

Exercice 1:

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- (a) $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$
 (b) $y' - 2xy = -(2x - 1)e^x$
 (c) $(x + 1)y' + xy = x^2 - x + 1, y(1) = 1$ sur $] -1, +\infty[$
 (d) $(1 - x^2)y' - xy - xy^2 = 0$
 (e) $ch(x)y' - sh(x)y = \frac{1}{1 + x^2}$

Correction ex 1

- (a) $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$

La solution générale de l'équation sans second membre est $y(x) = Ke^{2x}, K \in \mathbb{R}$ Il y a ensuite plusieurs méthodes pour rechercher une solution particulière. Par exemple, on peut chercher une solution particulière de l'équation $y' - 2y = \cos x$ Pour cela, on écrit que $\cos x = \Re(e^{ix})$ et on cherche une solution de $y' - 2y = e^{ix}$ puisque e^{ix} n'est pas solution de l'équation sans second membre, on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \alpha e^{ix}$ Cette fonction est solution de $y' - 2y = e^{ix}$ SSI

$$i\alpha e^{ix} - 2\alpha e^{ix} = e^{ix}$$

SSI

$$\alpha = \frac{1}{-2 + i} = \frac{-2 - i}{(-2 + i)(-2 - i)} = -\frac{2 + i}{5}.$$

Une solution particulière de $y' - 2y = \cos x$ est donc donnée par

$$\Re\left(-\frac{2 + i}{5}e^{ix}\right) = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

On cherche ensuite une solution particulière de $y' - 2y = 2\sin x$ en utilisant exactement la même méthode, mais en remarquant que cette fois $\sin x = \Im(e^{ix})$ Une solution particulière est donc donnée par

$$2\Im\left(-\frac{2 + i}{5}e^{ix}\right) = -\frac{4}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x.$$

Par le principe de superposition des solutions, on trouve finalement que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donnée par les fonctions

$$x \mapsto Ke^{2x} - \frac{4}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

- (b) $y' - 2xy = -(2x - 1)e^x$ On commence par résoudre l'équation homogène On a

$$y' - 2xy = 0 \iff \frac{y'}{y} = 2x \iff \ln|y| = x^2 + C,$$

et donc la solution générale de l'équation homogène est $t \mapsto \lambda e^{x^2}$ On cherche ensuite une solution particulière de l'équation en utilisant la méthode de variation de la constante. On pose donc $y(x) = \lambda(x)e^{x^2}$ et introduisant y dans l'équation avec second membre, on trouve

$$\lambda'(x)e^{x^2} = (-2x + 1)e^x \iff \lambda'(x) = (-2x + 1)e^{-x^2+x}.$$

Une primitive est donnée par $\lambda(x) = e^{-x^2+x}$ et donc une solution particulière de l'équation avec second membre est donnée par $x \mapsto e^{-x^2+x}e^{x^2} = e^x$. Finalement, les solutions de l'équation sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{x^2} + e^x$

(c) $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1, y(1) = 1$ sur $] -1, +\infty[$

La résolution de l'équation homogène amène à chercher une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{-x}{x+1}$. Pour cela, il suffit d'écrire

$$\frac{-x}{x+1} = \frac{-x-1+1}{x+1} = -1 + \frac{1}{x+1}.$$

Les solutions de l'équation homogène, sur l'intervalle $] -1, +\infty[$, sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda(x+1)e^{-x}$. On cherche une solution particulière de l'équation sous la forme d'un polynôme. Or, si P est un polynôme, le degré de $(x+1)y' + xy$ vaut le degré de P plus 1. On cherche donc y sous la forme d'un polynôme de degré 1, soit $y(x) = ax + b$. Introduisant cela dans l'équation différentielle, on trouve

$$(x+1)a + x(ax+b) = x^2 - x + 1.$$

Par identification, on trouve $a = 1, a+b = -1$, soit $b = -2$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $x \mapsto (x-2) + \lambda(x+1)e^{-x}$. La solution vérifiant $y(1) = 1$ est obtenue pour $\lambda = e$.

(d) $(E_d) \quad (1-x^2)y' - xy - xy^2 = 0$ on a $y' - \frac{x}{1-x^2}y = \frac{x}{1-x^2}y^2, 1-x^2 \neq 0$. Il est clair que la fonction identiquement nulle est solution triviale de l'équation (E_d) . Déterminons alors les autres solutions non triviales. En divisant les deux membres par y^2

on obtient une équation de Bernoulli d'ordre $n = 2$. Pour la résoudre on effectue le changement $z = \frac{1}{y}$. Ce qui

transforme cette équation en $z' + \frac{x}{1-x^2} \times z = -\frac{x}{1-x^2}$. d'abord on résout l'équation homogène ce qui donne

$z = k\sqrt{x^2-1}, k \in \mathbb{R}^*$. Pour chercher une solution particulière, on va faire varier la constante $k = k(x)$ pour avoir :

$$k(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}} + cte$$

et pour la constante égale à zéro on obtient une solution particulière :

$$z_p(x) = k\sqrt{x^2-1} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}} \times \sqrt{x^2-1} = -1$$

par superposition on obtient la solution générale :

$$z(x) = z_0(x) + z_p(x) = -1 + k\sqrt{x^2-1}$$

Conclusion : La solution générale autre que triviale est

$$y_k(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{-1 + k\sqrt{x^2-1}}, k \in \mathbb{R}^*$$

(e) $ch(x)y' - sh(x)y = \frac{1}{1+x^2}$ cet équation est équivalente à

$$\frac{d}{dx}(ch(x)y(x)) = \frac{d}{dx}(\arctan(x))$$

qui par intégration donne

$$ch(x)y(x) = \arctan(x) + k, k \in \mathbb{R}$$

Conclusion ; La solution générale est

$$y(x) = \frac{\arctan(x) + k}{ch(x)}, k \in \mathbb{R}$$

Exercice 2.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- (i) $y'' - 3y' + 2y = 1$;
 (ii) $y'' - 2y' + y = x$; $y(0) = y'(0) = 0$
 (iii) $y'' + 9y = x + 1$; $y(0)$

Correction ex 2

- (i) $y'' - 3y' + 2y = 1$;

L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ donc Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}$ facile de voir que la fonction constante $y = 1/2$ est solution de l'équation. Finalement, les solutions de l'équation sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2} + \lambda e^x + \mu e^{2x}$

- (ii) $y'' - 2y' + y = x$; $y(0) = y'(0) = 0$ d'abord Son équation caractéristique dont 1 est racine double. Les solutions générales de l'équation homogène sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu x e^x$. Comme 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on va chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1. Mais $y(x) = ax + b$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -2a + ax + b = x \iff \forall x \in \mathbb{R}, (a - 1)x + (b - 2a) = 0.$$

Un polynôme réel étant identiquement nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on en déduit que $a = 1$ et $b = 2$ Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu x e^x + (x + 2).$$

Si on ajoute les conditions $y(0) = y'(0) = 0$ on obtient les équations

$$\lambda + 2 = 0 \text{ et } \lambda + \mu + 1 = 0,$$

- (iii) $y'' + 9y = x + 1$; $y(0)$ admet pour équation caractéristique associée $r^2 + 9 = 0$ Les solutions réelles de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto \cos(3x)$ et $t \mapsto \sin(3x)$ On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1, et on trouve $x \mapsto \frac{x + 1}{9}$ Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto A \cos(3x) + B \sin(3x) + \frac{x + 1}{9}.$$

La condition $y(0) = 0$ entraîne $A = -1/9$

Exercice 3:

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- (i) $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$
 (ii) $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^x$
 (iii) $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x + e^{3x}$
 (vi) $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x + x e^{2x} \cos x$

Correction ex 3

(i) $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$

On commence par résoudre l'équation homogène, Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$ dont les racines sont 1 et 3. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x}$ Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = (ax + b)e^{-x}$ En dérivant, on trouve

$$y'(x) = (-ax + (-b + a))e^{-x}, \quad y''(x) = (ax + (b - 2a))e^{-x}$$

et donc a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} 8a = 2 \\ 8b - 6a = 1 \end{cases} \quad \text{On résout ce système, et on trouve qu'une solution particulière est donnée par } y_0(x) = \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)e^{-x}$$

Finalement, les solutions de l'équation avec second membre sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)e^{-x} + \lambda e^x + \mu e^{3x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(ii) $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^x$ L'équation homogène a déjà été résolue à la question précédente. Pour résoudre l'équation avec second membre, on remarque cette fois que 1 est racine simple de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y(x) = (ax^2 + bx)e^x$ (on peut trouver un polynôme sans terme constant car la fonction $x \mapsto e^x$ est solution de l'équation homogène). On dérive pour trouver

$$y'(x) = (ax^2 + (2a + b)x + b)e^x \text{ et } y''(x) = (ax^2 + (4a + b)x + (2a + 2b))e^x.$$

Par identification, a et b sont solutions du système $\begin{cases} -4a = 2 \\ 2a - 2b = 1 \end{cases}$ On obtient comme solution $a = -1/2$ et $b = -1$ La solution générale de l'équation avec second membre est donc donnée par la formule

$$y \mapsto \left(\frac{-x^2}{2} - x\right)e^x + \lambda e^x + \mu e^{3x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(iii) $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x + e^{3x}$ On commence par résoudre l'équation homogène, L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui admet 1 comme racine double. La solution générale de l'équation homogène est donc $(Ax + B)e^x$ On cherche une solution particulière de l'équation générale en utilisant le principe de superposition des solutions. On commence donc à chercher une solution de $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x$ On la cherche sous la forme d'une exponentielle polynôme $P(x)e^x$ Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on sait qu'on va trouver une solution avec un polynôme P de degré inférieur ou égal à 4. Utilisant

$$y'(x) = (P'(x) + P(x))e^x \quad y''(x) = (P''(x) + 2P'(x) + P(x))e^x,$$

on obtient

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = P''(x)e^x.$$

y est donc solution de l'équation si et seulement si $P'' = x^2 + 1$ On obtient donc une solution particulière sous la forme

$$\left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}\right)e^x.$$

On cherche maintenant une solution particulière de $y'' - 2y' + y = e^{3x}$ Cette fois, 3 n'est pas racine de l'équation caractéristique, et on peut chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = \alpha e^{3x}$ On obtient, en introduisant dans l'équation

$$9\alpha - 6\alpha + \alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{4}.$$

Les solutions de l'équation générale de départ sont donc les fonctions

$$x \mapsto \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + Ax + B\right)e^x + \frac{1}{4}e^{3x}.$$

(vi) $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x + x e^{2x} \cos x$

On résout l'équation homogène, On introduit l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 3 = 0$ Ses racines sont 1 et 3.
On en déduit que la solution générale de l'équation sans second membre est

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière en utilisant le principe de superposition des solutions. On cherche donc d'abord une solution de $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x$ Puisque 1 est solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $y_1(x) = (ax^3 + bx^2 + cx)e^x$ En dérivant et en identifiant, on obtient le système

$$\begin{cases} -6a = 1 \\ 6a - 4b = 0 \\ 2b - 2c = 0 \end{cases}$$

Une solution particulière est donc obtenue par

$$y_1(x) = -\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^x.$$

On cherche ensuite une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = x e^{2x} \cos x$ On va en fait chercher une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = x e^{(2+i)x}$ et on en prendra la partie réelle. $2+i$ n'étant pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $y_2(x) = (ax + b)e^{(2+i)x}$. Après dérivation et identification, on trouve le système

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ 2ia - 2b = 0. \end{cases}$$

On trouve $y_2(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{i}{2}\right)e^{(2+i)x}$ Prenant la partie réelle, une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = x e^{2x} \cos x$ est obtenue par

$$x \mapsto \left(-\frac{x}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\right)e^{2x}.$$

La solution générale de l'équation différentielle initiale est donc donnée par

$$x \mapsto -\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^x + \left(-\frac{x}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\right)e^{2x} + \lambda e^x + \mu e^{3x}.$$

Exercice 4:

$$(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x) \text{ sur }]-1, +\infty[$$

On commence par résoudre l'équation homogène, dont la solution générale est donnée par $y(x) = \frac{\lambda}{1+x}, \lambda \in \mathbb{R}$ On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante, en posant $y(x) = \frac{\lambda(x)}{1+x}$ de sorte que

$$y'(x) = \frac{\lambda'(x)}{1+x} - \frac{\lambda(x)}{(1+x)^2}.$$

En introduisant ceci dans l'équation différentielle, on trouve

$$(1+x) \left(\frac{\lambda'(x)}{1+x} - \frac{\lambda(x)}{(1+x)^2} \right) + \frac{\lambda(x)}{1+x} = 1 + \ln(1+x)$$

ce qui donne après simplifications

$$\lambda'(x) = 1 + \ln(1+x).$$

Une primitive est donnée par $\lambda(x) = (1+x) \ln(1+x)$,
et la solution générale de l'équation avec second membre est donc donnée par

$$x \mapsto \frac{\lambda}{1+x} + \ln(1+x).$$