Chapitre 4: Différentielles d'ordre supérieur et formule de Taylor

A. ELBOUR

Faculté des Sciences et Techniques
Errachidia

2022-2023

Plan

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, et $f : U \longrightarrow F$ une application que nous supposons différentiable dans U. La différentielle de f,

$$Df : U \longrightarrow \mathcal{L}(E, F),$$

est une application de l'ouvert U dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, F)$, et on peut se demander si Df est différentiable en un point $a \in U$, ou même en tout point de U.

Définition

On dit que f est deux fois différentiable en un point $a \in U$ si l'application Df est différentiable en a. La différentielle de Df en a est notée $D^2 f(a)$ ou $f''(a)$. C'est un élément de $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$, qu'on appelle la différentielle seconde (ou la dérivée seconde) de f en a.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, et $f : U \longrightarrow F$ une application que nous supposons différentiable dans U. La différentielle de f,

$$Df : U \longrightarrow \mathcal{L}(E, F),$$

est une application de l'ouvert U dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, F)$, et on peut se demander si Df est différentiable en un point $a \in U$, ou même en tout point de U.

Définition

On dit que f est deux fois différentiable en un point $a \in U$ si l'application Df est différentiable en a. La différentielle de Df en a est notée $D^2 f(a)$ ou $f''(a)$. C'est un élément de $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$, qu'on appelle la différentielle seconde (ou la dérivée seconde) de f en a.

Remarque

Sans supposer f différentiable dans tout l'ouvert U, on dit plus généralement que f est deux fois différentiable en un point $a \in U$ si f est différentiable dans un voisinage ouvert V de a ($V \subset U$), et si l'application $Df : V \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est différentiable au point a.

Définition

1. *On dit que f est deux fois différentiable dans U si elle est deux fois différentiable en tout point de U. S'il en est ainsi, l'application $x \longmapsto D^2 f(x)$ est une application $D^2 f : U \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$, qu'on appelle la différentielle (ou dérivée) seconde de f sur U (qu'on note aussi f'').*
2. *On dit que f est de classe C^2 (ou deux fois continûment différentiable) dans U si f est deux fois différentiable sur U, et si sa différentielle seconde $D^2 f$ est continue sur U.*

Remarque

Sans supposer f différentiable dans tout l'ouvert U, on dit plus généralement que f est deux fois différentiable en un point $a \in U$ si f est différentiable dans un voisinage ouvert V de a ($V \subset U$), et si l'application $Df : V \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est différentiable au point a.

Définition

1. *On dit que f est deux fois différentiable dans U si elle est deux fois différentiable en tout point de U. S'il en est ainsi, l'application $x \longmapsto D^2 f(x)$ est une application $D^2 f : U \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$, qu'on appelle la différentielle (ou dérivée) seconde de f sur U (qu'on note aussi f'').*
2. *On dit que f est de classe C^2 (ou deux fois continûment différentiable) dans U si f est deux fois différentiable sur U, et si sa différentielle seconde $D^2 f$ est continue sur U.*

Évidemment les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) f est deux fois différentiable dans U.
ii) f est différentiable dans U et l'application Df est différentiable dans U.

De même, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) f est de classe C^2 dans U.
b) f est différentiable dans U et Df est de classe C^1 dans U.

Évidemment les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) f est deux fois différentiable dans U.

ii) f est différentiable dans U et l'application Df est différentiable dans U.

De même, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) f est de classe C^2 dans U.

b) f est différentiable dans U et Df est de classe C^1 dans U.

Remarque (Voir note 1)

Rappelons que l'espace $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ est canoniquement isomorphe à l'espace $\mathcal{L}_2(E, F)$ (l'espace des applications bilinéaires continues de $E \times E$ dans F) :

$$\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) \approx \mathcal{L}_2(E, F).$$

L'image de $D^2 f(a)$ par cet isomorphisme est donc une application bilinéaire continue de $E \times E$ dans F, qui est définie par

$$(h, k) \longmapsto \left(D^2 f(a) \cdot h\right) \cdot k.$$

$D^2 f(a)$ fait correspondre à $h \in E$ l'élément $D^2 f(a) \cdot h$ de $\mathcal{L}(E, F)$, et l'image de $k \in E$ par cette dernière application est $\left(D^2 f(a) \cdot h\right) \cdot k$, que l'on notera $D^2 f(a) \cdot (h, k)$.

Nous pouvons donc considérer la différentielle $D^2f(a)$ de f en un point a de U, si elle existe, comme un élément de $\mathcal{L}_2(E,F)$, et la différentielle D^2f de f, si elle existe en tout point de U, comme une application de U dans $\mathcal{L}_2(E,F)$.

Remarque (Calcul de $D^2f(a)$)

Supposons f deux fois différentiable en a. Appliquons la remarque qui suit la définition 1.3 (chap 1) à Df :

$$D^2f(a)\cdot h = D(Df)(a)\cdot h = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{Df(a+th)-Df(a)}{t} = \frac{d}{dt}Df(a+th)\Big|_{t=0}$$

On obtient ainsi un élément de $\mathcal{L}(E,F)$, dont la valeur en $k\in E$ est

Voir note 2

$$D^2f(a)\cdot(h,k) = (D^2f(a)\cdot h)\cdot k = \frac{d}{dt}Df(a+th)\Big|_{t=0}\cdot k = \frac{d}{dt}Df(a+th)\cdot k\Big|_{t=0}$$

Nous pouvons donc considérer la différentielle $D^2f(a)$ de f en un point a de U, si elle existe, comme un élément de $\mathcal{L}_2(E,F)$, et la différentielle D^2f de f, si elle existe en tout point de U, comme une application de U dans $\mathcal{L}_2(E,F)$.

Remarque (Calcul de $D^2f(a)$)

Supposons f deux fois différentiable en a. Appliquons la remarque qui suit la définition 1.3 (chap 1) à Df :

$$D^2f(a)\cdot h = D(Df)(a)\cdot h = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{Df(a+th)-Df(a)}{t} = \frac{d}{dt}Df(a+th)\Big|_{t=0}$$

On obtient ainsi un élément de $\mathcal{L}(E,F)$, dont la valeur en $k\in E$ est

Voir note 2

$$D^2f(a)\cdot(h,k) = (D^2f(a)\cdot h)\cdot k = \frac{d}{dt}Df(a+th)\Big|_{t=0}\cdot k = \frac{d}{dt}Df(a+th)\cdot k\Big|_{t=0}$$

Mais, toujours d'après la remarque qui suit la définition 1.3 (chap 1),

$$Df(a+th)\cdot k = \frac{d}{ds} f(a+th+sk)\Big|_{s=0}.$$

Par conséquent,

$$D^2 f(a)\cdot(h,k) = \frac{d}{dt}\frac{d}{ds} f(a+th+sk)\Big|_{t=s=0}. \tag{1}$$

On a aussi la relation suivante :

$$D^2 f(a)\cdot(h,k) = \frac{d}{dt} Df(a+th)\cdot k\Big|_{t=0} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{Df(a+th)\cdot k - Df(a)\cdot k}{t}.$$

Proposition 1

Soit $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable dans U. Si f est deux fois différentiable en un point $a \in U$, alors pour tout $k \in E$, l'application

$$\begin{array}{rccc} g: & U & \longrightarrow & F \\ & x & \mapsto & Df(x) \cdot k \end{array}$$

est différentiable en a et sa différentielle en a est donnée par

$$Dg(a) \cdot h = D^2 f(a) \cdot (h, k) \quad \text{pour tout } h \in E.$$

Démonstration.

L'application g est la composée de Df et de l'application linéaire continue

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & F \\ & L & \mapsto & L(k) \end{array}$$

On a Df est différentiable en a (par hypothèse). $\square$

Proposition 1

Soit $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable dans U. Si f est deux fois différentiable en un point $a \in U$, alors pour tout $k \in E$, l'application

$$\begin{array}{rccc} g: & U & \longrightarrow & F \\ & x & \mapsto & Df(x)\cdot k \end{array}$$

est différentiable en a et sa différentielle en a est donnée par

$$Dg(a)\cdot h = D^2 f(a)\cdot(h,k) \quad \text{pour tout } h \in E.$$

Démonstration.

L'application g est la composée de Df et de l'application linéaire continue

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & F \\ & L & \mapsto & L(k) \end{array}$$

On a Df est différentiable en a (par hypothèse). □

Démonstration.

L'application φ est différentiable sur $\mathcal{L}(E,F)$ (car elle est linéaire continue), et on a

$$D\varphi(L) = \varphi \quad \forall L \in \mathcal{L}(E,F).$$

Donc l'application $g = \varphi \circ Df$ est différentiable en a, et on a

$$Dg(a) = D(\varphi \circ Df)(a) = D\varphi(Df(a)) \circ Df(a) = \varphi \circ Df(a)$$

Par suite, pour tout $h \in E$ on a

$$Dg(a) \cdot h = (\varphi \circ Df(a)) \cdot h = \varphi(Df(a) \cdot h) = (Df(a) \cdot h) \cdot k = D^2 f(a) \cdot (h,k).$$

$\square$

Remarque

Soit $f : U \longrightarrow F$ *une application deux fois différentiable dans* U*. Soient* $a \in U$ *et* $h \in E$ *tels que le segment* $[a, a+h]$ *soit contenu dans* U*. Alors la fonction* $\psi : [0,1] \longrightarrow F$ *définie par*

$$\psi(t) = f(a+th)$$

est continue sur $[0,1]$*, deux fois dérivable sur* $]0,1[$*. De plus, pour tout* $t \in]0,1[$ *on a*

$$\psi'(t) = Df(a+th)\cdot h \quad \text{et} \quad \psi''(t) = D^2f(a+th)\cdot(h,h).$$

Exemple (Applications bilinéaires continues)

Soit $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ *une application bilinéaire continue. Si* $a = (a_1, a_2)$ *et* $h = (h_1, h_2)$ *sont deux éléments de* $E_1 \times E_2$*, on a d'après la proposition 1.6*

$$Df(a) \cdot h = f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2).$$

L'application

$$Df : E_1 \times E_2 \longrightarrow \mathcal{L}(E_1 \times E_2, F)$$

est donc une application linéaire continue. Donc Df *est différentiable sur* $E_1 \times E_2$ *et sa différentielle est constante. Cette constante est l'élément* $D^2 f(a) \in \mathcal{L}_2(E_1 \times E_2, F)$ *dont la valeur sur les éléments* $h = (h_1, h_2)$ *et* $k = (k_1, k_2)$ *de* $E_1 \times E_2$ *est*

$$D^2 f(a) \cdot (h, k) = f(h_1, k_2) + f(k_1, h_2),$$

comme on le voit aussi en utilisant la relation (1). Voir autre méthode

Théorème 2 (Schwarz)

Si $f : U \longrightarrow F$ est deux fois différentiable au point a, la différentielle seconde $D^2 f(a) \in \mathcal{L}_2(E, F)$ est une application bilinéaire symétrique ; autrement dit : $D^2 f(a) \cdot (h, k) = D^2 f(a) \cdot (k, h)\,, \qquad \forall (h, k) \in E \times E.$

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

Lemme 3

À une fonction $f : U \longrightarrow F$ et un point $a \in U$ on associe la fonction définie sur un voisinage ouvert de $(0, 0)$ dans $E \times E$: Voir note 3

$$A(h, k) := f(a + h + k) - f(a + h) - f(a + k) + f(a)\,.$$

Si f est deux fois différentiable en a, alors on a

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\(h,k)\neq(0,0)}} \frac{\left\|A(h, k) - D^2 f(a) \cdot (h, k)\right\|}{(\|h\| + \|k\|)^2} = 0.$$

Théorème 2 (Schwarz)

Si $f : U \longrightarrow F$ est deux fois différentiable au point a, la différentielle seconde $D^2 f(a) \in \mathcal{L}_2(E, F)$ est une application bilinéaire symétrique ; autrement dit : $D^2 f(a) \cdot (h, k) = D^2 f(a) \cdot (k, h)\,, \qquad \forall (h, k) \in E \times E.$

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

Lemme 3

À une fonction $f : U \longrightarrow F$ et un point $a \in U$ on associe la fonction définie sur un voisinage ouvert de $(0, 0)$ dans $E \times E$: Voir note 3

$$A(h, k) := f(a + h + k) - f(a + h) - f(a + k) + f(a)\,.$$

Si f est deux fois différentiable en a, alors on a

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ (h,k)\neq(0,0)}} \frac{\left\|A(h, k) - D^2 f(a) \cdot (h, k)\right\|}{(\|h\| + \|k\|)^2} = 0.$$

Admettons provisoirement ce lemme, et démontrons le théorème 2.

Preuve du théorème 2.

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Le lemme 3 montre qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(h, k) \in E^2$ vérifiant $\|h\| < \eta$ et $\|k\| < \eta$ on a

$$\left\| A(h,k) - D^2 f(a) \cdot (h,k) \right\| \leq \varepsilon \left(\|h\| + \|k\|\right)^2$$

et

$$\left\| A(k,h) - D^2 f(a) \cdot (k,h) \right\| \leq \varepsilon \left(\|h\| + \|k\|\right)^2 .$$

Mais on a évidement $A(h, k) = A(k, h)$. On en déduit

$$\begin{aligned} & \left\| D^2 f(a) \cdot (h,k) - D^2 f(a) \cdot (k,h) \right\| \\ \leq \quad & \left\| D^2 f(a) \cdot (h,k) - A(h,k) \right\| + \left\| A(k,h) - D^2 f(a) \cdot (k,h) \right\| \\ \leq \quad & 2\varepsilon \left(\|h\| + \|k\|\right)^2 . \end{aligned}$$

Démonstration.

D'où
$$\left\| D^2 f(a)\cdot(h,k) - D^2 f(a)\cdot(k,h) \right\| \leq 2\varepsilon\left(\|h\| + \|k\|\right)^2. \tag{2}$$

Ceci implique, par la bilinéarité de $D^2 f(a)$,

$$D^2 f(a)\cdot(h,k) = D^2 f(a)\cdot(k,h) \quad \text{pour tout } (h,k)\in E^2.$$

En effet, pour tout $(h,k)\in E^2$, il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $\|\lambda h\| < \eta$ et $\|\lambda k\| < \eta$ (il suffit de prendre par exemple $\lambda = \frac{\eta}{\|h\|+\|k\|+1}$), d'où

$$\left\| D^2 f(a)\cdot(\lambda h,\lambda k) - D^2 f(a)\cdot(\lambda k,\lambda h) \right\| \leq 2\varepsilon\left(\|\lambda h\| + \|\lambda k\|\right)^2,$$

c'est-à-dire

$$\lambda^2 \left\| D^2 f(a)\cdot(h,k) - D^2 f(a)\cdot(k,h) \right\| \leq 2\varepsilon\lambda^2\left(\|h\| + \|k\|\right)^2,$$

□

Démonstration.

et donc, en simplifiant par λ^2,

$$\left\| D^2 f(a) \cdot (h,k) - D^2 f(a) \cdot (k,h) \right\| \leq 2\varepsilon \left(\|h\| + \|k\| \right)^2 .$$

Cette inégalité étant vraie quel que soit $\varepsilon > 0$, on en déduit

$$D^2 f(a) \cdot (h,k) = D^2 f(a) \cdot (k,h) .$$

$\square$

Preuve du Lemme 3.

Puisque f est deux fois différentiable en a, alors (par définition) f est différentiable dans un voisinage ouvert V de a ($V \subset U$) et l'application $Df : V \to \mathcal{L}(E, F)$ est différentiable au point a.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque Df est différentiable en a, il existe $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset V$ et pour tout $h' \in E$ vérifiant $\|h'\| < \eta$,

$$\left\| Df(a + h') - Df(a) - D^2 f(a) \cdot (h') \right\| \leq \varepsilon \left\| h' \right\|. \tag{3}$$

Fixons $h \in E$ tel que $\|h\| < \frac{\eta}{2}$, et considérons la fonction $g : B\left(0, \frac{\eta}{2}\right) \longrightarrow F$ définie par

$$\begin{aligned} g(k) &= A(h, k) - D^2 f(a) \cdot (h, k) \\ &= f(a + h + k) - f(a + h) - f(a + k) + f(a) - \left(D^2 f(a) \cdot h\right) \cdot k. \end{aligned}$$

La fonction g est différentiable sur $B\left(0, \frac{\eta}{2}\right)$, et sa différentielle en tout point $k \in B\left(0, \frac{\eta}{2}\right)$ est : □

Démonstration.

Voir note 4

$$\begin{aligned} Dg(k) &= Df(a+h+k) - Df(a+k) - D^2 f(a)\cdot(h) \\ &= Df(a+h+k) - Df(a) - D^2 f(a)\cdot(h+k) \\ &\quad + Df(a) - Df(a+k) + D^2 f(a)\cdot(k). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (3) à $h' = h+k$ et à $h' = k$, on obtient

$$\left\| Df(a+h+k) - Df(a) - D^2 f(a)\cdot(h+k) \right\| \leq \varepsilon \|h+k\|$$

et

$$\left\| Df(a+k) - Df(a) - D^2 f(a)\cdot(k) \right\| \leq \varepsilon \|k\|$$

On en déduit par l'inégalité triangulaire que

$$\|Dg(k)\| \leq \varepsilon(\|h+k\| + \|k\|) \leq 2\varepsilon(\|h\| + \|k\|), \quad \forall k \in B\left(0, \frac{\eta}{2}\right). \quad (4)$$

Démonstration.

Fixons $k \in B\left(0, \frac{\eta}{2}\right)$. Si z est un élément du segment $[0, k]$ alors il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $z = \lambda k$, et par suite,

$$\|z\| = \|\lambda k\| = \lambda \|k\| \leq \|k\| < \frac{\eta}{2}.$$

Donc d'après l'inégalité (4) on a

$$\|Dg(z)\| \leq 2\varepsilon\left(\|h\| + \|k\|\right), \quad \forall z \in [0, k].$$

Le théorème des accroissement finis appliquer à la fonction g sur le segment $[0, k]$ montre alors que $\|k\| < \frac{\eta}{2}$ entraine

$$\begin{aligned} \|g(k)\| &= \|g(k) - g(0)\| \leq \|k\| \sup_{z \in [0,k]} \|Dg(z)\| \\ &\leq 2\varepsilon\left(\|h\| + \|k\|\right)\|k\| \leq 2\varepsilon\left(\|h\| + \|k\|\right)^2, \end{aligned}$$

$\square$

Démonstration.

c'est-à-dire,

$$\left\| A(h,k) - D^2 f(a)\cdot(h,k) \right\| \leq 2\varepsilon\left(\|h\| + \|k\|\right)^2 .$$

Cette inégalité étant vraie pour tous $h, k \in E$ vérifiant $\|h\| < \frac{\eta}{2}$ et $\|k\| < \frac{\eta}{2}$. D'où le résultat. $\square$

Cas où $E = \mathbb{R}^n$ (dérivées partielles seconde)

Supposons ici que $E = \mathbb{R}^n$ et soit $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. On sait que les n dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existent en tout point $x \in U$, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = Df(x) \cdot e_i = \left.\frac{d}{dt} f(x + te_i)\right|_{t=0}.$$

Si l'application f est deux fois différentiable en un point $a \in U$, alors les dérivées partielles seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$ de f au point a existent pour tous $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, et on a Voir note 5

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) = \left.\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + te_i)\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d}{dt}\frac{d}{ds} f(a + te_i + se_j)\right|_{t=s=0} \end{aligned}$$

Cas où $E = \mathbb{R}^n$ (dérivées partielles seconde)

Supposons ici que $E = \mathbb{R}^n$ et soit $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. On sait que les n dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existent en tout point $x \in U$, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = Df(x) \cdot e_i = \left.\frac{d}{dt} f(x + te_i)\right|_{t=0}.$$

Si l'application f est deux fois différentiable en un point $a \in U$, alors les dérivées partielles seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$ de f au point a existent pour tous $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, et on a Voir note 5

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) = \left.\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + te_i)\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d}{dt}\frac{d}{ds} f(a + te_i + se_j)\right|_{t=s=0} \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = D^2 f(a) \cdot (e_i, e_j).$$

En échangeant les rôles de i et j, on a aussi :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = D^2 f(a) \cdot (e_j, e_i).$$

Le théorème de Schwarz (théorème 2) montre alors que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Soient $h = (h_1, \cdots, h_n)$ et $k = (k_1, \cdots, k_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On a

$$h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i \quad \text{et} \quad k = \sum_{j=1}^{n} k_j e_j$$

Donc, par bilinéarité de $D^2 f(a)$, on a :

$$\begin{aligned} D^2 f(a) \cdot (h, k) &= D^2 f(a) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i, \sum_{j=1}^{n} k_j e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i k_j \, D^2 f(a) \cdot (e_i, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i k_j \, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a). \end{aligned}$$

Soient $h = (h_1, \cdots, h_n)$ et $k = (k_1, \cdots, k_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On a

$$h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i \quad \text{et} \quad k = \sum_{j=1}^{n} k_j e_j$$

Donc, par bilinéarité de $D^2 f(a)$, on a :

$$\begin{aligned}
D^2 f(a) \cdot (h, k) &= D^2 f(a) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i, \sum_{j=1}^{n} k_j e_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i k_j \, D^2 f(a) \cdot (e_i, e_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i k_j \, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).
\end{aligned}$$

D'où

$$D^2 f(a) \cdot (h,k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Théorème 4 (Schwarz en dimension finie Voir note 6**)**

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable en un point $a \in U$ alors la matrice hessienne de f au point a

$$Hess(f)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

est symétrique.

D'où

$$D^2 f(a) \cdot (h,k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Théorème 4 (Schwarz en dimension finie Voir note 6)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable en un point $a \in U$ alors la matrice hessienne de f au point a

$$Hess(f)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

est symétrique.

Plan

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, et $f : U \longrightarrow F$ une application de U dans F.
On dira que f est trois fois différentiable en un point $a \in U$, si f est deux fois différentiable dans un voisinage ouvert V de a ($V \subset U$), et si sa différentielle seconde $D^2 f : V \longrightarrow \mathcal{L}_2(E, F)$ est différentiable en a.
On notera alors $D^3 f(a)$ ou $f^{(3)}(a)$ ou encore $f'''(a)$, la différentielle de $D^2 f$ au point a, qui est appelée différentielle d'ordre 3 de f au point a ; c'est un élément de $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}_2(E, F)) \approx \mathcal{L}_3(E, F)$.

$$D^3 f(a) = D\left(D^2 f\right)(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}_2(E, F)) \approx \mathcal{L}_3(E, F)$$

Lorsque f est trois fois différentiable en tout point de U, on dira que f est trois fois différentiable sur U. Dans ce cas, l'application $D^3 f : U \longrightarrow \mathcal{L}_3(E, F)$, $x \mapsto D^3 f(x)$ est alors appelée différentielle (ou dérivée) d'ordre 3 de f sur U (qu'on note aussi $f^{(3)}$ ou f''').

Par récurrence sur n, on définit l'expression : "f est n fois différentiable au point a", et la différentielle $D^n f(a)$ d'ordre n de f comme un élément de $\mathcal{L}_n(E, F)$. Supposons ces notions déjà définies pour $n-1$ (n étant un entier ≥ 3) ; on dira que f est n fois différentiable en a s'il existe un voisinage ouvert V de a ($V \subset U$) tel que f soit $n-1$ fois différentiable en chaque point de V, et si l'application $x \longmapsto D^{n-1}f(x)$ de V dans $\mathcal{L}_{n-1}(E, F)$ est différentiable au point a ; alors la différentielle de $D^{n-1}f$ au point a se note $D^n f(a)$ ou $f^{(n)}(a)$ et s'appelle la différentielle (ou dérivée) d'ordre n de f au point a. C'est un élément de $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}_{n-1}(E, F)) \approx \mathcal{L}_n(E, F)$.

$$D^n f(a) = D\left(D^{n-1}f\right)(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}_{n-1}(E, F)) \approx \mathcal{L}_n(E, F)$$

Calcul de $D^n f(a)$

Pour tous n vecteurs $h_1, \cdots, h_n \in E$, on notera $D^n f(a) \cdot (h_1, \cdots, h_n)$ la valeur de $D^n f(a) : E \times \cdots \times E \longrightarrow F$ pour l'élément $(h_1, \cdots, h_n) \in E \times \cdots \times E$, et on a

$$D^n f(a) \cdot (h_1, \cdots, h_n) = \frac{d}{dt_1} \frac{d}{dt_2} \cdots \frac{d}{dt_n} f(a + t_1 h_1 + t_2 h_2 + \cdots + t_n h_n) \Big|_{t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0}$$

Définition

On dira que f est n fois différentiable sur U si elle est n fois différentiable en tout point de U. Dans ce cas, l'application $D^n f : U \longrightarrow \mathcal{L}_n(E, F)$, $x \mapsto D^n f(x)$ est alors appelée différentielle (ou dérivée) d'ordre n de f sur U (qu'on note aussi $f^{(n)}$).
On dira que f est de classe C^n dans U (ou encore, que f est n fois continûment différentiable dans U), si f est n fois différentiable en tout point de U, et si l'application $D^n f : U \longrightarrow \mathcal{L}_n(E; F)$ est continue.
On convient de poser $D^0 f = f^{(0)} = f$. On dira que f est de classe C^0 si f est continue sur U.
On dira que $f : U \longrightarrow F$ est de classe C^∞ ou indéfiniment différentiable sur U si elle est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques

(1) *Pour que f soit n fois différentiable au point a ($n \geq 2$), il faut et il suffit que $Df(x)$ existe en tout point x d'un voisinage ouvert V de a ($V \subset U$), et que l'application $Df : V \longrightarrow \mathcal{L}(E; F)$ soit $n-1$ fois différentiable au point a ; alors*

$$D^n f(a) = D^{n-1}(Df)(a).$$

(2) *Si l'application f est n fois différentiable dans U (avec n entier ≥ 2), elle est aussi k fois différentiable dans U pour tout entier k vérifiant $1 \leq k < n$. De plus,*

$$D^{n-k}\left(D^k f\right) = D^n f$$

(3) Si f est n fois différentiable dans U (avec n entier ≥ 2), elle est de classe C^{n-1} dans U, car $D^{n-1}f$, étant différentiable en tout point de U, est continue sur U.

(4) Si f est de classe C^n dans U (avec n entier ≥ 2), elle est aussi de classe C^k dans U pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n$.

Le théorème de Schwarz (théorème 2) se généralise comme suit :

Théorème 5

Si f est n fois différentiable au point a, la différentielle $D^n f(a) \in \mathcal{L}_n(E, F)$ est une application multilinéaire symétrique $E \times \cdots \times E \longrightarrow F$. Autrement dit, pour tous $h_1, \cdots, h_n \in E$, et pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$, on a

$$D^n f(a) \cdot (h_1, \cdots, h_n) = D^n f(a) \cdot (h_{\sigma(1)}, \cdots, h_{\sigma(n)}).$$

Quelques exemples

Proposition 6 (Applications constantes)

Toute application constante f d'un ouvert U d'un e.v.n E dans un autre e.v.n F est de classe C^∞, et toutes ses différentielles d'ordre $n \geq 1$ sont identiquement nulles.

Proposition 7 (Application linéaire continue)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Toute application linéaire continue $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est de classe C^∞, et pour tout $x \in E$,

$$Df(x) = f \text{ et } D^n f = 0 \text{ pour tout } n \geq 2.$$

Toutes les différentielles d'ordre $n \geq 2$ de f sont identiquement nulles.

Quelques exemples

Proposition 6 (Applications constantes)

Toute application constante f d'un ouvert U d'un e.v.n E dans un autre e.v.n F est de classe C^∞, et toutes ses différentielles d'ordre $n \geq 1$ sont identiquement nulles.

Proposition 7 (Application linéaire continue)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Toute application linéaire continue $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est de classe C^∞, et pour tout $x \in E$,

$$Df(x) = f \text{ et } D^n f = 0 \text{ pour tout } n \geq 2.$$

Toutes les différentielles d'ordre $n \geq 2$ de f sont identiquement nulles.

Proposition 8

Soient E_1, E_2 et F trois espaces vectoriels normés. Toute application bilinéaire continue $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ est de classe C^∞ ; plus précisément, $D^2 f$ est une application constante, et les différentielle $D^n f$ sont donc nulles pour $n \geq 3$.

Ces résultats s'étendent aisément à toute application multilinéaire continue.

Cas où $E = \mathbb{R}^n$ (dérivées partielles d'ordre supérieur)
Supposons ici que $E = \mathbb{R}^n$ et soit $f : U \longrightarrow F$ une application d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ dans un e.v.n F. Sous réserve d'existence, on peut définir par récurrence sur p, les dérivées partielles d'ordre p de f par la relation :

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}}(x) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}} \right)(x),$$

avec $i_1, i_2, \cdots, i_p \in \{1, 2, \cdots, n\}$.
Si f est p fois différentiable en un point $a \in U$, alors les n^p dérivées partielles d'ordre p en a existent, et on a

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}}(a) = D^p f(a) \cdot (e_{i_1}, e_{i_2} \cdots, e_{i_p}),$$

où $(e_1, \cdots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Cas où $E = \mathbb{R}^n$ (dérivées partielles d'ordre supérieur)
Supposons ici que $E = \mathbb{R}^n$ et soit $f : U \longrightarrow F$ une application d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ dans un e.v.n F. Sous réserve d'existence, on peut définir par récurrence sur p, les dérivées partielles d'ordre p de f par la relation :

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}}(x) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}} \right)(x),$$

avec $i_1, i_2, \cdots, i_p \in \{1, 2, \cdots, n\}$.
Si f est p fois différentiable en un point $a \in U$, alors les n^p dérivées partielles d'ordre p en a existent, et on a

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}}(a) = D^p f(a) \cdot \left(e_{i_1}, e_{i_2} \cdots, e_{i_p}\right),$$

où $(e_1, \cdots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Le théorème de Schwarz (théorème 5) montre alors que la valeur de $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}}(a)$ ne change pas lorsqu'on change l'ordre des dérivations successives.
En utilisant la multilinéarité de $D^p f(a)$ on obtient : Voir note 7

Proposition 9

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}^*$, et $f : U \longrightarrow F$ une application p fois différentiable en un point $a \in U$. Alors pour $h_i = (h_{i,1}, h_{i,2}, \cdots, h_{i,n}) \in \mathbb{R}^n$ ($1 \leq i \leq p$) on a

$$D^p f(a) \cdot (h_1, h_2, \cdots, h_p) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} h_{1,i_1} h_{2,i_2} \cdots h_{p,i_p} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}}(a).$$

En particulier, si $h = (h_1, h_2, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ alors

$$D^p f(a) \cdot \underbrace{(h, h, \cdots, h)}_{p \text{ fois}} = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_p} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}}(a).$$

L'expression $D^p f(a) \cdot \underbrace{(h, h, \cdots, h)}_{p \text{ fois}}$ se note $D^p f(a) \cdot (h)^p$, et elle s'écrit aussi Voir note 8

$$D^p f(a) \cdot (h)^p = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{N} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = p}} \frac{p!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!} h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \cdots h_n^{\alpha_n} \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(a)$$

Proposition 10

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}^*$. Pour qu'une application $f : U \longrightarrow F$ soit de classe C^p sur U, il faut et il suffit que toutes ses dérivées partielles d'ordre p,

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}} \quad (i_1, i_2, \cdots, i_p = 1, 2, \cdots, n)$$

existent et soient continues sur U.

Exemple

Toute fonction polynôme de n variables réelles est de classe C^∞ ; toute fonction rationnelle est de classe C^∞ sur son domaine de définition.

Proposition 10

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}^*$. Pour qu'une application $f : U \longrightarrow F$ soit de classe C^p sur U, il faut et il suffit que toutes ses dérivées partielles d'ordre p,

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}} \quad (i_1, i_2, \cdots, i_p = 1, 2, \cdots, n)$$

existent et soient continues sur U.

Exemple

Toute fonction polynôme de n variables réelles est de classe C^∞ ; toute fonction rationnelle est de classe C^∞ sur son domaine de définition.

Plan

Dans tout ce paragraphe, $f : U \longrightarrow F$ est une application d'un ouvert U d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F, et a est un point de U.

Théorème 11 (formule de Taylor-Young)

On suppose que l'application f est n fois différentiable en $a \in U$ (n entier ≥ 1). On a alors

$$f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a) \cdot (h)^k = o\left(\|h\|^n\right).$$

On a posé $D^k f(a) \cdot (h)^k = D^k f(a) \cdot \underbrace{(h, \cdots, h)}_{k \text{ fois}}$.

Dans cet énoncé la notation de Landau o (qu'on lit “petit o de ”) signifie que le membre de gauche divisé par $\|h\|^n$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Cette “formule de Taylor” exprime seulement une propriété “asymptotique” ; elle dit ce qui se passe quand h tend vers zéro.

Démonstration.

Pour $n = 1$, cette propriété résulte de la définition même de la différentielle :

$$f(a+h) - f(a) - Df\,(a) \cdot h = o\,(\|h\|)\,.$$

On va procéder par récurrence sur n. Supposons la établie pour $n-1$, et montrons qu'elle est vraie pour n, avec ($n \geq 2$). Puisque f est au moins 2 fois différentiable en a, elle est différentiable en tout point d'un voisinage ouvert V de a, $V \subset U$. L'application $Df : V \longrightarrow \mathcal{L}\,(E, F)$ est $n-1$ fois différentiable en a. D'après l'hypothèse de récurrence, nous pouvons écrire, puisque $D^k\,(Df)\,(a) = D^{k+1}f\,(a)$,

$$Df(a+h) - Df(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} D^{k+1} f\,(a) \cdot (h)^k = o\left(\|h\|^{n-1}\right).$$

$\square$

Démonstration.

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $h \in E$ vérifiant $\|h\| \leq \eta$ on a

$$\left\| Df(a+h) - Df(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} D^{k+1} f(a) \cdot (h)^k \right\| \leq \varepsilon \|h\|^{n-1}.$$

Fixons $h \in E$ tel que $\|h\| \leq \eta$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 \leq t \leq 1$ nous avons $\|th\| = t\,\|h\| \leq \eta$, et donc Voir note 9

$$\left\| Df(a+th) - Df(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} D^{k+1} f(a) \cdot (h)^k \right\| \leq \varepsilon \|h\|^{n-1} t^{n-1}. \quad (5)$$

Considérons l'application $\varphi : [0,1] \longrightarrow F$ définie par

$$\varphi(t) = f(a+th) - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!} D^k f(a) \cdot (h)^k$$

Démonstration.

L'application φ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, et sa dérivée vérifie Voir note 10

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= Df(a+th)\cdot h - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} D^k f(a)\cdot (h)^k \\
&= Df(a+th)\cdot h - Df(a)\cdot h - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} D^{k+1} f(a)\cdot (h)^{k+1} \\
&= L(h).
\end{aligned}$$

avec $L = Df(a+th) - Df(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} D^{k+1} f(a)\cdot (h)^k$,
c'est un élément de $\mathcal{L}(E,F)$, et par suite

$$\|L(h)\| \leq \|L\|\cdot\|h\| = \left\| Df(a+th) - Df(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} D^{k+1} f(a)\cdot (h)^k \right\| \cdot \|h\|.$$

Démonstration.

Donc pour tout $t \in]0,1[$ on a d'après l'inégalité (4) :

$$\begin{aligned} \left\|\varphi'(t)\right\| &= \|L(h)\| \\ &\leq \left\| Df(a+th) - Df(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} D^{k+1} f(a) \cdot (h)^k \right\| \cdot \|h\| \\ &\leq \varepsilon \|h\|^n t^{n-1} \leq \varepsilon \|h\|^n . \end{aligned}$$

L'inégalité des accroissements finis entraîne alors

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \varepsilon \|h\|^n .$$

C'est-à-dire,

$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a) \cdot (h)^k \right\| \leq \varepsilon \|h\|^n ,$$

ce qui établit le résultat annoncé.

Démonstration.

Donc pour tout $t \in]0,1[$ on a d'après l'inégalité (4) :

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi'(t)\right\| &= \|L(h)\| \\
&\leq \left\| Df(a+th) - Df(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} D^{k+1} f(a) \cdot (h)^k \right\| \cdot \|h\| \\
&\leq \varepsilon \|h\|^n t^{n-1} \leq \varepsilon \|h\|^n .
\end{aligned}$$

L'inégalité des accroissements finis entraîne alors
$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \varepsilon \|h\|^n .$$
C'est-à-dire,

$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a) \cdot (h)^k \right\| \leq \varepsilon \|h\|^n ,$$

ce qui établit le résultat annoncé.

$\square$

Lemme 12

On suppose que l'application f est $n+1$ fois différentiable dans U (avec n entier ≥ 1). Soit $h \in E$, et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$, $a + th \in U$. Alors la fonction $\psi : I \longrightarrow F$ définie par

$$\psi(t) = f(a+th) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-t)^k}{k!} D^k f(a+th) \cdot (h)^k$$

est dérivable dans I et a pour dérivée

$$\psi'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f(a+th) \cdot (h)^{n+1}.$$

Démonstration.

En dérivant terme à terme l'expression de ψ on trouve

$$\begin{aligned}
&\psi'(t) \\
=\quad & Df(a+th)\cdot h+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(1-t)^{k}}{k!}D^{k+1}f(a+th)\cdot(h)^{k+1}-\frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}D^{k}f(a+th)\cdot(h)^{k}\right)\\
=\quad & Df(a+th)\cdot h+\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-t)^{k}}{k!}D^{k+1}f(a+th)\cdot(h)^{k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}D^{k}f(a+th)\cdot(h)^{k}\\
=\quad & \sum_{k=0}^{n}\frac{(1-t)^{k}}{k!}D^{k+1}f(a+th)\cdot(h)^{k+1}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1-t)^{k}}{k!}D^{k+1}f(a+th)\cdot(h)^{k+1}\\
=\quad & \frac{(1-t)^{n}}{n!}D^{n+1}f(a+th)\cdot(h)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Théorème 13 (formule de Taylor avec reste de Lagrange)

On suppose que l'application $f : U \longrightarrow F$ est $n+1$ fois différentiable dans U ; Supposons qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que

$$\left\|D^{n+1}f\,(x)\right\| \leq M, \text{ pour tout } x \in U.$$

Soit $h \in E$ tel que le segment $[a, a+h]$ soit contenu dans U. Alors

$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} D^k f\,(a) \cdot (h)^k \right\| \leq \frac{M\,\|h\|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Voir note 11

Démonstration.

La fonction $\psi : [0,1] \longrightarrow F$ définie par

$$\psi(t) = f(a+th) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-t)^k}{k!} D^k f(a+th) \cdot (h)^k$$

est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$. D'après le lemme 12, elle a pour dérivée, en tout point $t \in]0,1[$,

$$\psi'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f(a+th) \cdot (h)^{n+1},$$

donc

$$\begin{aligned} \left\|\psi'(t)\right\| &\leq \frac{(1-t)^n}{n!} \left\|D^{n+1} f(a+th)\right\| \cdot \|h\|^{n+1} \\ &\leq M \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot \|h\|^{n+1}. \end{aligned}$$

Démonstration.

La fonction $\psi : [0,1] \longrightarrow F$ définie par

$$\psi(t) = f(a+th) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-t)^k}{k!} D^k f(a+th) \cdot (h)^k$$

est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$. D'après le lemme 12, elle a pour dérivée, en tout point $t \in]0,1[$,

$$\psi'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f(a+th) \cdot (h)^{n+1},$$

donc

$$\begin{aligned} \left\|\psi'(t)\right\| &\leq \frac{(1-t)^n}{n!} \left\|D^{n+1} f(a+th)\right\| \cdot \|h\|^{n+1} \\ &\leq M \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot \|h\|^{n+1}. \end{aligned}$$

Démonstration.

D'autre part, la fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = -M\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\|h\|^{n+1},$$

est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et a pour dérivée,

$$g'(t) = M\frac{(1-t)^{n}}{n!}\|h\|^{n+1},$$

d'où l'inégalité

$$\left\|\psi'(t)\right\| \leq g'(t), \qquad \forall t \in]0,1[.$$

Démonstration.

D'autre part, la fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = -M\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\|h\|^{n+1},$$

est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et a pour dérivée,

$$g'(t) = M\frac{(1-t)^{n}}{n!}\|h\|^{n+1},$$

d'où l'inégalité

$$\left\|\psi'(t)\right\| \leq g'(t), \qquad \forall t \in \left]0,1\right[.$$

□

Démonstration.

En appliquant le théorème des accroissements finis (théorème 2.2), nous obtenons

$$\|\psi(1) - \psi(0)\| \leq g(1) - g(0),$$

c'est-à-dire,

$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a) \cdot (h)^k \right\| \leq \frac{M \|h\|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

□

Théorème 14 (formule de Taylor avec reste intégral)

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe C^{n+1} dans U. Soit $h \in E$ tel que le segment $[a, a+h]$ soit contenu dans U. Alors

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a) \cdot (h)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f(a+th) \cdot (h)^{n+1} \, \mathrm{d}t$$

Démonstration.

Les notations utilisées sont les mêmes que dans la démonstration du théorème précédent. Puisque $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^{n+1} sur U, la fonction ψ est de classe C^1 sur $[0,1]$. Donc

$$\psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t)\ \mathrm{d}t,$$

d'où la formule indiquée. $\square$

Note 1 : L'isométrie naturelle $\mathcal{L}(E_1, E_2; F) \approx \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F))$.

Rappelons que $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ est l'espace des applications bilinéaires continues de $E_1 \times E_2$ dans F, et que $\mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F))$ est l'espace des applications linéaires continues de E_1 dans $\mathcal{L}(E_2, F)$.

Théorème 15

Soient E_1, E_2 et F trois $\mathbb{K}$-e.v.n. Alors $\mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F))$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$.

Note 1 : L'isométrie naturelle $\mathcal{L}(E_1, E_2; F) \approx \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F))$.

Rappelons que $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ est l'espace des applications bilinéaires continues de $E_1 \times E_2$ dans F, et que $\mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F))$ est l'espace des applications linéaires continues de E_1 dans $\mathcal{L}(E_2, F)$.

Théorème 15

Soient E_1, E_2 et F trois $\mathbb{K}$-e.v.n. Alors $\mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F))$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$.

Démonstration.

A chaque $T \in \mathcal{L}\left(E_1, \mathcal{L}\left(E_2, F\right)\right)$, on lui associe l'application $\tilde{T} : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ définie par

$$\tilde{T}\left(x_1, x_2\right) = T\left(x_1\right)\left(x_2\right).$$

Évidemment $\tilde{T}$ est bilinéaire. En effet, pour tous $x_1, y_1 \in E_1,\ x_2, y_2 \in E_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{T}\left(x_1 + \lambda y_1, x_2\right) &= T\left(x_1 + \lambda y_1\right)\left(x_2\right) = \left[T(x_1) + \lambda T\left(y_1\right)\right]\left(x_2\right) \\
&= T(x_1)\left(x_2\right) + \lambda T\left(y_1\right)\left(x_2\right) \\
&= \tilde{T}\left(x_1, x_2\right) + \lambda \tilde{T}\left(y_1, x_2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}\left(x_1, x_2 + \lambda y_2\right) &= T\left(x_1\right)\left(x_2 + \lambda y_2\right) = T(x_1)\left(x_2\right) + \lambda T\left(x_1\right)\left(y_2\right) \\
&= \tilde{T}\left(x_1, x_2\right) + \lambda \tilde{T}\left(x_1, y_2\right).
\end{aligned}$$

Démonstration.

A chaque $T \in \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F))$, on lui associe l'application $\tilde{T} : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ définie par

$$\tilde{T}(x_1, x_2) = T(x_1)(x_2).$$

Évidemment $\tilde{T}$ est bilinéaire. En effet, pour tous $x_1, y_1 \in E_1,\ x_2, y_2 \in E_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(x_1 + \lambda y_1, x_2) &= T(x_1 + \lambda y_1)(x_2) = [T(x_1) + \lambda T(y_1)](x_2) \\
&= T(x_1)(x_2) + \lambda T(y_1)(x_2) \\
&= \tilde{T}(x_1, x_2) + \lambda \tilde{T}(y_1, x_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(x_1, x_2 + \lambda y_2) &= T(x_1)(x_2 + \lambda y_2) = T(x_1)(x_2) + \lambda T(x_1)(y_2) \\
&= \tilde{T}(x_1, x_2) + \lambda \tilde{T}(x_1, y_2).
\end{aligned}$$

□

Démonstration.

De plus, puisque pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ on a :

$$\left\| \tilde{T}(x_1, x_2) \right\| = \| T(x_1)(x_2) \| \leq \| T(x_1) \| \cdot \| x_2 \| \leq \| T \| \cdot \| x_1 \| \cdot \| x_2 \|,$$

alors $\tilde{T}$ est continue, et par suite $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$. De plus on a

$$\left\| \tilde{T} \right\| = \sup_{x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0} \frac{\left\| \tilde{T}(x_1, x_2) \right\|}{\| x_1 \| \cdot \| x_2 \|} \leq \| T \| .$$

Or pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ on a :

$$\| T(x_1)(x_2) \| = \left\| \tilde{T}(x_1, x_2) \right\| \leq \left\| \tilde{T} \right\| \cdot \| x_1 \| \cdot \| x_2 \|,$$

donc

$$\| T(x_1) \| \leq \left\| \tilde{T} \right\| \cdot \| x_1 \|, \quad (\forall x_1 \in E_1)$$

Démonstration.

De plus, puisque pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ on a :

$$\left\| \tilde{T}(x_1, x_2) \right\| = \| T(x_1)(x_2) \| \leq \| T(x_1) \| \cdot \| x_2 \| \leq \| T \| \cdot \| x_1 \| \cdot \| x_2 \| ,$$

alors $\tilde{T}$ est continue, et par suite $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$. De plus on a

$$\left\| \tilde{T} \right\| = \sup_{x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0} \frac{\left\| \tilde{T}(x_1, x_2) \right\|}{\| x_1 \| \cdot \| x_2 \|} \leq \| T \| .$$

Or pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ on a :

$$\| T(x_1)(x_2) \| = \left\| \tilde{T}(x_1, x_2) \right\| \leq \left\| \tilde{T} \right\| \cdot \| x_1 \| \cdot \| x_2 \| ,$$

donc

$$\| T(x_1) \| \leq \left\| \tilde{T} \right\| \cdot \| x_1 \| , \quad (\forall x_1 \in E_1)$$

Démonstration.

et par suite
$$\|T\| \leq \left\|\tilde{T}\right\|.$$
D'où
$$\|T\| = \left\|\tilde{T}\right\|.$$
Considérons maintenant l'application :
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F)) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E_1, E_2; F) \\ & T & \longmapsto & \tilde{T} \end{array}$$
Elle est évidemment linéaire injective. En effet,
- **linéarité de** φ **:** Soient $T, S \in \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F))$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ on a :

Démonstration.

et par suite

$$\|T\| \leq \left\|\tilde{T}\right\|.$$

D'où

$$\|T\| = \left\|\tilde{T}\right\|.$$

Considérons maintenant l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F)) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E_1, E_2; F) \\ & T & \longmapsto & \tilde{T} \end{array}$$

Elle est évidemment linéaire injective. En effet,
- **linéarité de φ :** Soient $T, S \in \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F))$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ on a : □

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{T+\lambda S}\right)(x_1,x_2) &= (T+\lambda S)(x_1)(x_2) \\
&= [T(x_1)+\lambda S(x_1)](x_2) \\
&= T(x_1)(x_2)+\lambda S(x_1)(x_2) \\
&= \tilde{T}(x_1,x_2)+\lambda \tilde{S}(x_1,x_2) \\
&= \left(\tilde{T}+\lambda\tilde{S}\right)(x_1,x_2).
\end{aligned}$$

Donc

$$\widetilde{T+\lambda S} = \tilde{T}+\lambda\tilde{S}$$

D'où φ linéaire.

- **injectivité de** φ : Soit $T \in \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F))$ tel que $\varphi(T) = \tilde{T} = 0$. Alors

$$\tilde{T}(x_1,x_2) = 0, \quad \forall (x_1,x_2) \in E_1 \times E_2$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{T+\lambda S}\right)(x_1, x_2) &= (T+\lambda S)(x_1)(x_2) \\ &= [T(x_1)+\lambda S(x_1)](x_2) \\ &= T(x_1)(x_2)+\lambda S(x_1)(x_2) \\ &= \tilde{T}(x_1, x_2)+\lambda \tilde{S}(x_1, x_2) \\ &= \left(\tilde{T}+\lambda \tilde{S}\right)(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Donc

$$\widetilde{T+\lambda S} = \tilde{T}+\lambda \tilde{S}$$

D'où φ linéaire.

- **injectivité de** φ : Soit $T \in \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F))$ tel que $\varphi(T) = \tilde{T} = 0$. Alors

$$\tilde{T}(x_1, x_2) = 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$$

□

Démonstration.

c'est-à-dire,

$$T(x_1)(x_2) = 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2.$$

Donc

$$T(x_1) = 0, \quad \forall x_1 \in E_1.$$

D'où $T = 0$, et par suite φ est injective.

Montrons que φ est surjective. Soit $U \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ une application bilinéaire continue de $E_1 \times E_2$ dans F. Pour chaque $x_1 \in E_1$ fixé, l'application partielle $U_{x_1} : x_2 \longmapsto U(x_1, x_2)$ est une application linéaire continue de E_2 dans F, c'est-à-dire, $U_{x_1} \in \mathcal{L}(E_2, F)$. De plus, on a

$$\|U_{x_1}\| \leq \|U\| \cdot \|x_1\|.$$

(car pour tout $x_2 \in E_2$ on a :
$\|U_{x_1}(x_2)\| = \|U(x_1, x_2)\| \leq \|U\| \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|$). $\square$

Démonstration.

c'est-à-dire,

$$T(x_1)(x_2) = 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2.$$

Donc

$$T(x_1) = 0, \quad \forall x_1 \in E_1.$$

D'où $T = 0$, et par suite φ est injective.

Montrons que φ est surjective. Soit $U \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ une application bilinéaire continue de $E_1 \times E_2$ dans F. Pour chaque $x_1 \in E_1$ fixé, l'application partielle $U_{x_1} : x_2 \longmapsto U(x_1, x_2)$ est une application linéaire continue de E_2 dans F, c'est-à-dire, $U_{x_1} \in \mathcal{L}(E_2, F)$. De plus, on a

$$\|U_{x_1}\| \leq \|U\| \cdot \|x_1\|.$$

(car pour tout $x_2 \in E_2$ on a :
$\|U_{x_1}(x_2)\| = \|U(x_1, x_2)\| \leq \|U\| \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|$). □

Démonstration.

Considérons alors l'application

$$T : E_1 \longrightarrow \mathcal{L}(E_2, F), \quad x_1 \longmapsto U_{x_1}.$$

Il est facile de vérifier que T est une application linéaire continue, c'est-à-dire, $T \in \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F))$.

(((En effet,

- **linéarité de** T **:** Soient $x_1, y_1 \in E_1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $x_2 \in E_2$ on a :

$$\begin{aligned} T(x_1 + \lambda y_1)(x_2) &= U_{x_1+\lambda y_1}(x_2) = U(x_1 + \lambda y_1, x_2) \\ &= U(x_1, x_2) + \lambda U(y_1, x_2) \\ &= U_{x_1}(x_2) + \lambda U_{y_1}(x_2) \\ &= T(x_1)(x_2) + \lambda T(y_1)(x_2) \\ &= [T(x_1) + \lambda T(y_1)](x_2) \end{aligned}$$

Démonstration.

Considérons alors l'application

$$T : E_1 \longrightarrow \mathcal{L}(E_2, F), \quad x_1 \longmapsto U_{x_1}.$$

Il est facile de vérifier que T est une application linéaire continue, c'est-à-dire, $T \in \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F))$.
(((En effet,
- **linéarité de T :** Soient $x_1, y_1 \in E_1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $x_2 \in E_2$ on a :

$$\begin{aligned} T(x_1 + \lambda y_1)(x_2) &= U_{x_1+\lambda y_1}(x_2) = U(x_1 + \lambda y_1, x_2) \\ &= U(x_1, x_2) + \lambda U(y_1, x_2) \\ &= U_{x_1}(x_2) + \lambda U_{y_1}(x_2) \\ &= T(x_1)(x_2) + \lambda T(y_1)(x_2) \\ &= [T(x_1) + \lambda T(y_1)](x_2) \end{aligned}$$

□

Démonstration.

Donc
$$T\left(x_1+\lambda y_1\right)=T\left(x_1\right)+\lambda T\left(y_1\right)$$
D'où T est linéaire.

- **continuité de** T : Puisque pour tout $x_1 \in E_1$ on a :
$$\left\|T\left(x_1\right)\right\|=\left\|U_{x_1}\right\| \leq \|U\| \cdot\left\|x_1\right\|$$
alors l'application linéaire T est continue)))
De plus, pour tout $\left(x_1, x_2\right) \in E_1 \times E_2$ on a :
$$\tilde{T}\left(x_1, x_2\right)=T\left(x_1\right)\left(x_2\right)=U_{x_1}\left(x_2\right)=U\left(x_1, x_2\right),$$
donc $\varphi(T)=\tilde{T}=U$. D'où la surjectivité de φ.
En tenant compte du $\|T\|=\|\tilde{T}\|$, on conclut donc φ est une isométrie de $\mathcal{L}\left(E_1, \mathcal{L}\left(E_2, F\right)\right)$ sur $\mathcal{L}\left(E_1, E_2 ; F\right)$. $\square$

Démonstration.

Donc
$$T(x_1 + \lambda y_1) = T(x_1) + \lambda T(y_1)$$

D'où T est linéaire.
- **continuité de** T : Puisque pour tout $x_1 \in E_1$ on a :

$$\|T(x_1)\| = \|U_{x_1}\| \leq \|U\| \cdot \|x_1\|$$

alors l'application linéaire T est continue)))
De plus, pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ on a :

$$\tilde{T}(x_1, x_2) = T(x_1)(x_2) = U_{x_1}(x_2) = U(x_1, x_2),$$

donc $\varphi(T) = \tilde{T} = U$. D'où la surjectivité de φ.
En tenant compte du $\|T\| = \|\tilde{T}\|$, on conclut donc φ est une isométrie de $\mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F))$ sur $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$. □

Démonstration.

Donc

$$T(x_1 + \lambda y_1) = T(x_1) + \lambda T(y_1)$$

D'où T est linéaire.
- **continuité de** T : Puisque pour tout $x_1 \in E_1$ on a :

$$\|T(x_1)\| = \|U_{x_1}\| \leq \|U\| \cdot \|x_1\|$$

alors l'application linéaire T est continue)))
De plus, pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ on a :

$$\tilde{T}(x_1, x_2) = T(x_1)(x_2) = U_{x_1}(x_2) = U(x_1, x_2),$$

donc $\varphi(T) = \tilde{T} = U$. D'où la surjectivité de φ.
En tenant compte du $\|T\| = \|\tilde{T}\|$, on conclut donc φ est une isométrie de $\mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F))$ sur $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$. $\square$

Démonstration.

Donc

$$T(x_1 + \lambda y_1) = T(x_1) + \lambda T(y_1)$$

D'où T est linéaire.

- **continuité de** T : Puisque pour tout $x_1 \in E_1$ on a :

$$\|T(x_1)\| = \|U_{x_1}\| \leq \|U\| \cdot \|x_1\|$$

alors l'application linéaire T est continue)))

De plus, pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ on a :

$$\tilde{T}(x_1, x_2) = T(x_1)(x_2) = U_{x_1}(x_2) = U(x_1, x_2),$$

donc $\varphi(T) = \tilde{T} = U$. D'où la surjectivité de φ.

En tenant compte du $\|T\| = \|\tilde{T}\|$, on conclut donc φ est une isométrie de $\mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F))$ sur $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$. □

Remarques

1. *Lorsque* $E_1 = E_2 = E$, *on obtient :* $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) \approx \mathcal{L}_2(E, F)$.
   Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$ *on a*

   $$\mathcal{L}(E, \mathcal{L}_n(E, F)) \approx \mathcal{L}_{n+1}(E, F),$$

   où on a posé $\mathcal{L}_1(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.
2. *Lorsque* $E = \mathbb{K}$, *on obtient :*
   $\mathcal{L}_2(\mathbb{K}, F) \approx \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathcal{L}(\mathbb{K}, F)) \approx \mathcal{L}(\mathbb{K}, F) \approx F$.
   Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$ *on a* $\mathcal{L}_n(\mathbb{K}, F) \approx F$.

Retour.

Remarques

1. *Lorsque* $E_1 = E_2 = E$, *on obtient :* $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) \approx \mathcal{L}_2(E, F)$ *.*
Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$ *on a*

$$\mathcal{L}(E, \mathcal{L}_n(E, F)) \approx \mathcal{L}_{n+1}(E, F),$$

où on a posé $\mathcal{L}_1(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.

2. *Lorsque* $E = \mathbb{K}$, *on obtient :*
$\mathcal{L}_2(\mathbb{K}, F) \approx \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathcal{L}(\mathbb{K}, F)) \approx \mathcal{L}(\mathbb{K}, F) \approx F$.
Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$ *on a* $\mathcal{L}_n(\mathbb{K}, F) \approx F$.

Retour.

Remarques

1. *Lorsque* $E_1 = E_2 = E$, *on obtient :* $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) \approx \mathcal{L}_2(E, F)$ *.*
   Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$ *on a*

   $$\mathcal{L}(E, \mathcal{L}_n(E, F)) \approx \mathcal{L}_{n+1}(E, F),$$

   où on a posé $\mathcal{L}_1(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$*.*
2. *Lorsque* $E = \mathbb{K}$, *on obtient :*
   $\mathcal{L}_2(\mathbb{K}, F) \approx \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathcal{L}(\mathbb{K}, F)) \approx \mathcal{L}(\mathbb{K}, F) \approx F$.
   Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$ *on a* $\mathcal{L}_n(\mathbb{K}, F) \approx F$.

Retour.

Remarques

1. *Lorsque* $E_1 = E_2 = E$*, on obtient :* $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) \approx \mathcal{L}_2(E, F)$ *.*
   Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$ *on a*
   $$\mathcal{L}(E, \mathcal{L}_n(E, F)) \approx \mathcal{L}_{n+1}(E, F),$$
   où on a posé $\mathcal{L}_1(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$*.*
2. *Lorsque* $E = \mathbb{K}$*, on obtient :*
   $\mathcal{L}_2(\mathbb{K}, F) \approx \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathcal{L}(\mathbb{K}, F)) \approx \mathcal{L}(\mathbb{K}, F) \approx F$.
   Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$ *on a* $\mathcal{L}_n(\mathbb{K}, F) \approx F$*.*

Retour.

Note 2

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Pour chaque vecteur $k \in E$ fixé, on a

1) l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{L}(E,F) & \to & F \\ & L & \longmapsto & L(k) \end{array}$$

est linéaire continue, donc différentiable et on a

$$\boxed{D\varphi(L) = \varphi} \quad \forall L \in \mathcal{L}(E,F).$$

2) Soit $g : I \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ une fonction définie sur un ouvert I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(E,F)$. Si g est dérivable en un point t_0 de I, alors l'application composée

$$\begin{array}{rccc} \varphi \circ g: & I & \to & F \\ & t & \longmapsto & g(t) \cdot k \end{array}$$

est dérivable au point t_0, et sa dérivée en ce point est donnée par :

$$(\varphi \circ g)'(t_0) = D\varphi(g(t_0))(g'(t_0)) = \varphi(g'(t_0)) = g'(t_0) \cdot k$$

c'est-à-dire,

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\neq t_0}} \frac{g(t)\cdot k - g(t_0)\cdot k}{t-t_0} = \left(\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\neq t_0}} \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\right)\cdot k.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\left.\frac{d}{dt}g(t)\cdot k\right|_{t=t_0} = \left.\frac{d}{dt}g(t))\right|_{t=t_0}\cdot k.}$$

Autre méthode :

Puisque la fonction g est dérivable en t_0 alors

$$g'(t_0) = \lim_{\substack{t\to t_0\\ t\neq t_0}} \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}$$

existe dans $\mathcal{L}(E,F)$. Et comme l'application φ est **linéaire continue,**

$$\varphi(g'(t_0)) = \lim_{\substack{t\to t_0\\ t\neq t_0}} \varphi\left(\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\right) = \lim_{\substack{t\to t_0\\ t\neq t_0}} \frac{\varphi(g(t))-\varphi(g(t_0))}{t-t_0}$$

Autrement dit,

$$g'(t_0) \cdot k = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{g(t) \cdot k - g(t_0) \cdot k}{t - t_0}$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{\left. \frac{d}{dt} g(t)) \right|_{t=t_0} \cdot k = \left. \frac{d}{dt} g(t) \cdot k \right|_{t=t_0}}$$

◂ Retour.

Autre méthode

D'après la relation (1) on a

$$D^2 f(a)(h,k) = \frac{d}{dt}\frac{d}{ds} f(a+th+sk)\Big|_{t=s=0}.$$

Or

$$\begin{aligned} a+th+sk &= (a_1,a_2)+(th_1,th_2)+(sk_1,sk_2) \\ &= (a_1+th_1+sk_1, a_2+th_2+sk_2). \end{aligned}$$

Donc, puisque f est bilinéaire, on a

$$\begin{aligned} & f(a+th+sk) \\ = \ & f(a_1+th_1+sk_1, a_2+th_2+sk_2) \\ = \ & f(a_1,a_2)+t\,f(a_1,h_2)+s\,f(a_1,k_2) \\ & +t\,f(h_1,a_2)+t^2 f(h_1,h_2)+ts\,f(h_1,k_2) \\ & +s\,f(k_1,a_2)+ts\,f(k_1,h_2)+s^2 f(k_1,k_2) \end{aligned}$$

Par suite, on a

$$\left.\frac{d}{ds} f\left(a+th+sk\right)\right|_{s=0} = f\left(a_1, k_2\right) + t\, f\left(h_1, k_2\right) + f\left(k_1, a_2\right) + t\, f\left(k_1, h_2\right)$$

donc

$$\left.\frac{d}{dt}\frac{d}{ds} f\left(a+th+sk\right)\right|_{t=s=0} = f\left(h_1, k_2\right) + f\left(k_1, h_2\right).$$

D'où

$$D^2 f\left(a\right)\left(h, k\right) = f\left(h_1, k_2\right) + f\left(k_1, h_2\right).$$

Retour.

Note 3

Puisque a est élément de l'ouvert U, il existe $r > 0$ tel que $B\,(a, r) \subset U$. Donc la fonction

$$(h, k) \stackrel{A}{\longmapsto} f(a + h + k) - f(a + h) - f(a + k) + f\,(a)$$

est bien définie sur le voisinage ouvert $B\left(0, \frac{r}{2}\right) \times B\left(0, \frac{r}{2}\right)$ de $(0, 0)$ dans $E \times E$. Retour.

Note 4

La fonction $g : B\left(0, \frac{\eta}{2}\right) \longrightarrow F$ définie par

$$g(k) = f(a+h+k) - f(a+k) - f(a+h) + f(a) - \left(D^2 f(a) \cdot h\right) \cdot k.$$

est différentiable sur $B\left(0, \frac{\eta}{2}\right)$ comme somme et différence $g = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - T$ de fonctions différentiables sur $B\left(0, \frac{\eta}{2}\right)$ avec

$$\begin{cases} \varphi_1(k) = f(a+h+k) \\ \varphi_2(k) = f(a+k) \\ \varphi_3(k) = f(a) - f(a+h) = cte \\ T(k) = \left(D^2 f(a) \cdot h\right) \cdot k \end{cases}$$

De plus, pour tout point $k \in B\left(0, \frac{\eta}{2}\right)$ on a :

$$Dg(k) = Df(a+h+k) - Df(a+k) - D^2 f(a) \cdot (h).$$

1. L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & B\left(0, \frac{\eta}{2}\right) & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(a+x) \end{array}$$

est différentiable sur $B\left(0, \frac{\eta}{2}\right)$, et pour tout point $x \in B\left(0, \frac{\eta}{2}\right)$ on a :

$$D\varphi(x) = Df(a+x).$$

En effet, pour $L = Df(a+x)$ on a

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|\varphi(x+h) - \varphi(x) - L(h)\|}{\|h\|} \\ = \ & \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|f(a+x+h) - f(a+x) - Df(a+x)(h)\|}{\|h\|} \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

car f est différentiable au point $a+x$.

1. De même, l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi: & B\left(0, \frac{\eta}{2}\right) & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(a+h+x) \end{array}$$

est différentiable sur $B\left(0, \frac{\eta}{2}\right)$, et pour tout point $x \in B\left(0, \frac{\eta}{2}\right)$ on a :

$$D\psi(x) = Df(a+h+x).$$

2. L'application $T = D^2 f(a) \cdot h \in \mathcal{L}(E, F)$ est linéaire continue, donc T est différentiable sur $B\left(0, \frac{\eta}{2}\right)$, et pour tout point $x \in B\left(0, \frac{\eta}{2}\right)$ on a :

$$DT(x) = T = D^2 f(a) \cdot h.$$

Retour.

Note 5(Rappel)

Définition (Dérivées partielles)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \longrightarrow F$ une application de U dans un e.v.n (réel) F. Soit $a = (a_1, \cdots, a_n) \in U$.

On appelle dérivée partielle de f au point a par rapport à la i-ième variable, lorsqu'elle existe, la dérivé au point a_i de l'application partielle

$$x_i \longmapsto f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots, a_n).$$

On la note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$; c'est un élément de F, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \frac{d}{dt} f(a + te_i)\Big|_{t=0}.$$

Note 5(Rappel)

Définition (Dérivées partielles)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \longrightarrow F$ une application de U dans un e.v.n (réel) F. Soit $a = (a_1, \cdots, a_n) \in U$.
On appelle dérivée partielle de f au point a par rapport à la i-ième variable, lorsqu'elle existe, la dérivé au point a_i de l'application partielle

$$x_i \longmapsto f\left(a_1, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots, a_n\right).$$

On la note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$; c'est un élément de F, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \frac{d}{dt} f(a + te_i)\Big|_{t=0}.$$

En particulier, pour $g = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ on a par définition

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{g(a + te_i) - g(a)}{t} = \frac{d}{dt} g(a + te_i)\Big|_{t=0}$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + te_i)\Big|_{t=0}.$$

Or

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + te_i) = \frac{d}{ds} f(a + te_i + se_j)\Big|_{s=0}$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{d}{dt}\frac{d}{ds} f(a + te_i + se_j)\Big|_{t=s=0}$$

Retour.

Note 6

Si $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, alors la matrice de la forme bilinéaire φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est

$$A = \begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \varphi(e_1, e_2) & \cdots & \varphi(e_1, e_n) \\ \varphi(e_2, e_1) & \varphi(e_2, e_2) & \cdots & \varphi(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(e_n, e_1) & \varphi(e_n, e_2) & \cdots & \varphi(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Soient $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On a

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

Donc, par bilinéarité de φ, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j\, \varphi(e_i, e_j)\end{aligned}$$

Si X est le vecteur colonne repésentant x dans la base canonique, et si Y est le vecteur colonne repésentant y dans la base canonique, alors on a

$$\varphi(x,y) = {}^t XAY.$$

Retour.

Note 7

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}^*$, et $f : U \longrightarrow F$ une application p fois différentiable en un point $a \in U$. Alors pour tous vecteurs $h_1 = \left(h_{1,1}, h_{1,2}, \cdots, h_{1,n}\right) \in \mathbb{R}^n$, $h_2 = \left(h_{2,1}, h_{2,2}, \cdots, h_{2,n}\right) \in \mathbb{R}^n$, ..., $h_p = \left(h_{p,1}, h_{p,2}, \cdots, h_{p,n}\right) \in \mathbb{R}^n$ on a $h_1 = \sum_{i_1=1}^n h_{1,i_1} e_{i_1}$, $h_2 = \sum_{i_2=1}^n h_{2,i_2} e_{i_2}$, ...,$h_p = \sum_{i_p=1}^n h_{p,i_p} e_{i_p}$.
Donc par multilinéarité de $D^p f(a)$ on a

$$
\begin{aligned}
& D^p f(a) \cdot (h_1, h_2, \cdots, h_p) \\
= \; & \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_p=1}^n h_{1,i_1} h_{2,i_2} \cdots h_{p,i_p} D^p f(a) \cdot \left(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_p}\right) \\
= \; & \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_p=1}^n h_{1,i_1} h_{2,i_2} \cdots h_{p,i_p} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}}(a) \, .
\end{aligned}
$$

En particulier, pour $h = (h_1, h_2, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$h = \sum_{i_1=1}^{n} h_{i_1} e_{i_1} = \sum_{i_2=1}^{n} h_{i_2} e_{i_2} = \cdots = \sum_{i_p=1}^{n} h_{i_p} e_{i_p}.$$

Donc par multilinéarité de $D^p f(a)$ on a

$$\begin{aligned}
&D^p f(a) \cdot \underbrace{(h, h, \cdots, h)}_{p \text{ fois}} \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_p} D^p f(a) \cdot \left(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_p}\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_p} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}}(a) \\
&= \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{N} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = p}} \frac{p!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!} h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \cdots h_n^{\alpha_n} \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(a).
\end{aligned}$$

Note 8 (Exemples)

-Cas où $n = 3$ **et** $p = 2$: Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, et $f : U \longrightarrow F$, $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto f(x_1, x_2, x_3)$ une application 2 fois différentiable en un point $a \in U$. Alors pour tout $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\begin{aligned}
& D^2 f(a) \cdot (h, h) \\
= \;& \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \sum_{i_1=1}^{3} \sum_{i_2=1}^{3} h_{i_1} h_{i_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(a) \\
= \;& h_1 h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) + h_1 h_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(a) \\
& + h_2 h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) + h_2 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(a) + h_2 h_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(a) \\
& + h_3 h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(a) + h_3 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(a) + h_3 h_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_3}(a)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
& D^2 f(a)\cdot(h,h) \\
= \;& h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) + h_3^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(a) \\
& + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) + 2h_1 h_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(a) + 2h_2 h_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(a) \\
= \;& \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{N} \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2}} \frac{2!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} h_3^{\alpha_3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}(a).
\end{aligned}$$

-Cas où $n = 3$ et $p = 3$:
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$,, et $f : U \longrightarrow F$, $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto f(x_1, x_2, x_3)$ une application 3 fois différentiable en un point $a \in U$. Alors pour tout $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$
\begin{aligned}
& D^3 f(a) \cdot (h, h, h) \\
= & \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} h_i h_j h_k \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) \\
= & \sum_{i_1=1}^{3} \sum_{i_2=1}^{3} \sum_{i_3=1}^{3} h_{i_1} h_{i_2} h_{i_3} \frac{\partial^3 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3}}(a) \\
= & \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3}} \frac{3!}{\alpha_1 ! \alpha_2 ! \alpha_3 !} h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} h_3^{\alpha_3} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}(a) .
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
& D^3 f(a) \cdot (h,h,h) \\
= \;& h_1^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(a) + h_2^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(a) + h_3^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_3^3}(a) \\
& + 3h_1^2 h_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(a) + 3h_1^2 h_3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_3}(a) + 3h_1 h_2^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(a) \\
& + 3h_2^2 h_3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_3}(a) + 3h_1 h_3^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_3^2}(a) + 3h_2 h_3^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_3^2}(a) \\
& + 6h_1 h_2 h_3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}(a).
\end{aligned}
$$

Retour.

Note 9

Soit $f : U \to F$ une application p fois différentiable en un point $a \in U$ (avec $p \geq 2$). On a

$$D^p f(a) \in \mathcal{L}\left(E, \mathcal{L}_{p-1}(E, F)\right) \approx \mathcal{L}_p(E, F).$$

Pour tout $h \in E$ on pose

$$D^p f(a) \cdot (h)^p = D^p f(a) \cdot \underbrace{(h, h, \cdots, h)}_{p \text{ fois}}$$

c'est un élément de F.

D'autre part, on a aussi

$$D^p f(a) = D^{p-1}(Df)(a) \in \mathcal{L}_{p-1}(E, \mathcal{L}(E, F)) \approx \mathcal{L}_p(E, F).$$

Donc pour tout $h \in E$ on a

$$D^p f(a) \cdot (h)^{p-1} = D^p f(a) \cdot \underbrace{(h, h, \cdots, h)}_{(p-1) \text{ fois}}$$

est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

Note 9

Soit $f : U \to F$ une application p fois différentiable en un point $a \in U$ (avec $p \geq 2$). On a

$$D^p f(a) \in \mathcal{L}\left(E, \mathcal{L}_{p-1}(E, F)\right) \approx \mathcal{L}_p(E, F).$$

Pour tout $h \in E$ on pose

$$D^p f(a) \cdot (h)^p = D^p f(a) \cdot \underbrace{(h, h, \cdots, h)}_{p \text{ fois}}$$

c'est un élément de F.
D'autre part, on a aussi

$$D^p f(a) = D^{p-1}(Df)(a) \in \mathcal{L}_{p-1}\left(E, \mathcal{L}(E, F)\right) \approx \mathcal{L}_p(E, F).$$

Donc pour tout $h \in E$ on a

$$D^p f(a) \cdot (h)^{p-1} = D^p f(a) \cdot \underbrace{(h, h, \cdots, h)}_{(p-1) \text{ fois}}$$

est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

Et pour tout $x \in E$ on a

$$\left(D^p f(a) \cdot (h)^{p-1}\right) \cdot x = D^p f(a) \cdot \left(\overbrace{h, h, \cdots, h}^{(p-1) \text{ fois}}, x\right).$$

Notons que

$$D^p f(a) \cdot (th)^{p-1} = t^{p-1}\, D^p f(a) \cdot (h)^{p-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Retour.

Et pour tout $x \in E$ on a

$$\left(D^p f(a) \cdot (h)^{p-1}\right) \cdot x = D^p f(a) \cdot \left(\overbrace{h, h, \cdots, h}^{(p-1)\ fois}, x\right).$$

Notons que

$$D^p f(a) \cdot (th)^{p-1} = t^{p-1}\ D^p f(a) \cdot (h)^{p-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Retour.

Note 10

On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} D^k f(a) \cdot (h)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-t)^{k}}{k!} D^{k+1} f(a) \cdot (h)^{k+1}$$

En effet, faisons le changement de variable $p = k - 1$. Puisque k varie de 1 à n, alors p varie de 0 à $n - 1$. D'où

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} D^k f(a) \cdot (h)^k = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(1-t)^{p}}{p!} D^{p+1} f(a) \cdot (h)^{p+1}$$

Retour.

Note 11

Pour $a \in U$ et $b \in U$ tel que le segment $[a, b]$ soit contenu dans U, on a

$$\left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a) \cdot (b-a)^k \right\| \leq \frac{M \|b-a\|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(En effet, il suffit de faire le changement de variable $b = a + h$)

Théorème 16 (Cas d'une fonction de la variable réelle ($E = R$))

Soit $f : I \longrightarrow F$ une application d'un ***intervalle ouvert*** *I de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel normé F. On suppose que l'application $f : I \longrightarrow F$ est $n+1$ fois dérivable dans I ; Supposons qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que*

$$\left\| f^{(n+1)}(x) \right\| \leq M, \text{ pour tout } x \in I.$$

Pour tous $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}$ tels que $(a+h) \in I$, on a

$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} h^k \, f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{M \; |h|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour $a \in I$ et $b \in I$, on a

$$\left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(b-a)^k \, f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{M \; |b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(En effet, il suffit de faire le changement de variable $b = a + h$)

Cas particulier

Soit $f : I \longrightarrow F$ une application 2 fois dérivable dans I; Supposons qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que

$$\left\| f''(x) \right\| \leq M, \text{ pour tout } x \in I.$$

Pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $(a+h) \in I$, on a

$$\left\| f(a+h) - f(a) - hf'(a) \right\| \leq \frac{M\, h^2}{2!}.$$

De même, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $(a-h) \in I$, on a

$$\left\| f(a-h) - f(a) + hf'(a) \right\| \leq \frac{M\, h^2}{2!}.$$

Retour.