Calcul différentiel
Corrections de la série 1

Aziz ELBOUR

Faculté des Sciences et Techniques
Errachidia

2022-2023

Plan

1. Exercice 1
2. Exercice 2
3. Exercice 3
4. Exercice 4
5. Exercice 5
6. Exercice 6
7. Exercice 7
8. Exercice 8

Exercice 1

Sur l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ *on définit les deux normes suivantes :*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad ; \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x.$$

1) *Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.*
2) *Montrer que* $(E, \|\cdot\|_\infty)$ *est complet.*
3) *Montrer que* $(E, \|\cdot\|_1)$ *n'est pas complet. [On pourra considérer, par exemple, la suite de fonctions* $(f_n)_{n \geq 3}$*, définie sur* $[0,1]$*, par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) & si \quad \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & si \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases} \quad]$$

Réponse

*1) **Montrons que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.***
Raisonnons par l'absurde, supposons que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes. Alors il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que

$$\alpha \|f\|_\infty \leq \|f\|_1 \leq \beta \|f\|_\infty, \quad (\forall f \in E). \tag{1.1}$$

Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = x^n, \quad \forall x \in [0,1].$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $f_n \in E$,

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} x^n = 1,$$

et

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1}.$$

Réponse

1) ***Montrons que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.***
Raisonnons par l'absurde, supposons que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes. Alors il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que

$$\alpha \|f\|_\infty \leq \|f\|_1 \leq \beta \|f\|_\infty, \quad (\forall f \in E). \tag{1.1}$$

Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = x^n, \quad \forall x \in [0,1].$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $f_n \in E$,

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} x^n = 1,$$

et

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1}.$$

Réponse

Donc d'après (1.1) on aura

$$\alpha \|f_n\|_\infty \leq \|f_n\|_1 \leq \beta \|f_n\|_\infty , \quad (\forall n \in \mathbb{N}) .$$

C'est-à-dire,

$$\alpha \leq \frac{1}{n+1} \leq \beta, \quad (\forall n \in \mathbb{N}) .$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient $\alpha \leq 0$, contradiction.
Donc les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.

Remarque

Notons que pour tout $f \in E$, on a

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \,\mathrm{d}x = \|f\|_\infty \int_0^1 \mathrm{d}x = \|f\|_\infty$$

c'est-à-dire,

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \quad \forall f \in E.$$

Donc la norme $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que la norme $\|\cdot\|_1$, mais la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas plus fine que $\|\cdot\|_\infty$ car il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = +\infty.$$

Réponse

2) ***Montrons que*** $(E, \|\cdot\|_\infty)$ ***est complet.***

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy dans* $(E, \|\cdot\|_\infty)$*. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$(\forall n \geq N)\,(\forall m \geq N)\,, \quad \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Nous devons montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $(E, \|\cdot\|_\infty)$*.*

Pour tout $x \in [0,1]$*, l'inégalité* $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ *montre que la suite (numérique)* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy dans* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$*. Comme* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *est complet, alors la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{R}$*, vers une limite que nous notons* $f(x)$*. On définit ainsi une fonction* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,, \quad \forall x \in [0,1]\,.$$

(f *est la limite simple de la suite de fonctions* (f_n) *sur* $[0,1]$*)*

Réponse

2) ***Montrons que*** $(E, \|\cdot\|_\infty)$ ***est complet.***

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy dans* $(E, \|\cdot\|_\infty)$*. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$(\forall n \geq N)\,(\forall m \geq N)\,, \quad \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Nous devons montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $(E, \|\cdot\|_\infty)$*. Pour tout* $x \in [0,1]$*, l'inégalité* $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ *montre que la suite (numérique)* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy dans* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$*. Comme* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *est complet, alors la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{R}$*, vers une limite que nous notons* $f(x)$*. On définit ainsi une fonction* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,, \quad \forall x \in [0,1]\,.$$

(f *est la limite simple de la suite de fonctions* (f_n) *sur* $[0,1]$*)*

Réponse

Il reste à montrons que

$$\begin{cases} f \in E \\ \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \end{cases}$$

Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy dans* $(E, \|\cdot\|_\infty)$*, alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$(\forall n \geq N)\,(\forall m \geq N)\,, \quad \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon,$$

donc

$$(\forall n \geq N)\,(\forall m \geq N)\,(\forall x \in [0,1])\,, \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon. \tag{1.2}$$

Fixons un entier quelconque $n \geq N$ *et un* $x \in [0,1]$ *quelconque. En faisant tendre m vers* $+\infty$*, on obtient* $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ *et comme* $n \geq N$ *et* $x \in [0,1]$ *étaient arbitraires, on obtient*

Réponse

donc

$$(\forall n \geq N) \quad \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

C'est-à-dire,

$$(\forall n \geq N) \quad \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Cela montre que la suite de fonctions (f_n) *converge uniformément sur* $[0,1]$ *vers la fonction* f*. Comme les fonctions* f_n *sont continues sur* $[0,1]$ *alors la fonction* f *est aussi continue sur* $[0,1]$*, donc* $f \in E$*.*
Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* f *dans* $(E, \|\cdot\|_\infty)$*. Donc* $(E, \|\cdot\|_\infty)$ *est complet.*

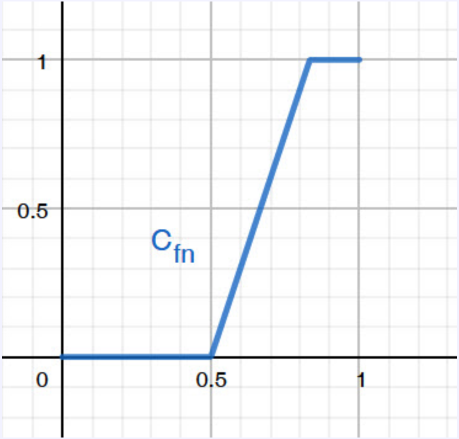
Réponse

3) ***Montrons que*** $(E, \|\cdot\|_1)$ ***n'est pas complet.***

Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 3}$*, définie sur* $[0,1]$*, par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) & si \quad \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & si \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases} \quad]$$

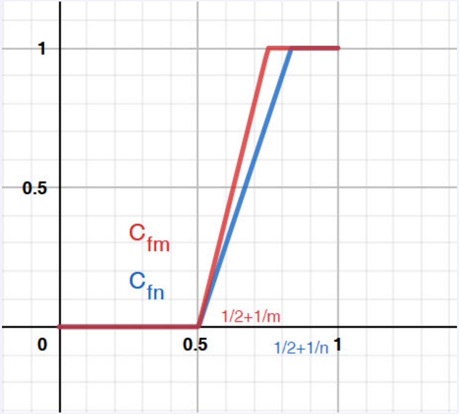
Réponse



Nous devons montrer que $(f_n)_{n\geq 3}$ *est une suite de Cauchy non convergente dans* $(E, \|\cdot\|_1)$.

Réponse

En effet, pour tous entiers naturels n, m *vérifiant* $m > n \geq 3$ *on a*



Réponse

$$
\begin{aligned}
\|f_m - f_n\|_1 &= \int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f_m(x) - f_n(x))\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (f_m(x) - f_n(x))\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} (f_n(x) - f_m(x))\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} (f_m(x) - f_n(x))\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} (f_m(x) - f_n(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} (f_m(x) - f_n(x))\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} (1 - f_n(x))\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Réponse

Or

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} (f_m(x) - f_n(x))\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} \left(m\left(x-\frac{1}{2}\right) - n\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= (m-n)\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} \left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= (m-n)\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}\mathrm{d}x \\
&= (m-n)\frac{1}{2m^2} \\
&= \frac{1}{2m} - \frac{n}{2m^2},
\end{aligned}$$

Réponse

et

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} (1-f_n(x))\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \left(1-n\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)-n\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)-n\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \\
&= \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)-n\left(\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2m^2}\right) \\
&= \frac{1}{n}-\frac{1}{m}-\frac{1}{2n}+\frac{n}{2m^2} \\
&= \frac{1}{2n}-\frac{1}{m}+\frac{n}{2m^2}
\end{aligned}$$

Réponse

donc

$$\begin{aligned} \|f_m - f_n\|_1 &= \left(\frac{1}{2m} - \frac{n}{2m^2}\right) + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{m} + \frac{n}{2m^2}\right) \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m}, \end{aligned}$$

D'où

$$\|f_m - f_n\|_1 \leq \frac{1}{2n}.$$

Puisque $\frac{1}{2n} \longrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow +\infty$, *on en déduit que* $(f_n)_{n\geq 3}$ *est une* ***suite de Cauchy*** *dans* $(E, \|\cdot\|_1)$.

Réponse

Montrons maintenant que $(f_n)_{n\geq 3}$ *est une suite divergente dans* $(E, \|\cdot\|_1)$. *Raisonnons par l'absurde, supposons que la suite* $(f_n)_{n\geq 3}$ *converge dans* $(E, \|\cdot\|_1)$ *et soit* f *sa limite. Alors*

$$\begin{cases} f \in E \\ \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0 \end{cases}$$

- Pour tout entier naturel $n \geq 3$ *on a*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^{1} |f(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \|f_n - f\|_1 \end{aligned}$$

En faisant tendre n *vers* $+\infty$ *dans l'inégalité précédente, on obtient* $\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$.

Réponse

Comme $x \longmapsto |f(x)|$ est une fonction continue et positive sur le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on en déduit que

$$f(x) = 0, \ \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

- D'autre part, fixons un $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ quelconque. Pour tout n assez grand (de sorte que $\alpha > \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, c'est-à-dire $n > \frac{1}{\alpha - 1/2}$) on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\alpha^1 |f(x) - 1| \, \mathrm{d}x = \int_\alpha^1 |f(x) - f_n(x)| \, \mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 |f(x) - f_n(x)| \, \mathrm{d}x = \|f_n - f\|_1 \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient $\int_\alpha^1 |f(x) - 1| \, \mathrm{d}x = 0$.

Réponse

Comme $x \longmapsto |f(x) - 1|$ *est une fonction continue et positive sur le segment* $[\alpha, 1]$*, on en déduit que*

$$f(x) = 1, \ \forall x \in [\alpha, 1].$$

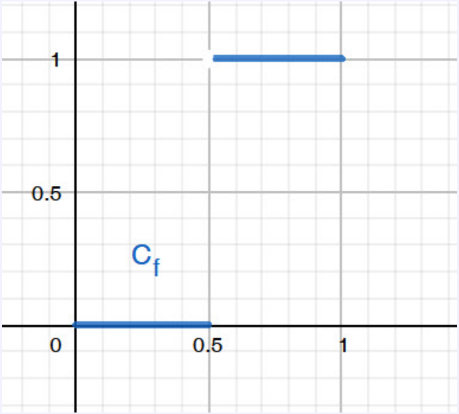
Puisque $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ *est arbitraire, on obtient*

$$f(x) = 1, \ \forall x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right].$$

D'où

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1, \ \forall x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Réponse



On en déduit que la fonction f n'est pas continue en $\frac{1}{2}$, donc $f \notin E$, contradiction. Donc $(f_n)_{n\geq 3}$ est une suite ***divergente*** *dans $(E, \|\cdot\|_1)$. D'où $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.*

Plan

1. Exercice 1
2. Exercice 2
3. Exercice 3
4. Exercice 4
5. Exercice 5
6. Exercice 6
7. Exercice 7
8. Exercice 8

Exercice 2

On munit l'espace $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *de la norme de la convergence uniforme :* $\|f\|_\infty=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$*. Soit* $\phi:E\longrightarrow E$ *l'application définie par :*

$$\phi(f)(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad \forall f\in E,\ \forall x\in[0,1].$$

1) *Montrer que* ϕ *est linéaire continue, et calculer* $\|\phi\|$.
2) *Même question lorsqu'on munit* E *de la norme* $\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x$.
3) *Montrer que la forme linéaire* $L:(E,\|\cdot\|_1)\longrightarrow\mathbb{R}$ *définie par*

$$L(f)=f(0)\quad\forall f\in E$$

n'est pas continue.

Réponse

*1) **Montrons que ϕ est linéaire continue, et calculons $\|\phi\|$.***

*- **Linéarité de ϕ** : Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in [0, 1]$ on a :*

$$\begin{aligned}
\phi(f + \lambda g)(x) &= \int_0^x (f + \lambda g)(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^x f(t) + \lambda g(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t + \lambda \int_0^x g(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \phi(f)(x) + \lambda \phi(g)(x) \\
&= [\phi(f) + \lambda \phi(g)](x),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\phi(f + \lambda g) = \phi(f) + \lambda \phi(g).}$$

Cela montre que l'application ϕ est linéaire.

Réponse

- ***Continuité de*** ϕ *: Pour tout* $f \in E$ *on a* $\|\phi(f)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\phi(f)(x)|$ *, et comme* $\forall x \in [0,1]$ *,*

$$\begin{aligned} |\phi(f)(x)| &= \left|\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_0^x |f(t)|\, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 |f(t)|\, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \mathrm{d}t = \|f\|_\infty \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{x\in[0,1]} |\phi(f)(x)| \leq \|f\|_\infty$$

d'où,

$$\boxed{\|\phi(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \qquad (\forall f \in E).} \tag{2.1}$$

Cela montre que l'application linéaire ϕ *est continue.*

Réponse

- ***Calcul de*** $\|\phi\|$ ***:*** *D'après (2.1) on a*

$$\|\phi\| = \sup_{f\neq 0} \frac{\|\phi(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq 1.$$

D'autre part, considérons la fonction constante :

$$f_0 : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}$$

On a $f_0 \in E$, $f_0 \neq 0$ *et* $\|f_0\|_\infty = 1$. *De plus,* $\forall x \in [0,1]$,
$\phi(f_0)(x) = \int_0^x f_0(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{d}t = x$.
donc

$$\|\phi(f_0)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\phi(f_0)(x)| = \sup_{x\in[0,1]} x = 1.$$

Réponse

D'où

$$\|\phi\| \geq \frac{\|\phi(f_0)\|_\infty}{\|f_0\|_\infty} = 1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\|\phi\| = 1.}$$

2) ***Munissons*** E ***de la norme*** $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ ***et montrons que*** ϕ ***est linéaire continue, et calculons*** $\|\phi\|$.

- ***Linéarité de*** ϕ *: L'application* ϕ *est linéaire d'après la question 1).*

Réponse

D'où

$$\|\phi\| \geq \frac{\|\phi(f_0)\|_\infty}{\|f_0\|_\infty} = 1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\|\phi\| = 1.}$$

2) ***Munissons*** E ***de la norme*** $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ ***et montrons que*** ϕ ***est linéaire continue, et calculons*** $\|\phi\|$.

- ***Linéarité de*** ϕ *: L'application* ϕ *est linéaire d'après la question 1).*

Réponse

- ***Continuité de*** ϕ *: Pour tout* $f \in E$ *on a*

$$\begin{aligned}
\|\phi(f)\|_1 &= \int_0^1 |\phi(f)(x)| \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left| \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)| \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \|f\|_1 \, \mathrm{d}x = \|f\|_1 \int_0^1 \mathrm{d}x = \|f\|_1
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\|\phi(f)\|_1 \leq \|f\|_1 \qquad \forall f \in E.} \tag{2.2}$$

Cela montre que l'application linéaire $\phi : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ *est continue.*

Réponse

- ***Calcul de*** $\|\phi\|$ ***:*** *D'après (2.2) on a*

$$\|\phi\| = \sup_{f\neq 0} \frac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1} \leq 1.$$

D'autre part, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ *définies sur* $[0,1]$ *par*

$$f_n(t) = (1-t)^n, \quad \forall n \geq 1,\ \forall t \in [0,1].$$

Pour tout $n \geq 1$ *on a :* $f_n \in E$, $f_n \neq 0$ *et*

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)|\ \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{d}t = \left[\frac{-(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Réponse

De plus, $\forall x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\phi(f_n)(x) &= \int_0^x f_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^x (1-t)^n \mathrm{d}t = \left[\frac{-(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \geq 0\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\|\phi(f_n)\|_1 &= \int_0^1 |\phi(f_n)(x)|\, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \left[1-(1-x)^{n+1}\right] \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1}\left[x + \frac{(1-x)^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

Réponse

D'où pour tout $n \geq 1$ *on a :*

$$\|\phi\| \geq \frac{\|\phi(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1} = \frac{n+1}{n+2}$$

En faisant tendre n *vers* $+\infty$, *on obtient*

$$\|\phi\| \geq 1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\|\phi\| = 1.}$$

Réponse

3) Montrons que la forme linéaire $L : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ ***définie par***

$$L(f) = f(0) \quad \forall f \in E$$

n'est pas continue. *Vérifions d'abord que L est linéaire. Pour tous,* $f, g \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\begin{aligned} L(f+\lambda g) &= (f+\lambda g)(0) \\ &= f(0)+\lambda g(0) \\ &= L(f)+\lambda L(g) \end{aligned}$$

Donc L est linéaire. *Montrons maintenant que* $L : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *n'est pas continue. Raisonnons par l'absurde, supposons que L est continue. Alors il existe une constante* $M \geq 0$ *telle que*

$$|L(f)| \leq M \|f\|_1, \qquad (\forall f \in E). \tag{2.3}$$

Réponse

3) Montrons que la forme linéaire $L:(E,\|\cdot\|_1)\longrightarrow\mathbb{R}$ ***définie par***

$$L(f)=f(0)\quad\forall f\in E$$

n'est pas continue. *Vérifions d'abord que L est linéaire. Pour tous,* $f,g\in E$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$ *on a*

$$\begin{array}{rcl} L(f+\lambda g) & = & (f+\lambda g)(0) \\ & = & f(0)+\lambda g(0) \\ & = & L(f)+\lambda L(g) \end{array}$$

Donc L est linéaire. Montrons maintenant que $L:(E,\|\cdot\|_1)\longrightarrow\mathbb{R}$ *n'est pas continue. Raisonnons par l'absurde, supposons que L est continue. Alors il existe une constante* $M\geq 0$ *telle que*

$$|L(f)|\leq M\|f\|_1, \qquad (\forall f\in E). \tag{2.3}$$

Réponse

Considérons la même suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ *définies sur* $[0,1]$ *par*

$$f_n(t) = (1-t)^n, \quad \forall n \geq 1,\ \forall t \in [0,1].$$

Pour tout $n \geq 1$ *on a* $f_n \in E$, $L(f_n) = f_n(0) = 1$ *et* $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$.
Donc d'après (2.3) on a

$$|L(f_n)| \leq M \|f_n\|_1, \qquad (\forall n \geq 1)$$

c'est-à-dire,

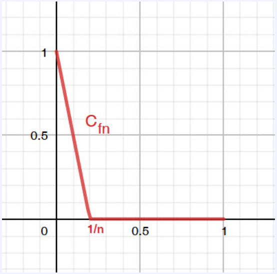
$$1 \leq \frac{M}{n+1}, \qquad (\forall n \geq 1)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, *on obtient* $1 \leq 0$, *absurde. Donc la forme linéaire* $L : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *n'est pas continue.*

Remarque

On pourrait aussi envisager, par exemple, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ *définies sur* $[0,1]$ *par*

$$f_n(x) = \begin{cases} -nt+1, \ \forall t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0, \ \forall t \in \left]\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$



Remarque

Pour tout $n \geq 1$ on a $f_n \in E$, $L(f_n) = f_n(0) = 1$ et

$$\begin{aligned} \|f_n\|_1 &= \int_0^1 |f_n(t)| \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{n}} (-nx+1) \, \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{-n}{2}t^2 + t\right]_0^{\frac{1}{n}} = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Donc d'après (2.3) on a $|L(f_n)| \leq M \|f_n\|_1$, $\qquad (\forall n \geq 1)$
c'est-à-dire,

$$1 \leq \frac{M}{2n}, \qquad (\forall n \geq 1)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $1 \leq 0$, absurde.

Remarque

Cela montre aussi que la forme linéaire $L : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *n'est pas continue.*

2) La forme linéaire $L : (E, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue car*

$$|L(f)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty, \quad \forall f \in E.$$

Plan

1. Exercice 1
2. Exercice 2
3. Exercice 3
4. Exercice 4
5. Exercice 5
6. Exercice 6
7. Exercice 7
8. Exercice 8

Exercice 3

Soit C une partie fermée non vide d'un espace de Banach E. Montrer que toute application contractante $f : C \longrightarrow C$ admet un point fixe et un seul.
(Rappelons : - f est dite contractante s'il existe une constante réelle $k \in [0, 1[$ telle que

$$\forall (x, y) \in C^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

- Un point $a \in C$ est appelé point fixe de f si et seulement si $f(a) = a$.)

Réponse

Soit $f : C \longrightarrow C$ une application contractante. Donc il existe une constante $k \in [0, 1[$ telle que

$$\forall (x, y) \in C^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\| . \tag{3.1}$$

Existence : *Fixons un point $x_0 \in C$ quelconque, et considérons la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nous allons montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f.

Réponse

D'après (3.1) on a

$$\|x_2 - x_1\| = \|f(x_1) - f(x_0)\| \leq k\,\|x_1 - x_0\|\,,$$

$$\|x_3 - x_2\| = \|f(x_2) - f(x_1)\| \leq k\,\|x_2 - x_1\| \leq k^2\,\|x_1 - x_0\|\,,$$
$$\|x_4 - x_3\| = \|f(x_3) - f(x_2)\| \leq k\,\|x_3 - x_2\| \leq k^3\,\|x_1 - x_0\|\,,$$

Donc par itération on a

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n\,\|x_1 - x_0\|\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque $k \in [0,1[$ *alors la série géométrique* $\sum_{n\geq 0} k^n \|x_1 - x_0\|$ *est convergente. On en déduit que la série* $\sum_{n\geq 0} \|x_{n+1} - x_n\|$ *est convergente.*

Réponse

Autrement dit, $\sum_{n\geq 0}(x_{n+1}-x_n)$ *est absolument convergente dans l'espace complet* E*, donc elle converge dans* E*. Soit* S *sa somme. On a*

$$S=\lim_{n\to+\infty} S_n$$

où

$$S_n=\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)=x_{n+1}-x_0$$

Donc

$$S=\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_0)$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}=S+x_0.$$

Cela montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers un point* $a\in E$ *avec* $a=S+x_0$.

Réponse

Puisque $x_n \in C$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* C *est un fermé de* E, *alors* $a \in C$.
Et comme f *est contractante, alors* f *est continue sur* C, *en particulier,* f *est continue en* a.
Or

$$a = \lim_{n \to +\infty} x_n \quad et \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

Donc

$$f(a) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = a.$$

D'où a *est un point fixe de* f.

Réponse

Unicité : *Supposons que a et b sont deux points fixes de f. On a*

$$f(a) = a \quad \text{et} \quad f(b) = b.$$

D'après (3.1) on a :

$$\|a - b\| = \|f(a) - f(b)\| \leq k \|a - b\|.$$

Puisque $k < 1$ on conclut que $\|a - b\| = 0$. Ce qui donne $a = b$. Ainsi le point fixe de f est unique.
Par conséquent f admet un point fixe et un seul.

Plan

1. Exercice 1
2. Exercice 2
3. Exercice 3
4. Exercice 4
5. Exercice 5
6. Exercice 6
7. Exercice 7
8. Exercice 8

Exercice 4

Soient E_1, E_2, *et* F *des espaces vectoriels normés, et soit* $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ *une application bilinéaire continue.*

1) *Montrer que* f *est différentiable sur* $E_1 \times E_2$, *et calculer* $Df(a_1, a_2)$ *pour tout point* $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$.
2) *Montrer que* f *est de classe* C^1.

Réponse

1) Fixons $a = (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$. *Pour tout* $h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$ *on a :*

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) \\ &= f(a_1 + h_1, a_2) + f(a_1 + h_1, h_2) - f(a_1, a_2) \\ &= f(a_1, a_2) + f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2) + f(h_1, h_2) - f(a_1, \\ &= f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2) + f(h_1, h_2). \end{aligned}$$

Donc

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + f(h),$$

où $L : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ *est l'application définie par*

$$L(h) = f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2), \text{ pour tout } h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2.$$

*- Vérifions d'abord que l'application L est **linéaire continue**.*

Réponse

Linéarité de* L *: *Soient* $h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$, $k = (k_1, k_2) \in E_1 \times E_2$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *On a*

$$\begin{aligned} L(h + \lambda k) &= L((h_1, h_2) + \lambda(k_1, k_2)) \\ &= L(h_1 + \lambda k_1, h_2 + \lambda k_2) \\ &= f(h_1 + \lambda k_1, a_2) + f(a_1, h_2 + \lambda k_2) \\ &= f(h_1, a_2) + \lambda f(k_1, a_2) + f(a_1, h_2) + \lambda f(a_1, k_2) \\ &= [f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2)] + \lambda [f(k_1, a_2) + f(a_1, k_2)] \\ &= L(h) + \lambda L(k). \end{aligned}$$

Donc L est linéaire.

Continuité de* L *: *On munit* $E_1 \times E_2$ *de la norme* $\|\cdot\|_\infty$ *définie par*

$$\|h\|_\infty = \|(h_1, h_2)\|_\infty = \sup(\|h_1\|, \|h_2\|), \quad \textit{pour tout } h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$$

Réponse

Pour tout $h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$*, on a*

$$\begin{aligned}
\|L(h)\| &= \|f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2)\| \\
&\leq \|f(h_1, a_2)\| + \|f(a_1, h_2)\| \\
&\leq \|f\| \cdot \|h_1\| \cdot \|a_2\| + \|f\| \cdot \|a_1\| \cdot \|h_2\| \\
&\leq \|f\| \cdot \|a_2\| \cdot \|h\|_\infty + \|f\| \cdot \|a_1\| \cdot \|h\|_\infty \\
&\leq \|f\| \left(\|a_1\| + \|a_2\|\right) \|h\|_\infty .
\end{aligned}$$

Donc l'application linéaire L *est continue, et on a*

$$\|L\| \leq \|f\| \left(\|a_1\| + \|a_2\|\right) \leq 2 \|f\| \|a\|_\infty .$$

Réponse

- Il reste à montrer que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|_\infty} = 0.$$

Pour tout $h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2 \setminus \{(0,0)\}$, *on a*

$$\begin{array}{rcl} \|f(a+h) - f(a) - L(h)\| & = & \|f(h)\| = \|f(h_1, h_2) .\| \\ & \leq & \|f\| \cdot \|h_1\| \cdot \|h_2\| \\ & \leq & \|f\| \cdot (\|h\|_\infty)^2 \end{array}$$

donc

$$0 \leq \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|_\infty} \leq \|f\| \cdot \|h\|_\infty \underset{h \to 0}{\to} 0.$$

D'où

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Réponse

Par conséquent, l'application f est différentiable au point $a = (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$ et on a $Df(a) = L$. Ainsi,

$$Df(a_1, a_2)(h_1, h_2) = f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2), \text{ pour tout } h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2.$$

De plus on a

$$\boxed{\|Df(a_1, a_2)\| \leq 2\|f\| \|(a_1, a_2)\|_\infty .} \tag{3.2}$$

D'où f est différentiable sur $E_1 \times E_2$.
2) Montrer que f est de classe C^1. D'après la question précédente, f est différentiable sur $E_1 \times E_2$. Il suffit donc de prouver que l'application

$$\begin{array}{rccc} Df : & E_1 \times E_2 & \longrightarrow & \mathcal{L}(E_1 \times E_2, F) \\ & a & \longmapsto & Df(a) \end{array}$$

est continue.
Vérifions d'abord que Df est linéaire.

Réponse

Soient $a = (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$, $b = (b_1, b_2) \in E_1 \times E_2$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Pour tout* $h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$ *on a :*

$$\begin{aligned}
Df(a+\lambda b)(h) &= Df(a_1+\lambda b_1, a_2+\lambda b_2)(h_1, h_2) \\
&= f(h_1, a_2+\lambda b_2) + f(a_1+\lambda b_1, h_2) \\
&= f(h_1, a_2) + \lambda f(h_1, b_2) + f(a_1, h_2) + \lambda f(b_1, h_2) \\
&= [f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2)] + \lambda [f(h_1, b_2) + f(b_1, h_2)] \\
&= Df(a)(h) + \lambda Df(b)(h) \\
&= [Df(a) + \lambda Df(b)](h)
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{Df(a+\lambda b) = Df(a) + \lambda Df(b).}$$

D'où Df *est linéaire. Or d'après l'inégalité (3.2)*

$$\|Df(a)\| \leq 2\|f\| \|a\|_\infty$$

Réponse

Donc l'application linéaire Df est continue. Cela montre bien que f est de classe C^1 sur $E_1 \times E_2$.

Plan

1. Exercice 1
2. Exercice 2
3. Exercice 3
4. Exercice 4
5. Exercice 5
6. Exercice 6
7. Exercice 7
8. Exercice 8

Exercice 5 (différentielle d'un produit)

Soient $E, \; E_1, \; E_2$, et F des espaces vectoriels normés. Soit U un ouvert non vide de E, et soit $\psi : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ une application bilinéaire continue.

1) *Soient $f : U \longrightarrow E_1$ et $g : U \longrightarrow E_2$ deux applications différentiables en un point $a \in U$. Soit $\varphi : U \longrightarrow F$ l'application définie par*

$$\varphi(x) = \psi(f(x), g(x))$$

Montrer que φ est différentiable en a et calculer $D\varphi(a)$.

2) *Application : soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques, différentiables en un point $a \in U$. Soit $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$\varphi(x) = f(x)g(x)$$

Montrer que φ est différentiable en a et calculer $D\varphi(a)$.

Réponse

1) ***Montrons que*** φ ***est différentiable en*** a ***et calculons*** $D\varphi(a)$.

L'application φ *est la composée* $\varphi = \psi \circ p$ *des applications suivantes :*

$$p: \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & E_1 \times E_2 \\ x & \longmapsto & (f(x), g(x)) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \psi : E_1 \times E_2 \longrightarrow F.$$

- L'application p est différentiable au point a car ses composantes f et g le sont, et on a :

$$Dp\,(a)\,(h) = (Df\,(a)\,(h)\,, Dg\,(a)\,(h)), \qquad \forall h \in E.$$

- L'application ψ *est* ***bilinéaire continue (****par hypothèse***)****, donc* ψ *est différentiable sur* $E_1 \times E_2$*, et on a*

$$D\psi(x_1, x_2)\,(k_1, k_2) = \psi\,(k_1, x_2) + \psi\,(x_1, k_2)\,, \quad \forall\,(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2,\ \forall\,(k_1, k_2)$$

Réponse

Par conséquent l'application $\varphi = \psi \circ p$ *est différentiable au point a, et on a :*

$$D\varphi(a) = D(\psi \circ p)(a) = D\psi(p(a)) \circ Dp(a).$$

Donc pour tout $h \in E$ *on a :*

$$\begin{aligned} D\varphi(a)(h) &= D\psi(p(a))(Dp(a)(h)) \\ &= D\psi(f(a), g(a))(Df(a)(h), Dg(a)(h)) \\ &= \psi(Df(a)(h), g(a)) + \psi(f(a), Dg(a)(h)). \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{D\varphi(a)(h) = \psi(Df(a)(h), g(a)) + \psi(f(a), Dg(a)(h)), \quad \forall h \in E.} \tag{5.1}$$

Réponse

2) ***Application :*** *Dans ce cas, l'application φ s'écrit sous la forme*

$$\varphi(x) = f(x)g(x) = \psi(f(x), g(x)), \qquad \forall x \in U.$$

où ψ est l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\alpha, \beta) & \longmapsto & \alpha\beta \end{array}$$

qui est bilinéaire continue. Puisque f et g sont différentiables au point $a \in U$, alors d'après 1) l'application φ est différentiable au point a, et pour tout $h \in E$ on a d'après (5.1) :

$$\begin{aligned} D\varphi(a)(h) &= \psi(Df(a)(h), g(a)) + \psi(f(a), Dg(a)(h)) \\ &= g(a) \cdot Df(a)(h) + f(a) \cdot Dg(a)(h). \end{aligned}$$

Réponse

Donc

$$\boxed{D\varphi\,(a)\,(h) = g\,(a)\cdot Df\,(a)\,(h) + f\,(a)\cdot Dg\,(a)\,(h)\,, \quad \forall h \in E.}$$

(formule de Leibniz)

qui s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$\boxed{D\varphi\,(a) = g\,(a)\cdot Df\,(a) + f\,(a)\cdot Dg\,(a)\,.}$$

Remarque

Cas particuliers : 1) *si de plus, U est un ouvert de $E = \mathbb{R}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions* ***dérivables*** *($\equiv$ différentiables) en un point $a \in U$, alors d'après ce qui précède, la fonction produit $\varphi = fg$ est dérivable ($\equiv$ différentiable) en a et sa dérivée en ce point s'obtient donc en prenant $h = 1$ dans la formule de Leibniz :*

$$\varphi'\,(a) = g\,(a)\cdot f'\,(a) + f\,(a)\cdot g'\,(a)\,.$$

Remarque

2) Si U est un ouvert de $E = \mathbb{R}$, H est un espace préhilbertien réel, $f : U \longrightarrow H$ et $g : U \longrightarrow H$ sont deux fonctions ***dérivables*** *($\equiv$ différentiables) en un point $a \in U$, alors d'après la question 1), l'application $\varphi : U \longrightarrow H$ définie par*

$$\varphi(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$$

est ***dérivable*** *($\equiv$ différentiable) en a. En effet, dans ce cas l'application φ s'écrit sous la forme*

$$\varphi(x) = \langle f(x), g(x) \rangle = \psi(f(x), g(x)), \qquad \forall x \in U.$$

Remarque

où $\psi = \langle\cdot,\cdot\rangle$ *est le produit scalaire sur H, c'est-à-dire, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \psi : & H \times H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (y,z) & \longmapsto & \langle y,z\rangle \end{array}$$

qui est bilinéaire continue. De plus, la dérivée de φ *au point a s'obtient donc en prenant* $h = 1$ *dans la formule (5.1) :*

$$\boxed{\varphi'(a) = \langle f'(a), g(a)\rangle + \langle f(a), g'(a)\rangle .}$$

Plan

1. Exercice 1
2. Exercice 2
3. Exercice 3
4. Exercice 4
5. Exercice 5
6. Exercice 6
7. Exercice 7
8. Exercice 8

Exercice 6 (différentielle d'un quotient)

Soient E un espace vectoriel normé réel, U un ouvert de E, a un point de U, f et g deux applications de U dans $\mathbb{R}$ différentiables au point $a \in U$. On suppose que g ne s'annule pas sur U. On définit une application $q : U \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant, pour tout $x \in U$, $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Montrer que q est différentiable au point a et déterminer sa différentielle $Dq(a)$.

Réponse

L'application q peut s'écrire comme produit de deux applications $q = f \cdot g_1$ où g_1 est l'application suivante.

$$g_1 : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{g(x)} \end{array}$$

L'application g_1 est bien définie puisque g ne s'annule pas sur U. Par hypothèse, l'application f est différentiable au point $a \in U$.

Exercice 6 (différentielle d'un quotient)

Soient E un espace vectoriel normé réel, U un ouvert de E, a un point de U, f et g deux applications de U dans $\mathbb{R}$ différentiables au point $a \in U$. On suppose que g ne s'annule pas sur U. On définit une application $q : U \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant, pour tout $x \in U$, $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Montrer que q est différentiable au point a et déterminer sa différentielle $Dq(a)$.

Réponse

L'application q peut s'écrire comme produit de deux applications $q = f \cdot g_1$ où g_1 est l'application suivante.

$$g_1 : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{g(x)} \end{array}$$

L'application g_1 est bien définie puisque g ne s'annule pas sur U. Par hypothèse, l'application f est différentiable au point $a \in U$.

Réponse

Montrons que g_1 est différentiable au point $a \in U$. L'application g_1 est la composée $g_1 = r \circ g$ des applications suivantes :

$$g : U \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc} r : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \frac{1}{t} \end{array}$$

On a $g(U) \subset \mathbb{R}^*$. L'application r est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ au sens usuel et on a

$$r'(t) = \frac{-1}{t^2}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^*.$$

Donc r est différentiable sur $\mathbb{R}^*$, et sa différentielle en tout point $t \in \mathbb{R}^*$ a pour expression :

$$Dr(t)(\lambda) = \lambda r'(t) = \frac{-\lambda}{t^2}, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Réponse

Et comme g est différentiable au point $a \in U$ (par hypothèse), alors l'application $g_1 = r \circ g$ est différentiable au point a et on a

$$Dg_1(a) = D(r \circ g)(a) = Dr(g(a)) \circ Dg(a).$$

Donc pour tout $h \in E$, on a :

$$Dg_1(a)(h) = Dr(g(a))(Dg(a)(h)) = \frac{-Dg(a)(h)}{[g(a)]^2}.$$

Par conséquent, l'application $q = f \cdot g_1$ est différentiable au point a, et on a d'après formule de Leibniz

$$Dq(a) = g_1(a) \cdot Df(a) + f(a) \cdot Dg_1(a).$$

Réponse

Donc pour tout $h \in E$, on a :

$$\begin{aligned} Dq(a)(h) &= g_1(a) \cdot Df(a)(h) + f(a) \cdot Dg_1(a)(h) \\ &= \frac{1}{g(a)} \cdot Df(a)(h) + f(a) \cdot \frac{-Dg(a)(h)}{[g(a)]^2} \\ &= \frac{g(a) \cdot Df(a)(h) - f(a) \cdot Dg(a)(h)}{[g(a)]^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{Dq(a)(h) = \frac{g(a) \cdot Df(a)(h) - f(a) \cdot Dg(a)(h)}{[g(a)]^2}, \quad \forall h \in E.} \tag{6.1}$$

Réponse

qui s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$\boxed{Dq(a) = \frac{g(a) \cdot Df(a) - f(a) \cdot Dg(a)}{[g(a)]^2}.}$$

Remarque

Cas particulier : *Soient U un ouvert de $E = \mathbb{R}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions **dérivables** ($\equiv$ différentiables) en un point $a \in U$. On suppose que g ne s'annule pas sur U. Alors d'après ce qui précède, la fonction $q = \frac{f}{g}$ est dérivable ($\equiv$ différentiable) en a et sa dérivée en ce point s'obtient donc en prenant $h = 1$ dans la formule (6.1) :*

$$q'(a) = \frac{g(a) \cdot f'(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

Plan

1. Exercice 1
2. Exercice 2
3. Exercice 3
4. Exercice 4
5. Exercice 5
6. Exercice 6
7. Exercice 7
8. Exercice 8

Exercice 7

Soit H un espace préhilbertien réel, et soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \ln(1 + \langle x, x \rangle).$$

1) *Montrer que l'application $q : H \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$q(x) = \langle x, x \rangle$$

est de classe C^1 sur H, et calculer $Dq(x)$ pour tout $x \in H$.
***L'application** q **est appelée la forme quadratique associée au produit scalaire** $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

2) *Montrer que f est différentiable en tout point $x \in H$, et calculer sa différentielle $Df(x)$ pour tout $x \in H$.*

3) *Montrer que pour tous $x, y \in H$ on a*

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|.$$

Réponse

1) Montrons que q est différentiable sur H.

L'application q est la composée $q = \varphi \circ p$ des applications suivantes :

$$p : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H \times H \\ x & \longmapsto & (x, x) \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi : \begin{array}{ccc} H \times H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x, y \rangle \end{array}$$

- L'application p est linéaire continue car ses composantes $p_1 = Id_H$ et $p_2 = Id_H$ le sont. Donc p est de classe C^1 sur H, et pour tout $x \in H$ on a

$$Dp(x) = p.$$

D'où

$$Dp(x)(h) = p(h) = (h, h), \quad \forall h \in H.$$

*- L'application φ est **bilinéaire continue** car c'est un produit scalaire. Donc φ est de classe C^1 sur $H \times H$, et pour tous $(x, y) \in H \times H$ et $(h, k) \in H \times H$ on a*

Réponse

$$D\varphi\,(x,y)\,(h,k)=\varphi\,(h,y)+\varphi\,(x,k)=\langle h,y\rangle+\langle x,k\rangle\,.$$

Par conséquent l'application $q=\varphi\circ p$ est de classe C^1 sur H, et pour tout $x\in H$ on a

$$Dq\,(x)=D\,(\varphi\circ p)\,(x)=D\varphi\,(p\,(x))\circ Dp\,(x)$$

Donc pour tout $h\in H$ on a :

$$\begin{aligned} Dq\,(x)\,(h) &= D\varphi\,(p\,(x))\,(Dp\,(x)\,(h)) \\ &= D\varphi\,(x,x)\,(h,h) \\ &= \varphi\,(h,x)+\varphi\,(x,h) \\ &= \langle h,x\rangle+\langle x,h\rangle \\ &= 2\,\langle x,h\rangle\,. \end{aligned}$$

Réponse

D'où

$$\boxed{Dq(x)(h) = 2\langle x, h\rangle, \quad \forall x \in H,\ \forall h \in H.} \tag{7.1}$$

2) ***Montrons que*** f ***est différentiable en tout point*** $x \in H$***, et calculons sa différentielle*** $Df(x)$ ***pour tout*** $x \in H$***.***

L'application f *est la composée* $f = r \circ q$ *des applications suivantes :*

$$q: \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle x, x\rangle \end{array} \quad \text{et} \quad r: \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(1+t) \end{array}$$

On a $q(H) \subset \mathbb{R}^+ \subset]-1,+\infty[$.

D'après 1) l'application q *est différentiable sur* H*, et sa différentielle est donnée par (7.1).*

L'application r *est dérivale sur* $]-1,+\infty[$*, et on a*

$$r'(t) = \frac{1}{1+t}, \quad \forall t \in]-1,+\infty[.$$

Réponse

Donc r est différentiable sur $]-1,+\infty[$, et sa différentielle en tout point $t\in\,]-1,+\infty[$ a pour expression :

$$Dr\left(t\right)\left(\lambda\right)=\lambda r'\left(t\right)=\frac{\lambda}{1+t},\quad\left(\forall\lambda\in\mathbb{R}\right). \tag{7.2}$$

Par conséquent l'application $f=r\circ q$ est différentiable sur H, et pour tout $x\in H$ on a

$$Df\left(x\right)=D\left(r\circ q\right)\left(x\right)=Dr\left(q\left(x\right)\right)\circ Dq\left(x\right)$$

Donc pour tout $h\in H$ on a :

$$\begin{aligned} Df\left(x\right)\left(h\right) &= Dr\left(q\left(x\right)\right)\left(Dq\left(x\right)\left(h\right)\right)\\ &= Dr\left(\left\langle x,x\right\rangle\right)\left(2\left\langle x,h\right\rangle\right)\\ &= \frac{2\left\langle x,h\right\rangle}{1+\left\langle x,x\right\rangle}\end{aligned}$$

Réponse

D'où

$$\boxed{Df(x)(h) = \frac{2\langle x, h\rangle}{1 + \|x\|^2}, \quad \forall x \in H, \ \forall h \in H.}$$

3) Montron que $|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|$ pour tous $x, y \in H$.
D'après 2) l'application f est différentiable sur H, et pour tout $x \in H$ on a

$$\|Df(x)\| = \sup_{h \neq 0} \frac{|Df(x)(h)|}{\|h\|} = \sup_{h \neq 0} \frac{2|\langle x, h\rangle|}{\left(1 + \|x\|^2\right)\|h\|}.$$

Or pour tout $h \in H \setminus \{0\}$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{2|\langle x, h\rangle|}{\left(1 + \|x\|^2\right)\|h\|} \leq \frac{2\|x\| \cdot \|h\|}{\left(1 + \|x\|^2\right)\|h\|} = \frac{2\|x\|}{1 + \|x\|^2} \leq 1.$$

Réponse

(car $\frac{2\|x\|}{1+\|x\|^2} \leq 1 \Leftrightarrow 2\|x\| \leq 1 + \|x\|^2 \Leftrightarrow (\|x\| - 1)^2 \geq 0$ *est toujours vraie). D'où*

$$\boxed{\|Df(x)\| \leq 1, \quad \forall x \in H.}$$

De plus H est ***convexe*** *(car c'est un espace vectoriel). Donc d'après le théorème des accroissements finis on a :*

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|, \quad \forall (x, y) \in H^2.}$$

Plan

1. Exercice 1
2. Exercice 2
3. Exercice 3
4. Exercice 4
5. Exercice 5
6. Exercice 6
7. Exercice 7
8. Exercice 8

Exercice 8

Montrer, en utilisant une norme convenable, que le système :

$$(S) \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\sin(x+y) \\ y = \frac{1}{2}\cos(x-y) \end{cases}$$

admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^2$.

Réponse

Un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *est solution de* (S) *si et seulement si*

$$\left(\frac{1}{2}\sin(a+b), \frac{1}{2}\cos(a-b)\right) = (a,b)$$

si et seulement si

$$f(a,b) = (a,b)$$

c'est-à-dire, (a,b) *est un point fixe de l'application* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie*

Réponse

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{2}\sin(x+y),\frac{1}{2}\cos(x-y)\right),\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Donc il suffit de montrer que f admet un point et un seul.
L'application f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ car ses deux composantes

$$f_1:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{2}\sin(x+y)\end{array} \quad et \quad f_2:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{2}\cos(x-y)\end{array}$$

le sont. En effet, les dérivées partielles de f_1 et f_2 existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{2}\cos(x+y)\,; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{2}\cos(x+y)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) &= \frac{-1}{2}\sin(x-y)\,; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)=\frac{+1}{2}\sin(x-y)\,.\end{aligned}$$

Réponse

De plus la différentielle de f en chaque point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *est donnée par la matrice jacobienne de f en* (x, y) *:*

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(x+y) & \frac{1}{2}\cos(x+y) \\ \frac{-1}{2}\sin(x-y) & \frac{+1}{2}\sin(x-y) \end{pmatrix}$$

Donc pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ *on a*

$$Df(x,y)(h,k) = \left(\frac{1}{2}(h+k)\cos(x+y), \frac{1}{2}(-h+k)\sin(x-y)\right).$$

On munit $\mathbb{R}^2$ *de la norme euclidienne :*

$$\|(h,k)\|_2 = \sqrt{h^2+k^2}, \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2.$$

Réponse

On a

$$\begin{aligned}\|Df(x,y)(h,k)\|_2^2 &= \frac{1}{4}(h+k)^2\cos^2(x+y)+\frac{1}{4}(h-k)^2\sin^2(x-y)\\ &\leq \frac{1}{4}(h^2+2hk+k^2)+\frac{1}{4}(h^2-2hk+k^2)\\ &= \frac{1}{2}\left(h^2+k^2\right)=\frac{1}{2}\|(h,k)\|_2^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\|Df(x,y)(h,k)\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|(h,k)\|_2, \quad \forall (h,k)\in\mathbb{R}^2.$$

Or

$$\|Df(x,y)\| = \sup_{(h,k)\neq(0,0)} \frac{\|Df(x,y)(h,k)\|_2}{\|(h,k)\|_2}$$

Réponse

Donc

$$\boxed{\|Df(x,y)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.}$$

De plus $\mathbb{R}^2$ *est* ***convexe*** *(car c'est un espace vectoriel). Donc d'après le théorème des accroissements finis on a :*

$$\boxed{\left\|f(x,y) - f\left(x',y'\right)\right\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left\|(x,y) - \left(x',y'\right)\right\|_2} \qquad \begin{array}{l} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \forall (x',y') \in \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Cela montre que f *est contractante de rapport* $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. *Et comme* $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$ *est complet, alors d'après le Théorème du point fixe, l'application* f *admet un point et un seul. D'où le système* (S) *admet une solution et une seule dans* $\mathbb{R}^2$.

Remarque

Le point crucial est donc que f soit une application contractante, i.e. lipschitzienne de rapport strictement inférieur à 1.
Le choix de la norme euclidienne est important : la méthode ne s'appliquerait plus avec les normes $\|\cdot\|_1$ *ou* $\|\cdot\|_\infty$*, qui donneraient* $\|Df(x,y)\| = 1$ *pour* $(x,y) = (\frac{\pi}{4}, \frac{-\pi}{4})$*.*
Par exemple, si on munit $\mathbb{R}^2$ *de la norme*

$$\|(h,k)\|_1 = |h| + |k|, \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$$

alors pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ *on a*

$$\begin{aligned} \|Df(x,y)(h,k)\|_1 &= \left|\frac{1}{2}(h+k)\cos(x+y)\right| + \left|\frac{1}{2}(-h+k)\sin(x-y)\right| \\ &\leq \frac{1}{2}|h+k| + \frac{1}{2}|-h+k| \\ &\leq \frac{1}{2}(|h|+|k|) + \frac{1}{2}(|h|+|k|) = |h|+|k| = \|(h,k)\|_1 \end{aligned}$$

Remarque

Donc

$$\|Df(x,y)(h,k)\|_1 \leq \|(h,k)\|_1 , \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2.$$

Or

$$\|Df(x,y)\| = \sup_{(h,k)\neq(0,0)} \frac{\|Df(x,y)(h,k)\|_1}{\|(h,k)\|_1}$$

Donc

$$\|Df(x,y)\| \leq 1, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour $(x,y) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}\right)$ *et* $(h,k) = (1,0)$ *on a* $\|(1,0)\|_1 = 1$ *et*

$$Df\left(\frac{\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}\right)(1,0) = \left(\frac{1}{2}(1+0)\cos(0), \frac{1}{2}(-1+0)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

Donc

$$\left\|Df\left(\frac{\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}\right)(1,0)\right\|_1 = \left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)\right\|_1 = 1$$

Remarque

Par suite,

$$\left\|Df\left(\frac{\pi}{4},\frac{-\pi}{4}\right)\right\| \geq \frac{\left\|Df\left(\frac{\pi}{4},\frac{-\pi}{4}\right)(1,0)\right\|_1}{\|(1,0)\|_1} = 1$$

D'où

$$\boxed{\left\|Df\left(\frac{\pi}{4},\frac{-\pi}{4}\right)\right\| = 1.}$$

Autre méthode :

Supposons qu'il existe une constante $k \in [0,1[$ *telle que*

$$\boxed{\left\|f(x,y) - f(x',y')\right\|_1 \leq k\left\|(x,y)-(x',y')\right\|_1} \qquad \begin{array}{c}\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \forall (x',y') \in \mathbb{R}^2.\end{array}$$

Remarque

En prenant $(x,y) = (\frac{\pi}{4}+t, \frac{-\pi}{4})$ *et* $(x',y') = (\frac{\pi}{4}, \frac{-\pi}{4})$, *on obtient*

$$\left\| f\left((\frac{\pi}{4}+t, \frac{-\pi}{4}) \right) - f(\frac{\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}) \right\|_1 \leq k \left\|(t,0)\right\|_1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

On a

$$f(\frac{\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}) = (0,0)$$

et

$$f\left(\frac{\pi}{4}+t, \frac{-\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{2}\cos(t+\frac{\pi}{2})\right) = \left(\frac{1}{2}\sin t, \frac{-1}{2}\sin t\right)$$

Donc

$$\left\| \left(\frac{1}{2}\sin t, \frac{-1}{2}\sin t\right) \right\|_1 \leq k \left\|(t,0)\right\|_1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Remarque

C'est-à-dire,

$$\frac{1}{2}|\sin t| + \frac{1}{2}|\sin t| \leq k|t| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Donc

$$\left|\frac{\sin t}{t}\right| \leq k \quad \forall t \in \mathbb{R}^*$$

Finalement, en faisant tendre t vers 0, on obtient $1 \leq k$*, absurde.*
Par conséquent, l'application f : $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ *n'est pas contractante.*