Algèbre1
Chapitre 1: Logique-Ensembles-Applications

Jawad SALHI

Faculté des Sciences et Techniques - Errachidia

A.U. 2021/2022

Plan

Raisonnement : Implication

Definition (Implication)

Si P et Q sont deux assertions, alors (NON P) ou Q se note $P \Rightarrow Q$. Le connecteur $\Rightarrow$ est appelé implication, et l'assertion $P \Rightarrow Q$ se lit alors P implique Q.

Remarque

Soient P et Q deux assertions. Pour démontrer $P \Rightarrow Q$:

- *si P est fausse, alors il n'y a rien à faire ;*
- *si P est vraie, alors on est dans l'obligation de prouver que Q est vraie.*

Raisonnement : Négation de l'implication

Definition (Négation d'une implication)

Si P et Q sont deux assertions, la négation de $P \Rightarrow Q$ s'écrit :

$$P \text{ et } (\text{NON } Q).$$

En utilisant la règle de négation d'une assertion commençant par un "$\forall$" on en déduit la proposition suivante.

Proposition

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux prédicats de la variable x définis sur un ensemble E. La négation de l'assertion "$\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$" est :

$$\exists x \in E, P(x) \text{ et } (\text{NON } Q(x)).$$

Raisonnement : Équivalence

Definition (Équivalence)

Si P et Q sont deux assertions, l'assertion $P \Leftrightarrow Q$ est l'abréviation de :

$$(P \Rightarrow Q) \textbf{ ET } (Q \Rightarrow P).$$

Le connecteur "$\Leftrightarrow$" est appelé équivalence, et l'assertion $P \Leftrightarrow Q$ se lit "P équivaut à Q" ou encore "P est équivalente à Q".

Raisonnement : Contraposée, implication réciproque

Definition

- $(\text{NON}\, Q) \Rightarrow (\text{NON}\, P)$ est la **contraposée** de l'implication $P \Rightarrow Q$.
- $Q \Rightarrow P$ est l'implication **réciproque** de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Proposition

L'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie si, et seulement si, sa contraposée est vraie.

Démonstration.

Par définition, $(\text{NON}\, Q) \Rightarrow (\text{NON}\, P)$ s'écrit

$$(\text{NON}(\text{NON}\, Q))\ \text{OU}\ (\text{NON}\, P) \quad \text{ou encore} \quad Q\ \text{OU}\ (\text{NON}\, P),$$

ce qui est équivalent à $(\text{NON}\, P)$ OU Q, et donc à $P \Rightarrow Q$. □

Opérations sur les ensembles : Inclusion

Definition (Relation d'inclusion)

Soient E et F deux ensembles. L'assertion

$$\forall x \in F, \quad x \in E$$

se lit "F est inclus dans E" ou "F est une partie de E", et se note $F \subset E$.

Definition (Ensemble vide)

- On admet qu'il existe un unique ensemble, appelé **ensemble vide** et noté $\emptyset$, qui ne contient aucun élément et qui est donc tel que, pour tout prédicat $P(x)$ de la variable x, l'assertion "$\exists x \in \emptyset, \quad P(x)$" est fausse.
- En appliquant l'item précédent à NON P, on déduit que, pour tout prédicat $P(x)$ de la variable x, l'assertion "$\forall x \in \emptyset, \quad P(x)$" est vraie.

Opérations sur les ensembles : Inclusion

Proposition

Pour tout ensemble E, on a : $\emptyset \subset E$.

Démonstration.

D'après le second item ci-dessus, l'assertion :

$$\forall x \in \emptyset \quad x \in E$$

est vraie, ce qui entraîne que $\emptyset \subset E$. □

Opérations sur les ensembles : Égalité d'ensembles

Definition (Égalité d'ensembles)

Par convention, deux ensembles E et F sont égaux si, et seulement si, tout élément de l'un est élément de l'autre, ou encore :

$$(\forall x \in E \quad x \in F) \quad \text{ET} \quad (\forall x \in F \quad x \in E).$$

En termes d'inclusion, cette équivalence devient :

$$E = F \Leftrightarrow (E \subset F \text{ ET } F \subset E).$$

Remarque

La principale méthode pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux est d'établir la double inclusion $E \subset F$ et $F \subset E$.

Opérations sur les ensembles : Intersection, réunion

Definition (Intersection, réunion)

Soit E et F deux ensembles.

- La **réunion** de E et F est l'ensemble, noté $E \cup F$ (lire "E union F"), des éléments qui sont dans E ou dans F ; on a donc :

$$x \in E \cup F \Leftrightarrow (x \in E \quad \text{OU} \quad x \in F).$$

- L'**intersection** de E et F est l'ensemble, noté $E \cap F$ (lire "E inter F"), des éléments qui sont à la fois dans E et dans F ; on a donc :

$$x \in E \cap F \Leftrightarrow (x \in E \quad \text{ET} \quad x \in F).$$

Definition (Ensembles disjoints)

Deux ensembles E et F sont disjoints si $E \cap F = \emptyset$.

Notation : Si E et F sont disjoints, l'union $E \cup F$ peut être notée $E \sqcup F$.

Opérations sur les ensembles : Différence, complémentaire

Definition (Différence, complémentaire)

Soit E et F deux ensembles.

- On appelle **différence ensembliste** E moins F, l'ensemble, noté $E \setminus F$ (lire "E privé de F"), des éléments qui sont dans E mais pas dans F ; on a donc :

$$x \in E \setminus F \Leftrightarrow (x \in E \quad \text{ET} \quad x \notin F).$$

- Lorsque $F \subset E$, l'ensemble $E \setminus F$ s'appelle **complémentaire** de F dans E, et il se note alors $\complement_E F$ ou F^c ou encore $\bar{F}$.

Opérations sur les ensembles : Différence, complémentaire

Exercice

Soient E et I deux ensembles et $\{A_i \mid \quad i \in I\}$ un ensemble de parties de E. Montrer que : $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$.

Solution

Pour tout $x \in E$:

$$x \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \iff \text{non}\left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right) \iff \text{non}\,(\exists i \in I, \quad x \in A_i)$$

$$\iff \forall i \in I, \quad \text{non}\,(x \in A_i) \iff \quad \forall i \in I, \quad x \in \overline{A_i}$$

$$\iff \quad x \in \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Opérations sur les ensembles : Ensemble des parties d'un ensemble

Definition

Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E se note $\mathcal{P}(E)$, et vérifie :

$$F \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow F \subset E.$$

Exercice

Soit E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties et $\varphi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une application croissante, c'est-à-dire telle que $A \subset B \Rightarrow \varphi(A) \subset \varphi(B)$.
On pose $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ défini par :
$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid \varphi(A) \subset A\}$, et on définit M par : $M = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$.

1. Justifier que $\mathcal{S}$ est non vide.
2. Montrer que $\varphi(M) \subset M$.
3. Montrer que $\varphi(M) \in \mathcal{S}$ et en déduire que $\varphi(M) = M$.

Opérations sur les ensembles : Ensemble des parties d'un ensemble

Solution

1. De toute évidence, $E \in \mathcal{S}$, donc $\mathcal{S} \neq \varnothing$.
2. Par croissance de φ, pour tout A de $\mathcal{S}$, $M \subset A$, donc $\varphi(M) \subset \varphi(A)$. Ainsi,
$$\varphi(M) \subset \bigcap_{A \in \mathcal{S}} \varphi(A)$$
Or, pour tout A de $\mathcal{S}$, par définition de $\mathcal{S}$, on a $\varphi(A) \subset A$. Ainsi,
$$\varphi(M) \subset \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A = M$$
3. Puisque φ est croissante, on a alors $\varphi(\varphi(M)) \subset \varphi(M)$. Comme par définition de φ, $\varphi(M) \in \mathcal{P}(E)$, on en déduit, par définition de $\mathcal{S}$, que $\varphi(M) \in \mathcal{S}$. Par principe de double inclusion, on a bien $\varphi(M) = M$.

Grands types de démonstrations : Par contraposée

Pour prouver une implication du type $P \Rightarrow Q$, il peut être intéressant de prouver sa contraposée, l'implication NON $Q \Rightarrow$ NON P, qui lui est équivalente. Cela n'est évidemment pertinent que si cette contraposée est plus facile à prouver !

Exercice

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\left(\forall \varepsilon > 0, \quad |a| \leq \varepsilon\right) \Rightarrow a = 0.$$

Solution

Raisonnons par contraposée et montrons que :

$$a \neq 0 \Rightarrow \left(\exists \varepsilon > 0, \quad |a| > \varepsilon\right).$$

Supposons que $a \neq 0$. Posons $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$. Alors $\varepsilon > 0$ et on a bien $|a| > \varepsilon$.

Grands types de démonstrations : Par l'absurde

Pour commencer, on appelle contradiction toute proposition de la forme : Q ET (NON Q).
Le principe du raisonnement par l'absurde s'énonce alors ainsi : Si, en supposant que NON P est vraie, on peut exhiber une assertion Q telle que Q ainsi que NON Q soient vraies, alors on en déduit que P est vraie.

Exercice

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, continue et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que f est constante.

Solution

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a < b$ dans I tel que $f(a) \neq f(b)$. Par le théorème des valeurs intermédiaire, toute valeur $[f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$) est prise par f dans $[a, b]$. Comme cet intervalle contient un nombre infini de points, on aboutit à une contradiction. Donc, pour tous $a, b \in I$, on a : $f(a) = f(b)$ et f est constante.

Grands types de démonstrations : Par analyse-synthèse

Quand on veut déterminer l'ensemble des éléments d'un ensemble E qui satisfont une propriété $\mathcal{P}$, on raisonne souvent par analyse-synthèse de la manière suivante.

- Dans l'analyse, on part d'un élément quelconque de E et on montre que s'il satisfait la propriété $\mathcal{P}$, il a forcément telle ou telle tête et non telle autre. En résumé, **DANS L'ANALYSE, ON RESTREINT LE CHAMP DES SOLUTIONS POSSIBLES**.
- Dans la synthèse, on vérifie que les possibilités obtenues dans l'analyse sont plus que des possibilités, qu'elles sont bel et bien solutions du problème étudié, i.e. des éléments de E qui satisfont la propriété $\mathcal{P}$.

Exercice

Chercher l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(y - f(x)) = 2 - x - y$.

Solution

- Analyse : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(y - f(x)) = 2 - x - y$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si on choisit pour y la valeur $f(x)$: $f(0) = 2 - x - f(x)$, donc : $f(x) = (2 - f(0)) - x$. Ce calcul prouve que f est affine de la forme $x \mapsto \lambda - x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Synthèse : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons f la fonction $x \mapsto \lambda - x$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
  $f(y-f(x)) = f(y-(\lambda-x)) = f(x+y-\lambda) = \lambda-(x+y-\lambda) = 2\lambda-x-y$.
  Ainsi, la seule valeur de λ pour laquelle f satisfait le problème étudié est le réel 1.
- Conclusion : la fonction $x \mapsto 1 - x$ est la seule solution du problème.

Grands types de démonstrations : Par récurrence

Le théorème suivant permet de faire des raisonnements par récurrence.

Théorème

Soit P un prédicat défini sur $\mathbb{N}$. Si $P(0)$ est vraie et si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Rightarrow P(n+1), \quad (\star)$$

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Méthode

Pour montrer, par récurrence, qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geq n_0$, on montre que :

- $P(n_0)$ est vraie (initialisation).
- Pour tout entier n fixé tel que $n \geq n_0$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie (hérédité).

Démonstration.

Raisonnons par l'absurde en supposant que P n'est pas vérifié sur tout $\mathbb{N}$.

- L'ensemble A des entiers n pour lesquels $P(n)$ est faux est alors une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui admet donc un plus petit élément α.
- Comme $P(0)$ est vraie, on a $0 \notin A$ et donc $\alpha \neq 0$; étant donné que α est le plus petit élément de A, l'entier $\alpha - 1$ n'appartient pas à A.
- Par suite $P(\alpha - 1)$ est vraie ; la relation $(\star)$ entraîne alors que $P(\alpha)$ est vraie, ce qui contredit l'appartenance de α à A.

L'hypothèse que P n'est pas vérifié sur tout $\mathbb{N}$ est donc absurde, ce qui prouve que, pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie. □

Grands types de démonstrations : Par récurrence

Exercice

Soit f une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) \geq n$.

Solution

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété : $f(n) > n$.

- **Initialisation :** $P(0)$ est vrai puisque, par hypothèse, on a $f(0) \in \mathbb{N}$ et donc $f(0) \geq 0$.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vrai. On a donc $f(n) \geq n$. Comme f est strictement croissante, on a

$$f(n+1) > f(n) \geq n.$$

Étant donné que $f(n+1) \in \mathbb{N}$, on en déduit $f(n+1) \geq n+1$, ce qui prouve $P(n+1)$ et termine la démonstration par récurrence.

Applications

Dans toute cette section E, F, G et H désignent des ensembles quelconques. De plus, on appelle **graphe** de E vers F une partie quelconque du produit cartésien $E \times F$.

Definition (Application)

Une **application**, ou **fonction**, est un triplet $u = (E, F, \Gamma)$ où Γ est un graphe de E vers F tel que pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ vérifiant $(x, y) \in \Gamma$, ce qui s'écrit encore :

$$\forall x \in E \quad \exists! y \in F \quad (x, y) \in \Gamma.$$

On dit aussi que u est une application de E dans F ou de E vers F.

Applications

Avec les notations de la définition précédente :

- E est appelé l'**ensemble de départ** ou ensemble de définition de u ;
- F est l'**ensemble d'arrivée** de u ;
- pour $x \in E$, l'unique élément $y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$ s'appelle **image de** x **par** u et se note $u(x)$;
- quand on a $y = u(x)$, on dit aussi que x est un **antécédent** de y ;
- l'ensemble :

$$\{y \in F \mid \exists x \in E \quad y = u(x)\} = \{u(x); x \in E\}$$

  est l'**ensemble image** de u, c'est un sous-ensemble de F ;
- Γ, le graphe de u, est égal à $\{(x, u(x)); x \in E\}$;

Applications : Injectivité, surjectivité, bijectivité

Definition

Soit $u \in \mathcal{F}(E, F)$. On dit qu'elle est **injective**, ou que c'est une **injection**, si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes.

- Tout élément de F a au plus un antécédent par u.
- Pour tout $y \in F$, l'équation $u(x) = y$ possède au plus une solution.
- On a : $\forall x_1 \in E \quad \forall x_2 \in E, \quad u(x_1) = u(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Remarque

- *En général, c'est le 3 point que l'on utilise pour prouver l'injectivité.*
- *Pour $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$, fonction réelle d'une variable réelle, l'injectivité se justifie souvent en prouvant que u est strictement monotone.*
- *Pour prouver que u n'est pas injective, il suffit d'exhiber $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ tels que $x_1 \neq x_2$ et $u(x_1) = u(x_2)$.*

Applications : Injectivité, surjectivité, bijectivité

Exercice

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $u_A \mid \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A. \end{array}$

Montrer que si $A \neq E$, alors l'application u_A n'est pas injective.

Solution

Supposons $A \neq E$. Comme $u_A(A) = A = u_A(E)$, il est clair que u_A n'est pas injective.

Applications : Injectivité, surjectivité, bijectivité

Definition

Soit $u \in \mathcal{F}(E, F)$. On dit qu'elle est **surjective**, ou que c'est une **surjection**, si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes.

- Tout élément de F a au moins un antécédent par u.
- Pour tout $y \in F$, l'équation $u(x) = y$ possède au moins une solution.
- On a : $\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = u(x)$.

Remarque

Pour prouver que u n'est pas surjective, on utilise, la négation des propriétés précédente : il suffit donc d'exhiber un $y \in F$ qui n'a pas d'antécédent.

Applications : Injectivité, surjectivité, bijectivité

Exercice

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $u_A \mid \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A. \end{array}$

Montrer que l'application u_A est surjective si, et seulement si, $A = E$.

Solution

- Supposons $A = E$. Alors u_A est l'identité de $\mathcal{P}(E)$; elle est donc surjective.
- Supposons $A \neq E$. Alors, pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, on a $u(X) \subset A$ et donc $u(X) \neq E$. Ainsi E n'a pas d'antécédent par u_A, et cette application n'est pas surjective.

Applications : Injectivité, surjectivité, bijectivité

Definition

Soit $u \in \mathcal{F}(E, F)$. On dit qu'elle est **bijective**, ou que c'est une **bijection**, si elle vérifie l'une des quatre propriétés équivalentes suivantes.

- L'application u est injective et surjective.
- Tout élément de F a un et un seul antécédent par u.
- Pour tout $y \in F$, l'équation $u(x) = y$ possède une unique solution.
- On a : $\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad y = u(x)$.

Remarque

Pour prouver qu'une application est bijective, le plus élémentaire est de prouver qu'elle est injective et qu'elle est surjective.

Applications : Composition d'applications

Definition

Si $u \in \mathcal{F}(E, F)$ et $v \in \mathcal{F}(F, G)$, l'application $x \longmapsto v(u(x))$, de E dans G est appelée **composée des applications** v et u ; on la note $v \circ u$.

Proposition

Soit trois applications $u \in \mathcal{F}(E, F)$, $v \in \mathcal{F}(F, G)$ et $w \in \mathcal{F}(G, H)$. Alors les applications $w \circ (v \circ u)$ et $(w \circ v) \circ u$ sont égales.

Remarque

*On se réfère couramment à la propriété précédente en parlant de l'**associativité de la composition** des applications.*

Applications : Composition d'applications

Proposition

Soit $u \in \mathcal{F}(E, F)$ et $v \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. *Si u et v sont injectives, alors $v \circ u$ est injective.*
2. *Si u et v sont surjectives, alors $v \circ u$ est surjective.*
3. *Si u et v sont bijectives, alors $v \circ u$ est bijective.*

Démonstration.

1. Supposons u et v injectives. Soit $x, x' \in E$ tel que $v(u(x)) = v(u(x'))$. Grâce à l'injectivité de v on a $u(x) = u(x')$ et l'injectivité de u donne alors $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de $v \circ u$.
2. Supposons u et v surjectives. Soit $z \in G$. Grâce à la surjectivité de v on sait qu'il existe $y \in F$ tel que $z = v(y)$. Comme u est surjective, on peut aussi considérer un $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On a alors $z = v(u(x)) = (v \circ u)(x)$, ce qui prouve la surjectivité de $v \circ u$.
3. Conséquence immédiate des précédents.

Applications : Application réciproque

Definition

Soit u une application bijective de E dans F. Alors l'application de F dans E qui, à tout $y \in F$, associe l'unique $x \in E$ tel que $y = u(x)$, s'appelle application réciproque de u et se note u^{-1}.

Proposition

Si u est une application bijective de E dans F, alors on a :
$u^{-1} \circ u = Id_E \quad et \quad u \circ u^{-1} = Id_F$.

Exercice

Soient E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrer que f est bijective et que : $f^{-1} = f$.

Solution

- Injectivité : Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. On a alors :

$$x_1 = (f \circ f)(x_1) = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = (f \circ f)(x_2) = x_2.$$

  Ceci montre que f est injective.

- Surjectivité : Soit $y \in E$. On a : $y = (f \circ f)(y) = f(f(y))$, donc il existe $x \in E$ (on peut prendre $x = f(y)$) tel que $y = f(x)$. Ceci montre que f est surjective. On conclut que f est bijective.

- Puisque f est bijective, on peut utiliser f^{-1} et on a :
$f^{-1} = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_E = f^{-1} \circ (f \circ f) = \left(f^{-1} \circ f\right) \circ f = \mathrm{Id}_E \circ f = f.$

Applications : Application réciproque

Proposition

Si $u \in F^E$ et $v \in E^F$ vérifient $u \circ v = Id_F$ et $v \circ u = Id_E$, alors elles sont toutes deux bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Démonstration.

- Supposons qu'il existe une application $v \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que $v \circ u = Id_E$, et montrons que u est injective. Soit donc $x, x' \in E$ tels que $u(x) = u(x')$; alors on a $v(u(x)) = v(u(x'))$. Comme $v \circ u = Id_E$, on en déduit $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de u.
- L'existence d'une application $v \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que $u \circ v = Id_F$ entraîne que u est surjective. En effet, pour tout $y \in F$, si l'on pose $x = v(y)$, alors on a $u(x) = y$ car $u \circ v = Id_F$, ce qui prouve que u est surjective.

Par suite, l'application u est bijective. On peut alors écrire :

$$v = Id_E \circ v = u^{-1} \circ u \circ v = u^{-1} \circ Id_F = u^{-1}.$$

Par symétrie, on en déduit que v est bijective, et que $v^{-1} = u$. □

Applications : Application réciproque

Remarque (Méthode pour montrer que u est bijective et donner u^{-1})

Soit $u : E \longrightarrow F$.

- *Si l'on exhibe une application $v : F \longrightarrow E$ telle que $u \circ v = Id_F$ et $v \circ u = Id_E$, alors on prouve que u est bijective et que $u^{-1} = v$.*
- *Souvent, la démonstration de la surjectivité de u mène à expliciter une solution de l'équation $u(x) = y$, de la forme $x = v(y)$. Une méthode efficace de rédaction consiste alors à exhiber directement v puis à prouver $u \circ v = Id_F$ et $v \circ u = Id_E$.*

Applications : Application réciproque

Corollaire

Si $u \in F^E$ et $v \in G^F$ sont deux applications bijectives, alors $v \circ u$ est une application bijective et $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.

Démonstration.

L'associativité de la composition nous donne :

$$(u^{-1} \circ v^{-1}) \circ (v \circ u) = u^{-1} \circ (v^{-1} \circ v) \circ u = u^{-1} \circ Id_F \circ u = u^{-1} \circ u = Id_E,$$

et

$$(v \circ u) \circ (u^{-1} \circ v^{-1}) = v \circ (u \circ u^{-1}) \circ v^{-1} = v \circ Id_F \circ v^{-1} = v \circ v^{-1} = Id_G.$$

La proposition précédente nous permet alors de conclure. □

Applications : Application réciproque

Exercice

Soit E un ensemble et A une partie de E. On pose $B = \complement_E A$. Montrer que

$$u \mid \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$ est bijective.

Solution

Considérons v : $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (Y,Z) & \longmapsto & Y\cup Z. \end{array}$

- Pour tout $X\in\mathcal{P}(E)$, on a :
  $v(u(X)) = v(X\cap A, X\cap B) = (X\cap A)\cup(X\cap B) = X\cap(A\cup B) = X.$
  Donc $v\circ u = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.
- Montrons $u\circ v = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)}$. Soit $(Y,Z)\in\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$. On a :
  $v(Y,Z)\cap A = (Y\cup Z)\cap A = (Y\cap A)\cup(Z\cap A)$.
  - ⋆ Comme $Z\subset B$, on a $Z\cap A\subset(B\cap A)=\varnothing$.
  - ⋆ Comme $Y\subset A$, on a $Y\cap A = Y$.

Ainsi $v(Y,Z)\cap A = Y$. On prouve de même $v(Y,Z)\cap B = Z$, ce qui donne : $u(v(Y,Z)) = (v(Y,Z)\cap A, v(Y,Z)\cap B) = (Y,Z)$. On en déduit que $u\circ v = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)}$.
Par suite u est bijective, et v est son application réciproque.

Applications : Images directes, images réciproques

Definition

Soit $u \in F^E$. Si $A \subset E$ et $B \subset F$, on appelle :

- **image (directe)** de A par u, l'ensemble :

$$u(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A \quad y = u(x)\} = \{u(x); x \in A\},$$

- **image réciproque** de B par u, l'ensemble :

$$u^{-1}(B) = \{x \in E \mid u(x) \in B\}.$$

Ainsi :

- pour tout $y \in F$: $\quad y \in u(A) \Longleftrightarrow (\exists x \in A, \quad y = u(x))$
- et, pour tout $x \in E$: $\quad x \in u^{-1}(B) \Longleftrightarrow u(x) \in B$.

Applications : Images directes, images réciproques

Exercice

Soient E, F deux ensembles, une application $f : E \longrightarrow F$ et $A' \in \mathcal{P}(F)$.
Montrer que :

$$f^{-1}\left(\complement_F\left(A'\right)\right) = \complement_E\left(f^{-1}\left(A'\right)\right).$$

Solution

On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\complement_F\left(A'\right)\right) &\Longleftrightarrow f(x) \in \complement_F\left(A'\right) \\ &\Longleftrightarrow f(x) \notin A' \\ &\Longleftrightarrow \text{Non}\left(f(x) \in A'\right) \\ &\Longleftrightarrow \text{Non}\left(x \in f^{-1}\left(A'\right)\right) \\ &\Longleftrightarrow x \in \complement_E\left(f^{-1}\left(A'\right)\right). \end{aligned}$$

Relations binaires

Definition (Relation binaire)

On appelle **relation binaire** sur un ensemble E toute partie de $E \times E$.
Si $\mathcal{R}$ est une telle relation, la proposition : $(x, y) \in \mathcal{R}$ sera notée de préférence : $x\mathcal{R}y$ pour tous $x, y \in E$ et lue : "x est en relation avec y par $\mathcal{R}$".

Exemples

Vous connaissez certaines relations binaires :

- *la relation d'égalité* $=$ *sur* E,
- *les relations* $\leq$ *et* $<$ *sur* $\mathbb{R}$,
- *la relation d'inclusion* $\subset$ *sur* $\mathcal{P}(E)$.

Relations binaires : Relation d'équivalence

Definition (Relation d'équivalence)

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'équivalence sur E si elle est :

- **réflexive** : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- **symétrique** : $\forall (x,y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- **transitive** : $\forall (x,y,z) \in E^3, \Big(x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z\Big) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Definition (Classes d'équivalence)

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

- Pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$ est appelé **classe d'équivalence de** x pour $\mathcal{R}$; cet ensemble est noté $\mathrm{cl}(x)$ voire $\bar{x}$ ou $\dot{x}$.
- Une partie X de E est une **classe d'équivalence** s'il existe un $x \in E$ tel que $X = \mathrm{cl}(x)$; un tel x est alors appelé un **représentant** de X.

Relations binaires : Relation d'équivalence

Exercice

On note $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x \mathcal{R} y \iff |x| = |y|).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

Solution

- On a, pour tout $x \in \mathbb{R}, |x| = |x|$, d'où $x\mathcal{R}x$, donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
- On a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
  $x\mathcal{R}y \iff |x| = |y| \iff |y| = |x| \iff y\mathcal{R}x$ donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
- On a, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \iff \begin{cases} |x| = |y| \\ |y| = |z| \end{cases} \implies |x| = |z| \iff x\mathcal{R}z$$

  donc $\mathcal{R}$ est transitive.

On conclut que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe de x modulo $\mathcal{R}$ est :

$$\mathrm{cl}(x) = \{y \in \mathbb{R}; x\mathcal{R}y\} = \{y \in \mathbb{R}; |x| = |y|\} = \begin{cases} \{x, -x\} & \text{si } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Definition (Partition d'un ensemble)

Une **partition** d'un ensemble E est un ensemble de parties de E, toutes non vides, disjointes deux à deux, et dont la réunion est égale à E ; autrement dit, c'est une partie $\mathcal{U}$ de $\mathcal{P}(E)$ telle que :

- $\forall A \in \mathcal{U},\ A \neq \emptyset$.
- $\forall A \in \mathcal{U}\ \forall B \in \mathcal{U},\ A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.
- $\cup_{A \in \mathcal{U}} A = E$.

Théorème

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble E, alors ses classes d'équivalence forment une partition de E.

Démonstration.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Pour tout $x \in E$, notons $\mathrm{cl}(x)$ la classe d'équivalence de x pour $\mathcal{R}$.

- Pour tout $x \in E$: $x\mathcal{R}x$, donc $x \in \mathrm{cl}(x)$, donc $\mathrm{cl}(x)$ est non vide.
- Clairement : $\quad E = \bigcup_{x \in E} \mathrm{cl}(x) \quad$ car $x \in \mathrm{cl}(x)$ pour tout $x \in E$.
- Soient $x, y \in E$. Pour montrer que $\mathrm{cl}(x)$ et $\mathrm{cl}(y)$ sont égales ou disjointes, supposons-les NON disjointes et montrons qu'elles sont égales. Soit z un élément commun à $\mathrm{cl}(x)$ et $\mathrm{cl}(y)$. Par symétrie des rôles de x et y, il nous suffit de montrer que $\mathrm{cl}(x) \subset \mathrm{cl}(y)$. Soit $t \in \mathrm{cl}(x)$.
  - ⋆ D'abord : $z \in \mathrm{cl}(y)$, donc $y\mathcal{R}z$.
  - ⋆ Ensuite : $z \in \mathrm{cl}(x)$, donc $x\mathcal{R}z$, puis $z\mathcal{R}x$.
  - ⋆ Enfin : $t \in \mathrm{cl}(x)$, donc $x\mathcal{R}t$.

  Conclusion : $y\mathcal{R}t$ par transitivité.

Relations binaires : Relation d'ordre

Definition (Relation d'ordre)

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une **relation d'ordre** sur E si elle est :

- **réflexive** : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- **antisymétrique** : $\forall (x,y) \in E^2, x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}x \Rightarrow y = x$.
- **transitive** : $\forall (x,y,z) \in E^3, \Big(x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z\Big) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Le couple $(E, \mathcal{R})$ est alors appelé **ensemble ordonné**.

Exemples

La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, ainsi que la relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$.

Relations binaires : Relation d'ordre

Definition

La relation d'ordre $\mathcal{R}$ définit un ordre total sur E si deux éléments quelconques de E sont comparables pour $\mathcal{R}$, c'est-à-dire si : $\forall (x, y) \in E^2 \quad \Big(x\mathcal{R}y \quad \text{ou} \quad y\mathcal{R}x \Big)$. Dans le cas contraire on dit que c'est un ordre partiel.

Exercice

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\leqslant$ la relation définie dans E par, pour toutes $f, g \in E$:

$$f \leqslant g \iff (\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x))$$

Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre dans E. Cet ordre est-il total ?

Solution

- On a, pour toute $f \in E$: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant f(x)$ d'où $f \leqslant f$, donc $\leqslant$ est réflexive.
- On a, pour toutes $f, g \in E$:
$\begin{cases} f \leqslant g \\ g \leqslant f \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x) \\ \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leqslant f(x) \end{cases} \iff (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)) \iff f = g$, donc $\leqslant$ est antisymétrique.
- On a, pour toutes $f, g, h \in E$:
$\begin{cases} f \leqslant g \\ g \leqslant h \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x) \\ \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leqslant h(x) \end{cases} \implies (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant h(x)) \iff f \leqslant h$, donc $\leqslant$ est transitive.

Ceci montre que $\leqslant$ est une relation d'ordre dans E.
Considérons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x$. On a $f(1) < g(1)$, donc on n'a pas $g \leqslant f$. On a $f(1) > g(-1)$, donc on n'a pas $f \leqslant g$. On conclut que l'ordre $\leqslant$ sur E n'est pas total.

Compléments

Definition (Équipotence)

On dit que F est équipotent à E s'il existe une bijection de E sur F.

Explication : L'existence d'une bijection de E sur F nous garantit qu'on peut faire se correspondre parfaitement les éléments de E et les éléments de F, associer à tout élément de E un et un seul élément de F et vice versa. Dire que F est équipotent à E revient ainsi à dire que F a exactement le même nombre d'éléments que E.

Definition (Notion d'ensemble dénombrable)

Un ensemble E est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$ (ou, ce qui revient au même, s'il est équipotent à $\mathbb{N}$).

Compléments

Nous terminerons ce chapitre par un résultat d'une portée épistémologique et historique considérable.

Théorème (Cantor)

Il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

Démonstration.

Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une application. On pose $A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}$. Il s'agit de montrer qu'il n'existe pas d'élément $a \in E$ tel que $\varphi(a) = A$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a \in E$ tel que $\varphi(a) = A$. Alors on a deux possibilité :

- si $a \in A$: $a \notin \varphi(a) = A$, ce qui est absurde ;
- si $a \notin A$: $a \in \varphi(a) = A$, ce qui est absurde aussi.

Ainsi, on a montré par l'absurde que : $\forall x \in E : \varphi(x) \neq A$, donc A n'a pas d'antécédent par φ. A fortiori, φ n'est pas surjective de E sur $\mathcal{P}(E)$. □

Merci pour votre attention