les applications $D_i f : U \longrightarrow \mathcal{L}(E_i, F)$ sont continues en un point a de U, alors f est différentiable au point a.

Démonstration.

Nous ferons la démonstration pour $n = 2$. Le cas général se démontre d'une manière similaire. On munit l'espace produit $E = E_1 \times E_2$ de la norme

$$\|(x_1, x_2)\|_\infty = \sup(\|x_1\|, \|x_2\|).$$

Considérons l'application $L : E \longrightarrow F$ définie par

$$L(h) = D_1 f(a)(h_1) + D_2 f(a)(h_2) \quad \text{pour tout } h = (h_1, h_2) \in E;$$

c'est une application linéaire continue. On veut montrer que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x-a)\|}{\|x - a\|_\infty} = 0.$$

Démonstration.

Puisque U est un ouvert de E contenant le point $a = (a_1, a_2)$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$.
Pour tout $x = (x_1, x_2) \in B(a, r)$ on a Voir note 7

$$\begin{aligned} & f(x) - f(a) - L(x - a) \\ &= f(x) - f(a) - D_1 f(a)(x_1 - a_1) - D_2 f(a)(x_2 - a_2) \\ &= f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) - D_1 f(a)(x_1 - a_1) \\ &\quad + f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) - D_2 f(a)(x_2 - a_2) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a) - L(x - a)\| \leq & \|f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) - D_1 f(a)(x_1 - a_1)\| \\ & + \|f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) - D_2 f(a)(x_2 - a_2)\| \end{aligned}$$

□

Démonstration.

Puisque U est un ouvert de E contenant le point $a = (a_1, a_2)$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$.
Pour tout $x = (x_1, x_2) \in B(a, r)$ on a Voir note 7

$$\begin{aligned} & f(x) - f(a) - L(x - a) \\ &= f(x) - f(a) - D_1 f(a)(x_1 - a_1) - D_2 f(a)(x_2 - a_2) \\ &= f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) - D_1 f(a)(x_1 - a_1) \\ &\quad + f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) - D_2 f(a)(x_2 - a_2) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a) - L(x - a)\| \leq & \|f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) - D_1 f(a)(x_1 - a_1)\| \\ & + \|f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) - D_2 f(a)(x_2 - a_2)\| \end{aligned}$$

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Nous allons montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que les inégalités

$$\|x_1 - a_1\| < \eta, \ \|x_2 - a_2\| < \eta, \tag{*}$$

entrainent

$$\begin{cases} \|f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) - D_1 f(a)(x_1 - a_1)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x_1 - a_1\| \\ \|f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) - D_2 f(a)(x_2 - a_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x_2 - a_2\| \end{cases} \tag{**}$$

□

Démonstration.

L'application $D_1 f$ est continue au point $a = (a_1, a_2)$ (par hypothèse). Alors il existe un $\eta_1 > 0$ (auquel nous pouvons imposer de vérifier $\eta_1 < r$) tel que les inégalités

$$\|x_1 - a_1\| < \eta_1, \ \|x_2 - a_2\| < \eta_1$$

entraînent

$$\|D_1 f(x_1, x_2) - D_1 f(a_1, a_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même l'application $D_2 f$ est continue au point a (par hypothèse). Alors il existe un $\eta_2 > 0$ (auquel nous pouvons imposer de vérifier $\eta_2 < r$) tel que les inégalités

$$\|x_1 - a_1\| < \eta_2, \ \|x_2 - a_2\| < \eta_2$$

entraînent

$$\|D_2 f(x_1, x_2) - D_2 f(a_1, a_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Démonstration.

Posons $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$.
Donc les inégalités

$$\|x_1 - a_1\| < \eta, \ \|x_2 - a_2\| < \eta$$

entraînent à la fois les inégalités

$$\begin{cases} \|D_1 f(x_1, x_2) - D_1 f(a_1, a_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \|D_2 f(x_1, x_2) - D_2 f(a_1, a_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \qquad (***)$$

Fixons $x = (x_1, x_2) \in E$ tel que

$$\|x_1 - a_1\| < \eta, \ \|x_2 - a_2\| < \eta$$

□

Démonstration.

Montrons la première inégalité de $(**)$. Considérons l'application

$$\varphi_1 : B(a_1, \eta) \subset E_1 \longrightarrow F, \quad v_1 \mapsto f(v_1, x_2) - D_1 f(a)(v_1)$$

où $B(a_1, \eta)$ est la boule ouverte de centre a_1 et de rayon η dans E_1. On veut majorer

$$\|\varphi_1(x_1) - \varphi_1(a_1)\|.$$

L'application φ_1 est différentiable sur $B(a_1, \eta)$ car l'application partielle $v_1 \longmapsto f(v_1, x_2)$ est différentiable sur $B(a_1, \eta)$ (puisque $D_1 f$ existe sur U par hypothèse) et $D_1 f(a)$ est une application linéaire continue (donc différentiable). De plus, pour tout $z_1 \in B(a_1, \eta)$ on a

$$D\varphi_1(z_1) = D_1 f(z_1, x_2) - D_1 f(a),$$

Voir note 8

Démonstration.

Donc d'après $(***)$ on a

$$\|D\varphi_1(z_1)\| = \|D_1 f(z_1, x_2) - D_1 f(a_1, a_2\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En appliquant le théorème des accroissements finis (théorème 17) à l'application φ_1 sur la boule ouverte $B(a_1, \eta)$, on conclut donc que

$$\|\varphi_1(x_1) - \varphi_1(a_1)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x_1 - a_1\|,$$

c'est-à-dire,

$$\|f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) - D_1 f(a)(x_1 - a_1)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x_1 - a_1\|.$$

D'où la première inégalité de $(**)$. □

Démonstration.

De même façon on montre la deuxième inégalité de $(**)$; Pour cela, considérons l'application

$$\varphi_2 : B(a_2, \eta) \subset E_2 \longrightarrow F, \quad v_2 \mapsto f(a_1, v_2) - D_2 f(a)(v_2)$$

où $B(a_2, \eta)$ est la boule ouverte de centre a_2 et de rayon η dans E_2. On veut majorer

$$\|\varphi_2(x_2) - \varphi_2(a_2)\|.$$

L'application φ_2 est différentiable sur $B(a_2, \eta)$ car l'application partielle $v_2 \longmapsto f(a_1, v_2)$ est différentiable sur $B(a_2, \eta)$ (puisque $D_2 f$ existe sur U par hypothèse) et $D_2 f(a)$ est une application linéaire continue (donc différentiable). De plus, pour tout $z_2 \in B(a_2, \eta)$ on a

$$D\varphi_2(z_2) = D_2 f(a_1, z_2) - D_2 f(a).$$

Démonstration.

Donc d'après $(***)$ on a

$$\|D\varphi_2(z_2)\| = \|D_2 f(a_1, z_2) - D_2 f(a_1, a_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En appliquant le théorème des accroissements finis (théorème 17) à l'application φ_2 sur la boule ouverte $B(a_2, \eta)$, on conclut donc que

$$\|\varphi_2(x_2) - \varphi_2(a_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x_2 - a_2\|,$$

c'est-à-dire,

$$\|f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) - D_2 f(a)(x_2 - a_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x_2 - a_2\|.$$

D'où la deuxième inégalité de $(**)$. □

Démonstration.

Ainsi les inégalités $(*)$ entraînent les inégalités $(**)$
C'est-à-dire, les inégalités

$$\|x_1 - a_1\| < \eta, \ \|x_2 - a_2\| < \eta$$

entrainent les inégalités

$$\begin{cases} \|f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) - D_1 f(a)(x_1 - a_1)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x_1 - a_1\| \\ \|f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) - D_2 f(a)(x_2 - a_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x_2 - a_2\| \end{cases}$$

Or

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a) - L(x - a)\| \leq & \|f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) - D_1 f(a)(x_1 - a_1)\| \\ & + \|f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) - D_2 f(a)(x_2 - a_2)\| \end{aligned}$$

Démonstration.

Donc

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(a)-L(x-a)\| &\leq \frac{\varepsilon}{2}\|x_1-a_1\|+\frac{\varepsilon}{2}\|x_2-a_2\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\|x-a\|_\infty+\frac{\varepsilon}{2}\|x-a\|_\infty \\ &\leq \varepsilon\|x-a\|_\infty .\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}\frac{\|f(x)-f(a)-L(x-a)\|}{\|x-a\|_\infty}=0.$$

Ceci prouve que f est différentiable au point a, et que sa différentielle en ce point est l'application linéaire L. □

Note 1

Si

$$f'_d(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

existe alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in]t_0, t_0 + \delta] \cap [a, b], \quad \left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - f'_d(t_0) \right\| \leq \varepsilon$$

Pour $\delta' = \inf(\delta, b - t_0)$ on aura

$$\forall t \in]t_0, t_0 + \delta'], \quad \left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - f'_d(t_0) \right\| \leq \varepsilon$$

(car si $t \in]t_0, t_0 + \delta']$ alors $a \leq t_0 < t \leq t_0 + \delta' \leq b$ et $t_0 < t \leq t_0 + \delta' \leq t_0 + \delta$, donc $t \in]t_0, t_0 + \delta] \cap [a, b]$).

◂ Retour.

Note 2

Si $t \in [u, c[$ alors (par définition de la borne supérieure) il existe $x \in I_\varepsilon$ tel que $t < x$, donc

$$\|f(t) - f(u)\| \leq g(t) - g(u) + \varepsilon(t - u)$$

Donc

$$\|f(t) - f(u)\| \leq g(t) - g(u) + \varepsilon(t - u), \quad \forall t \in [u, c[.$$

L'inégalité précédente est aussi pour $t = c$ (puisque f et g sont continues en c), ce qui prouve que $c \in I_\varepsilon$.

◂ Retour.

Note 3

On a

$$f'_d(c) = \lim_{\substack{t \to c \\ t > c}} \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \quad \text{et} \quad g'_d(c) = \lim_{\substack{t \to c \\ t > c}} \frac{g(t) - g(c)}{t - c}$$

Donc pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in]c, c+\delta] \cap [a, b], \quad \left\| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} - f'_d(c) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

De même, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in]c, c+\eta] \cap [a, b], \quad \left| \frac{g(t) - g(c)}{t - c} - g'_d(c) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons maintenant $h = \inf(\delta, \eta, v - c)$. Alors pour tout $t \in]c, c+h]$ on a

$$\left\| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} - f'_d(c) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{g(t) - g(c)}{t - c} - g'_d(c) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

◂ Retour.

Note 4

On a

$$\left\| \frac{f(t)-f(c)}{t-c} - f'_d(c) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{f(t)-f(c)}{t-c} \right\| &= \left\| \frac{f(t)-f(c)}{t-c} - f'_d(c) + f'_d(c) \right\| \\
&\leq \left\| \frac{f(t)-f(c)}{t-c} - f'_d(c) \right\| + \left\| f'_d(c) \right\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left\| f'_d(c) \right\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + g'_d(c)
\end{aligned}$$

et on a

$$\left|\frac{g(t)-g(c)}{t-c}-g'_d(c)\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

c'est-à-dire,

$$\frac{-\varepsilon}{2}\leq\frac{g(t)-g(c)}{t-c}-g'_d(c)\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

Donc

$$g'_d(c)\leq\frac{g(t)-g(c)}{t-c}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

ou encore

$$g'_d(c)+\frac{\varepsilon}{2}\leq\frac{g(t)-g(c)}{t-c}+\varepsilon.$$

D'où

$$\|\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\|\leq\|f'_d(c)\|+\frac{\varepsilon}{2}\leq g'_d(c)+\frac{\varepsilon}{2}\leq\frac{g(t)-g(c)}{t-c}+\varepsilon,$$

◂ Retour.

Note 5

Théorème

Soient a et b deux points de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$, F un espace vectoriel normé. Soient $f : [a, b] \longrightarrow F$ et $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a, b]$. On suppose que f et g possèdent des ***dérivées à gauche*** *en chaque point x de l'intervalle ouvert $]a, b[$ vérifiant l'inégalité*

$$\|f'_g(x)\| \leq g'_g(x), \quad \forall x \in]a, b[.$$

Alors on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Démonstration.

Il suffit d'appliquer le théorème fondamental aux fonctions $x \longmapsto -f(-x)$ et $x \longmapsto -g(-x)$.
En effet, posons $\varphi(x) = -f(-x)$ et $\psi(x) = -g(-x)$ pour tout $x \in [-b, -a]$
On a

$$\varphi = f \circ h \quad \text{et} \quad \psi = g \circ h$$

où $h : [-b, -a] \to [a, b]$ est la fonction définie par $h(x) = -x$ pour tout $x \in [-b, -a]$. □

Démonstration.

- Puisque h est continue sur $[-b,-a]$, f et g sont continues sur $[a,b]$, alors φ et ψ sont continues sur $[-b,-a]$.
- La fonction φ est dérivable à droite en chaque point $x_0 \in]-b,-a[$. En effet, on a

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{-f(-x)+f(-x_0)}{x-x_0}$$

et en posant $t=-x$ et $t_0=-x_0 \in]a,b[$ on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}} \frac{-f(t)+f(t_0)}{-t+t_0} = \lim_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\\ &= f'_g(t_0) = f'_g(-x_0).\end{aligned}$$

□

Démonstration.

Cela montre que φ est dérivable à droite en chaque $x_0 \in]-b,-a[$ et on a

$$\varphi'_d(x_0) = f'_g(-x_0).$$

De même on montre que ψ est dérivable à droite en chaque $x_0 \in]-b,-a[$ et on a

$$\psi'_d(x_0) = g'_g(-x_0).$$

- De plus, on a par hypothèse :

$$\|f'_g(x)\| \leq g'_g(x), \quad \forall x \in]a,b[$$

alors

$$\|\varphi'_d(x_0)\| = \|f'_g(-x_0)\| \leq g'_g(-x_0) = \psi'_d(x_0), \quad \forall x_0 \in]-b,-a[.$$

c'est-à-dire,

$$\|\varphi'_d(x_0)\| \leq \psi'_d(x_0), \quad \forall x_0 \in]-b,-a[.$$

Démonstration.

Donc d'après le théorème fondamental on a

$$\|\varphi(-a) - \varphi(-b)\| \leq \psi(-a) - \psi(-b)$$

c'est-à-dire,

$$\|-f(a) + f(b)\| \leq -g(a) + g(b)$$

ou encore

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

□

◂ Retour.

Note 6

La fonction $h : [0,1] \to E$ définie par

$$h(t) = a + t(b-a), \quad \forall t \in [0,1]$$

est continue sur $[0,1]$ (elle est lipschitzienne de rapport $k = \|b-a\|$ car pour tous $t, t' \in [0,1]$ on a

$$\left\|h(t) - h\left(t'\right)\right\| = \left\|\left(t-t'\right)(b-a)\right\| = \left|t-t'\right| \|b-a\| .)$$

dérivable sur $]0,1[$ et pour tout $t_0 \in]0,1[$ on a

$$h'(t_0) = b - a.$$

En effet

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{(t-t_0)(b-a)}{t-t_0} = b - a.$$

◂ Retour.

Note 7

Soient $a = (a_1, a_2) \in E$, $x = (x_1, x_2) \in E$ et $r > 0$.
Alors :
$x \in B(a, r)$ si et seulement si $\|x - a\|_\infty < r$ si et seulement si

$$\|x_1 - a_1\| < r, \ \|x_2 - a_2\| < r.$$

Donc

$$B(a, r) = B(a_1, r) \times B(a_2, r).$$

◂ Retour.

Note 8

L'application φ_1 est bien définie sur la boule $B(a_1, \eta)$ car

$$\forall v_1 \in B(a_1, \eta), \quad (v_1, x_2) \in B(a, \eta) \subset U.$$

L'application φ_1 est différentiable sur $B(a_1, \eta)$ comme différence de deux applications différentiables sur $B(a_1, \eta)$:
- l'application partielle $v_1 \longmapsto f(v_1, x_2)$ est différentiable en tout $z_1 \in B(a_1, \eta)$ car $D_1 f(z_1, x_2)$ existe (puisque $D_1 f$ existe sur U **par hypothèse**). Plus précisément, $D_1 f(z_1, x_2)$ est (**par définition**) la différentielle de l'application $v_1 \longmapsto f(v_1, x_2)$ au point z_1.
- l'application $v_1 \longmapsto D_1 f(a)(v_1)$ est linéaire continue (de E_1 vers F), donc différentiable sur $B(a_1, \eta)$. Sa différentielle en tout point $z_1 \in B(a_1, \eta)$ est $D_1 f(a)$.

Donc φ_1 est différentiable sur $B(a_1, \eta)$, et pour tout $z_1 \in B(a_1, \eta)$ on a

$$D\varphi_1(z_1) = D_1 f(z_1, x_2) - D_1 f(a).$$

◂ Retour.