

Exercice 1:

Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k$

Correction Ex 1

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k \quad ?$$

Admettons un moment que cette série converge et notons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k$.

Écrivons :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = \sum_{k=1}^{+\infty} kq^k = q \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} \\ &= q \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} + q \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1)q^{k-1} \\ &= q \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} + q \sum_{k'=0}^{+\infty} k'q^{k'} \quad \text{en posant } k' = k-1 \\ &= q \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} + q \cdot S \end{aligned}$$

En résolvant cette équation en S , on trouve que

$$(1-q)S = q \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}.$$

Cette dernière série est une série géométrique de raison q avec $|q| < 1$ donc converge. Cela justifie la convergence de S .
Ainsi

$$(1-q)S = q \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Conclusion :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Exercice 2:

Étudier la nature de convergence de la série

$$\sum_{k \geq 1} \ln(\tanh k) \quad \text{converge ?}$$

Correction Ex 2

La méthode est de chercher un équivalent simple du terme général.

- Remarquons tout d'abord que, pour $k > 0$, $0 < \tanh k < 1$.
- Puis évaluons $\tanh k$:

$$\tanh k = \frac{shk}{ch k} = \frac{e^k - e^{-k}}{e^k + e^{-k}} = 1 + \frac{-2e^{-k}}{e^k + e^{-k}} = 1 + \frac{-2e^{-2k}}{1 + e^{-2k}}$$

- Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, alors, si $u_k \rightarrow 0$, $\ln(1+u_k) \sim u_k$. Ainsi

$$\ln(\tanh k) = \ln\left(1 + \frac{-2e^{-2k}}{1 + e^{-2k}}\right) \sim \frac{-2e^{-2k}}{1 + e^{-2k}} \sim -2e^{-2k}$$

- La série $\sum e^{-2k} = \sum (e^{-2})^k$ converge car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{e^2} < 1$.
- Les suites $\ln(\tanh k)$ et $-2e^{-2k}$ sont deux suites strictement négatives et on a vu que $\ln(\tanh k) \sim -2e^{-2k}$. Par le théorème ?? des équivalents, comme la série $\sum -2e^{-2k}$ converge, alors la série $\sum \ln(\tanh k)$ converge également. (Si vous préférez, vous pouvez appliquer le théorème aux suites strictement positives $-\ln(\tanh k)$ et $2e^{-2k}$.)

Exercice 3:

Déterminer tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum_{k \geq 1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} z^k$ soit absolument convergente.

Correction Ex 3

Notons $u_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} z^k$. On a

$$\sqrt[k]{|u_k|} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k |z| \rightarrow e|z|.$$

Cette limite vérifie $e|z| < 1$ si et seulement si $|z| < \frac{1}{e}$.

- Si $|z| < \frac{1}{e}$ alors la série $\sum u_k$ est absolument convergente.
- Si $|z| > \frac{1}{e}$, on a pour k assez grand $\sqrt[k]{|u_k|} > 1$, donc la série $\sum u_k$ diverge.
- Si $|z| = \frac{1}{e}$ la règle des racines de Cauchy ne permet pas de conclure. On étudie le terme général à la main. On obtient :

$$|u_k| = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} \left(\frac{1}{e}\right)^k$$

Donc

$$\begin{aligned}\ln |u_k| &= k^2 \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) + k \ln \frac{1}{e} \\ &= k \left[k \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) - 1 \right] \\ &= k \left[k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} \right)^2 + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) - 1 \right] \\ &= k \left[1 - \frac{1}{2} \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right) - 1 \right] \\ &= -\frac{1}{2} + o(1) \\ &\rightarrow -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc $|u_k| \rightarrow e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$. Ainsi $\sum |u_k|$ diverge.

Exercice 4:

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\begin{aligned}(i) \quad u_n &= \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}} & (ii) \quad u_n &= \frac{1}{\ln(n^2 + 1)} \\ (iii) \quad u_n &= \frac{3^n + n^4}{5^n - 2^n} & (iv) \quad u_n &= \frac{n + 1}{2^n + 8}\end{aligned}$$

Correction Ex 4

$$(i) \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}$$

Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série est convergente

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$(ii) \quad u_n = \frac{1}{\ln(n^2 + 1)}$$

On sait que $\frac{\sqrt{n}}{\ln(n^2 + 1)} = \frac{\sqrt{n}}{2 \ln(n) + \ln(1 + n^{-2})} \rightarrow +\infty$. En particulier, pour n assez grand, $\frac{1}{\ln(n^2 + 1)} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Puisque la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, il en est de même de $\sum \frac{1}{\ln(n^2 + 1)}$.

$$(iii) \quad u_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 2^n} \text{ Il est facile de vérifier que } 3^n + n^4 \sim_{+\infty} 3^n \text{ et que } 5^n - 2^n \sim_{+\infty} 5^n. \text{ On en déduit que } \frac{3^n + n^4}{5^n - 2^n} \sim_{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Par comparaison à une série géométrique convergente (tout est positif), on en déduit que la série converge.

(iv) $u_n = \frac{n + 1}{2^n + 8}$ Il est facile de vérifier que $u_n \sim_{+\infty} \frac{n}{2^n}$. Or la série $\sum \frac{n}{2^n}$ converge. En effet, par croissance comparée des polynômes et des puissances, on sait que

$$\frac{n}{(1.5)^n} \leq 1$$

pour n assez grand, et donc que

$$\frac{n}{2^n} \leq \left(\frac{1.5}{2}\right)^n.$$

puisque $1.5/2 < 1$, on sait que $\sum \left(\frac{1.5}{2}\right)^n$ est convergente

Exercice 5:

Règle de d'Alembert

Étudier les séries de terme général suivant :

$$1. u_n = \frac{n!}{n^{an}}, a \in \mathbb{R} \quad 2. u_n = \frac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \quad 3. u_n = \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Correction Ex 5

$$1. u_n = \frac{n!}{n^{an}}, a \in \mathbb{R}$$

Une série dont le terme général est constitué de puissances et de factorielles est très bien adaptée à l'utilisation du critère de D'Alembert. Dans le cas particulier de cette question, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{a(n+1)}} \times \frac{n^{an}}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} \times \frac{1}{(n+1)^{a-1}}.$$

Or, on peut écrire

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} = \exp(-an \ln(1 + 1/n)) = \exp(-a + o(1))$$

et donc ce terme converge vers e^{-a} On distingue alors trois cas :

$a > 1$, u_{n+1}/u_n tend vers 0, la série converge.

$a = 1$, u_{n+1}/u_n tend vers $e^{-1} \in [0,1]$, et donc la série converge.

$a < 1$, u_{n+1}/u_n tend vers $+\infty$, la série diverge.

$$2. u_n = \frac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

On va utiliser la règle de d'Alembert. Pour cela, on écrit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \times \exp(n(\ln(\ln(n+1)) - \ln \ln n)) \times \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

Or, la fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$ est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis, que

$$|\ln(\ln(n+1)) - \ln \ln n| \leq \frac{1}{n \ln n}.$$

Il en découle :

$$0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \times \exp\left(\frac{n}{n \ln n}\right) \times \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

On en déduit facilement, par les théorèmes de composition des limites et par le fait que $\ln(n+1)/(n+1)$ tend vers 0, que la limite de u_{n+1}/u_n est nulle. Par la règle de d'Alembert, la série de terme général u_n est convergente

3. $u_n = \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On va encore utiliser la règle de d'Alembert. En effet, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^\alpha}{(2n+1)!} \times \frac{(2n)!}{(n!)^\alpha} = \frac{(n+1)^\alpha}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$$

avec

- $l = 0$ si $\alpha < 2$ dans ce cas, on a convergence de la série
- $l = \infty$ si $\alpha > 2$ dans ce cas, on a divergence de la série
- $l = 1/4$ si $\alpha = 2$ dans ce cas, on a convergence de la série