Calcul différentiel
Corrections de la série 2

Aziz ELBOUR

Faculté des Sciences et Techniques
Errachidia

2022-2023

Plan

Exercice 1

Soit E un espace préhilbertien réel. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme associée définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Soit $L \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme continu de E vérifiant

$$\langle L(x), y \rangle = \langle x, L(y) \rangle, \qquad \forall (x, y) \in E^2.$$

1) *Montrer que l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle L(x), x \rangle$, est de classe C^1 sur E. Calculer sa différentielle en tout point $x \in E$.*
2) *En déduire que l'application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(x) = \langle x, x \rangle$, est de classe C^1 sur E, et calculer sa différentielle en tout point $x \in E$.*
3) *Posons $U = E \setminus \{0\}$ et considérons l'application $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{\langle L(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}$.*

i- Montrer que g est différentiable sur U et calculer sa différentielle en tout point $x \in U$.

ii- Soit $a \in U$. Montrer $Dg(a) = 0$ si et seulement si a est vecteur propre de L.

Réponse

1) ***Montrons que l'application*** f ***est de classe*** C^1 ***sur*** E, ***et calculons*** $Df(x)$ ***pour tout*** $x \in E$.

L'application f est la composée $f = \varphi \circ p$ des applications suivantes :

$$p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \times E \\ x & \longmapsto & (L(x), x) \end{array} \quad et \quad \varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x, y \rangle \end{array}.$$

*- L'application p est **linéaire continue** car ses composantes $p_1 = L$ et $p_2 = Id_E$ le sont. Donc p est de classe C^1 sur E, et pour tout $x \in E$ on a*

$$Dp\,(x) = p.$$

i- Montrer que g est différentiable sur U et calculer sa différentielle en tout point $x \in U$.

ii- Soit $a \in U$. Montrer $Dg(a) = 0$ si et seulement si a est vecteur propre de L.

Réponse

1) ***Montrons que l'application*** f ***est de classe*** C^1 ***sur*** E, ***et calculons*** $Df(x)$ ***pour tout*** $x \in E$.

L'application f *est la composée* $f = \varphi \circ p$ *des applications suivantes :*

$$p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \times E \\ x & \longmapsto & (L(x), x) \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x, y \rangle \end{array}.$$

- L'application p *est* ***linéaire continue*** *car ses composantes* $p_1 = L$ *et* $p_2 = Id_E$ *le sont. Donc* p *est de classe* C^1 *sur* E, *et pour tout* $x \in E$ *on a*

$$Dp(x) = p.$$

i- Montrer que g est différentiable sur U et calculer sa différentielle en tout point $x \in U$.

ii- Soit $a \in U$. Montrer $Dg(a) = 0$ si et seulement si a est vecteur propre de L.

Réponse

1) ***Montrons que l'application** f **est de classe** C^1 **sur** E, **et calculons** $Df(x)$ **pour tout** $x \in E$.*

L'application f est la composée $f = \varphi \circ p$ des applications suivantes :

$$p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \times E \\ x & \longmapsto & (L(x), x) \end{array} \quad et \quad \varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x, y \rangle \end{array}.$$

*- L'application p est **linéaire continue** car ses composantes $p_1 = L$ et $p_2 = Id_E$ le sont. Donc p est de classe C^1 sur E, et pour tout $x \in E$ on a*

$$Dp\,(x) = p.$$

Réponse

D'où

$$Dp(x)(h) = p(h) = (L(h), h), \quad \forall h \in E.$$

*- L'application φ est **bilinéaire continue** car c'est un produit scalaire. Donc φ est classe C^1 sur E, et pour tous $(x, y) \in E \times E$ et $(h, k) \in E \times E$ on a*

$$D\varphi(x, y)(h, k) = \varphi(h, y) + \varphi(x, k) = \langle h, y \rangle + \langle x, k \rangle .$$

Par conséquent l'application $f = \varphi \circ p$ est différentiable sur E, et pour tout $x \in E$ on a

$$Df(x) = D(\varphi \circ p)(x) = D\varphi(p(x)) \circ Dp(x)$$

Réponse

D'où

$$Dp(x)(h) = p(h) = (L(h), h), \quad \forall h \in E.$$

- L'application φ *est* ***bilinéaire continue*** *car c'est un produit scalaire. Donc* φ *est classe* C^1 *sur* E*, et pour tous* $(x, y) \in E \times E$ *et* $(h, k) \in E \times E$ *on a*

$$D\varphi(x, y)(h, k) = \varphi(h, y) + \varphi(x, k) = \langle h, y\rangle + \langle x, k\rangle .$$

Par conséquent l'application $f = \varphi \circ p$ *est différentiable sur* E*, et pour tout* $x \in E$ *on a*

$$Df(x) = D(\varphi \circ p)(x) = D\varphi(p(x)) \circ Dp(x)$$

Réponse

D'où

$$Dp(x)(h) = p(h) = (L(h), h), \quad \forall h \in E.$$

- L'application φ *est* ***bilinéaire continue*** *car c'est un produit scalaire. Donc* φ *est classe* C^1 *sur* E*, et pour tous* $(x, y) \in E \times E$ *et* $(h, k) \in E \times E$ *on a*

$$D\varphi(x, y)(h, k) = \varphi(h, y) + \varphi(x, k) = \langle h, y \rangle + \langle x, k \rangle.$$

Par conséquent l'application $f = \varphi \circ p$ *est différentiable sur* E*, et pour tout* $x \in E$ *on a*

$$Df(x) = D(\varphi \circ p)(x) = D\varphi(p(x)) \circ Dp(x)$$

Réponse

Donc pour tout $h \in H$ on a :

$$\begin{aligned} Df(x)(h) &= D\varphi(p(x))(Dp(x)(h)) \\ &= D\varphi(L(x), x)(L(h), h) \\ &= \varphi(L(h), x) + \varphi(L(x), h) \\ &= \langle x, L(h)\rangle + \langle L(x), h\rangle \\ &= \langle L(x), h\rangle + \langle L(x), h\rangle \\ &= 2\langle L(x), h\rangle . \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{Df(x)(h) = 2\langle L(x), h\rangle, \quad \forall x \in E, \forall h \in E.}$$

2) Si on prend $L = Id_E$ dans 1) on obtient $q = f$. Donc d'après 1) l'application q est de classe C^1 sur E, et

$$\boxed{Dq(x)(h) = 2\langle x, h\rangle, \quad \forall x \in E, \forall h \in E.}$$

Réponse

Donc pour tout $h \in H$ on a :

$$\begin{aligned} Df(x)(h) &= D\varphi(p(x))(Dp(x)(h)) \\ &= D\varphi(L(x), x)(L(h), h) \\ &= \varphi(L(h), x) + \varphi(L(x), h) \\ &= \langle x, L(h)\rangle + \langle L(x), h\rangle \\ &= \langle L(x), h\rangle + \langle L(x), h\rangle \\ &= 2\langle L(x), h\rangle . \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{Df(x)(h) = 2\langle L(x), h\rangle, \quad \forall x \in E, \forall h \in E.}$$

2) Si on prend $L = Id_E$ dans 1) on obtient $q = f$. Donc d'après 1) l'application q est de classe C^1 sur E, et

$$\boxed{Dq(x)(h) = 2\langle x, h\rangle, \quad \forall x \in E, \forall h \in E.}$$

Réponse

Donc pour tout $h \in H$ on a :

$$\begin{aligned} Df(x)(h) &= D\varphi(p(x))(Dp(x)(h)) \\ &= D\varphi(L(x), x)(L(h), h) \\ &= \varphi(L(h), x) + \varphi(L(x), h) \\ &= \langle x, L(h)\rangle + \langle L(x), h\rangle \\ &= \langle L(x), h\rangle + \langle L(x), h\rangle \\ &= 2\langle L(x), h\rangle . \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{Df(x)(h) = 2\langle L(x), h\rangle, \quad \forall x \in E, \ \forall h \in E.}$$

2) Si on prend $L = Id_E$ dans 1) on obtient $q = f$. Donc d'après 1) l'application q est de classe C^1 sur E, et

$$\boxed{Dq(x)(h) = 2\langle x, h\rangle, \quad \forall x \in E, \ \forall h \in E.}$$

Réponse

3) ***i) Montrons que*** g ***est différentiable sur*** U ***et calculons sa différentielle en tout point*** $x \in U$***.***

Pour tout $x \in U$ *on a*

$$g(x) = \frac{\langle L(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{f(x)}{q(x)}$$

avec $q(x) = \langle x, x \rangle \neq 0$ *pour tout* $x \in U$*. Puisque les applications* f *et* q *sont différentiables sur* U*, alors l'application* $g = \frac{f}{q}$ *est différentiable sur* U*, et pour tout* $x \in U$ *on a :*

$$Dg(x) = \frac{q(x) \cdot Df(x) - f(x) \cdot Dq(x)}{[q(x)]^2}.$$

Réponse

Par suite, pour tout $h \in E$ on a :

$$\begin{aligned} Dg(x)(h) &= \frac{q(x) \cdot Df(x)(h) - f(x) \cdot Dq(x)(h)}{[q(x)]^2} \\ &= \frac{2\langle x, x\rangle \langle L(x), h\rangle - 2\langle L(x), x\rangle \langle x, h\rangle}{[\langle x, x\rangle]^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{Dg(x)(h) = \frac{2\langle x, x\rangle \langle L(x), h\rangle - 2\langle L(x), x\rangle \langle x, h\rangle}{[\langle x, x\rangle]^2},} \quad \forall x \in U, \ \forall h \in E. \tag{1.1}$$

ii) Soit $a \in U$. Montrons $Dg(a) = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de L.

Réponse

Par suite, pour tout $h \in E$ on a :

$$\begin{aligned} Dg(x)(h) &= \frac{q(x)\cdot Df(x)(h) - f(x)\cdot Dq(x)(h)}{[q(x)]^2} \\ &= \frac{2\langle x,x\rangle\langle L(x),h\rangle - 2\langle L(x),x\rangle\langle x,h\rangle}{[\langle x,x\rangle]^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{Dg(x)(h) = \frac{2\langle x,x\rangle\langle L(x),h\rangle - 2\langle L(x),x\rangle\langle x,h\rangle}{[\langle x,x\rangle]^2},} \quad \forall x \in U,\ \forall h \in E. \tag{1.1}$$

***ii) Soit** $a \in U$. **Montrons** $Dg(a) = 0$ **si et seulement si** a **est un vecteur propre de** L.*

Réponse

Par suite, pour tout $h \in E$ on a :

$$\begin{aligned} Dg(x)(h) &= \frac{q(x)\cdot Df(x)(h) - f(x)\cdot Dq(x)(h)}{[q(x)]^2} \\ &= \frac{2\langle x,x\rangle\langle L(x),h\rangle - 2\langle L(x),x\rangle\langle x,h\rangle}{[\langle x,x\rangle]^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{Dg(x)(h) = \frac{2\langle x,x\rangle\langle L(x),h\rangle - 2\langle L(x),x\rangle\langle x,h\rangle}{[\langle x,x\rangle]^2},} \quad \forall x \in U,\ \forall h \in E. \tag{1.1}$$

***ii) Soit** $a \in U$. **Montrons** $Dg(a) = 0$ **si et seulement si** a **est un vecteur propre de** L.*

Réponse

- Supposons $Dg(a) = 0$. *Alors d'après (1.1), on a*

$$\langle a, a\rangle \langle L(a), h\rangle - \langle L(a), a\rangle \langle a, h\rangle = 0, \quad \forall h \in E.$$

c'est-à-dire,

$$\langle [\langle a, a\rangle L(a)], h\rangle - \langle [\langle L(a), a\rangle a], h\rangle = 0, \quad \forall h \in E.$$

ou encore

$$\langle [\langle a, a\rangle L(a) - \langle L(a), a\rangle a], h\rangle = 0, \quad (\forall h \in E).$$

Cela implique nécessairement,

$$\langle a, a\rangle L(a) - \langle L(a), a\rangle a = 0$$

Réponse

- Supposons $Dg(a) = 0$. Alors d'après (1.1), on a

$$\langle a, a\rangle \langle L(a), h\rangle - \langle L(a), a\rangle \langle a, h\rangle = 0, \quad \forall h \in E.$$

c'est-à-dire,

$$\langle [\langle a, a\rangle L(a)], h\rangle - \langle [\langle L(a), a\rangle a], h\rangle = 0, \quad \forall h \in E.$$

ou encore

$$\langle [\langle a, a\rangle L(a) - \langle L(a), a\rangle a], h\rangle = 0, \quad (\forall h \in E).$$

Cela implique nécessairement,

$$\langle a, a\rangle L(a) - \langle L(a), a\rangle a = 0$$

Réponse

- Supposons $Dg(a) = 0$*. Alors d'après (1.1), on a*

$$\langle a, a\rangle \langle L(a), h\rangle - \langle L(a), a\rangle \langle a, h\rangle = 0, \quad \forall h \in E.$$

c'est-à-dire,

$$\langle [\langle a, a\rangle L(a)], h\rangle - \langle [\langle L(a), a\rangle a], h\rangle = 0, \quad \forall h \in E.$$

ou encore

$$\langle [\langle a, a\rangle L(a) - \langle L(a), a\rangle a], h\rangle = 0, \quad (\forall h \in E).$$

Cela implique nécessairement,

$$\langle a, a\rangle L(a) - \langle L(a), a\rangle a = 0$$

Réponse

ou encore

$$\boxed{L(a) = \frac{\langle L(a), a\rangle}{\langle a, a\rangle} a.}$$

Donc a est un vecteur propre de L associé à la valeur propre $\lambda = \frac{\langle L(a),a\rangle}{\langle a,a\rangle}$.

- Réciproquement, si a est un vecteur propre de L alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $L(a) = \lambda a$*, donc pour tout* $h \in E$ *on a*

$$\begin{aligned} Dg(a)(h) &= \frac{2\langle a, a\rangle \langle L(a), h\rangle - 2\langle L(a), a\rangle \langle a, h\rangle}{[\langle a, a\rangle]^2} \\ &= \frac{2\langle a, a\rangle \langle \lambda a, h\rangle - 2\langle \lambda a, a\rangle \langle a, h\rangle}{[\langle a, a\rangle]^2} \\ &= \frac{2\lambda \langle a, a\rangle \langle a, h\rangle - 2\lambda \langle a, a\rangle \langle a, h\rangle}{[\langle a, a\rangle]^2} = 0 \end{aligned}$$

Réponse

ou encore

$$\boxed{L(a) = \frac{\langle L(a), a\rangle}{\langle a, a\rangle} a.}$$

Donc a est un vecteur propre de L associé à la valeur propre $\lambda = \frac{\langle L(a),a\rangle}{\langle a,a\rangle}$.

- Réciproquement, si a est un vecteur propre de L alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $L(a) = \lambda a$*, donc pour tout* $h \in E$ *on a*

$$\begin{aligned} Dg(a)(h) &= \frac{2\langle a, a\rangle \langle L(a), h\rangle - 2\langle L(a), a\rangle \langle a, h\rangle}{[\langle a, a\rangle]^2} \\ &= \frac{2\langle a, a\rangle \langle \lambda a, h\rangle - 2\langle \lambda a, a\rangle \langle a, h\rangle}{[\langle a, a\rangle]^2} \\ &= \frac{2\lambda\langle a, a\rangle \langle a, h\rangle - 2\lambda\langle a, a\rangle \langle a, h\rangle}{[\langle a, a\rangle]^2} = 0 \end{aligned}$$

Réponse

ou encore

$$\boxed{L(a) = \frac{\langle L(a), a\rangle}{\langle a, a\rangle} a.}$$

Donc a est un vecteur propre de L associé à la valeur propre $\lambda = \frac{\langle L(a),a\rangle}{\langle a,a\rangle}$.

- Réciproquement, si a est un vecteur propre de L alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $L(a) = \lambda a$*, donc pour tout* $h \in E$ *on a*

$$\begin{aligned} Dg(a)(h) &= \frac{2\langle a, a\rangle \langle L(a), h\rangle - 2\langle L(a), a\rangle \langle a, h\rangle}{[\langle a, a\rangle]^2} \\ &= \frac{2\langle a, a\rangle \langle \lambda a, h\rangle - 2\langle \lambda a, a\rangle \langle a, h\rangle}{[\langle a, a\rangle]^2} \\ &= \frac{2\lambda \langle a, a\rangle \langle a, h\rangle - 2\lambda \langle a, a\rangle \langle a, h\rangle}{[\langle a, a\rangle]^2} = 0 \end{aligned}$$

Réponse

D'où

$$Dg(a)(h) = 0, \quad (\forall h \in E).$$

Donc

$$\boxed{Dg(a) = 0.}$$

Plan

Exercice 2

Soit E un espace de Banach, et soit $\varphi : E \longrightarrow E$ une application de classe C^1 telle qu'il existe $k \in [0,1[$ avec

$$\|D\varphi(x)\| \leq k \quad \textit{pour tout } x \in E.$$

On définit la fonction $f : E \longrightarrow E$ par $f(x) = x + \varphi(x)$.

1. *Montrer que f est de classe C^1 sur E et que pour tout $x \in E$, $Df(x) \in \mathrm{Isom}(E,E)$.*
2. *Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a :*

   $$\|f(x) - f(y)\| \geq (1-k)\,\|x-y\|\,.$$

   En déduire que f est injective et que $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.
3. *Montrer que f est un C^1-difféomorphisme de E sur E.*

Réponse

1) Montrer que f est de classe C^1 sur E et que pour tout $x \in E$, $Df(x) \in \mathrm{Isom}(E, E)$. *- Pour tout $x \in E$, on a $f(x) = x + \varphi(x)$. Donc* $\boxed{f = \mathrm{Id}_E + \varphi}$.

On a φ est de classe C^1 sur E (par hypothèse) et Id_E est de classe C^1 sur E car elle est linéaire continue.

Donc l'application f est de classe C^1 sur E comme somme de deux application de classe C^1 sur E.

- De plus, pour tout $x \in E$, on a

$$Df(x) = D(\mathrm{Id}_E)(x) + D\varphi(x) = \mathrm{Id}_E + D\varphi(x).$$

Comme $D\varphi(x) \in \mathcal{L}(E)$ et $\|D\varphi(x)\| \leq k < 1$, alors

$$\mathrm{Id}_E + D\varphi(x) \in \mathrm{Isom}(E, E).$$

D'où

$$\boxed{Df(x) \in \mathrm{Isom}(E, E).}$$

Réponse

1) ***Montrer que** f **est de classe** C^1 **sur** E **et que pour tout** $x \in E$**,** $Df(x) \in \mathrm{Isom}(E, E)$**.*** *- Pour tout $x \in E$, on a $f(x) = x + \varphi(x)$. Donc* $\boxed{f = \mathrm{Id}_E + \varphi}$.

On a φ est de classe C^1 sur E (par hypothèse) et Id_E est de classe C^1 sur E car elle est linéaire continue.

Donc l'application f est de classe C^1 sur E comme somme de deux application de classe C^1 sur E.

- De plus, pour tout $x \in E$, on a

$$Df(x) = D(\mathrm{Id}_E)(x) + D\varphi(x) = \mathrm{Id}_E + D\varphi(x).$$

Comme $D\varphi(x) \in \mathcal{L}(E)$ et $\|D\varphi(x)\| \leq k < 1$, alors

$$\mathrm{Id}_E + D\varphi(x) \in \mathrm{Isom}(E, E).$$

D'où

$$\boxed{Df(x) \in \mathrm{Isom}(E, E).}$$

Réponse

1) ***Montrer que*** f ***est de classe*** C^1 ***sur*** E ***et que pour tout*** $x \in E$***,*** $Df(x) \in \mathrm{Isom}(E, E)$***.*** *- Pour tout* $x \in E$, *on a* $f(x) = x + \varphi(x)$. *Donc* $\boxed{f = \mathrm{Id}_E + \varphi}$.

On a φ *est de classe* C^1 *sur* E *(par hypothèse) et* Id_E *est de classe* C^1 *sur* E *car elle est linéaire continue.*

Donc l'application f *est de classe* C^1 *sur* E *comme somme de deux application de classe* C^1 *sur* E.

- De plus, pour tout $x \in E$, *on a*

$$Df(x) = D(\mathrm{Id}_E)(x) + D\varphi(x) = \mathrm{Id}_E + D\varphi(x).$$

Comme $D\varphi(x) \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\|D\varphi(x)\| \leq k < 1$, *alors*

$$\mathrm{Id}_E + D\varphi(x) \in \mathrm{Isom}(E, E).$$

D'où

$$\boxed{Df(x) \in \mathrm{Isom}(E, E).}$$

Réponse

2) Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| \geq (1-k)\|x-y\|$.

Pour tous $x, y \in E$, on a $f(x) = x + \varphi(x)$ et $f(y) = y + \varphi(y)$, donc

$$\begin{aligned}\|x-y\| &= \|[f(x)-\varphi(x)] - [f(y)-\varphi(y)]\| \\ &= \|[f(x)-f(y)] - [\varphi(x)-\varphi(y)]\| \\ &\leq \|f(x)-f(y)\| + \|\varphi(x)-\varphi(y)\|.\end{aligned}$$

D'autre part, puisque l'application φ qui est différentiable sur E et vérifie

$$\|D\varphi(x)\| \leq k \quad \text{pour tout } x \in E$$

alors, d'après le T.A.F on a

$$\|\varphi(x)-\varphi(y)\| \leq k\|x-y\|, \quad \forall (x,y) \in E^2$$

Réponse

2) Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| \geq (1 - k)\|x - y\|$.
Pour tous $x, y \in E$, *on a* $f(x) = x + \varphi(x)$ *et* $f(y) = y + \varphi(y)$, *donc*

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|[f(x) - \varphi(x)] - [f(y) - \varphi(y)]\| \\ &= \|[f(x) - f(y)] - [\varphi(x) - \varphi(y)]\| \\ &\leq \|f(x) - f(y)\| + \|\varphi(x) - \varphi(y)\|. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque l'application φ *qui est différentiable sur* E *et vérifie*

$$\|D\varphi(x)\| \leq k \quad \text{pour tout } x \in E$$

alors, d'après le T.A.F on a

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq k\|x - y\|, \quad \forall (x, y) \in E^2$$

Réponse

2) Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| \geq (1-k)\|x-y\|$.

Pour tous $x, y \in E$, *on a* $f(x) = x + \varphi(x)$ *et* $f(y) = y + \varphi(y)$, *donc*

$$\begin{aligned} \|x-y\| &= \|[f(x)-\varphi(x)] - [f(y)-\varphi(y)]\| \\ &= \|[f(x)-f(y)] - [\varphi(x)-\varphi(y)]\| \\ &\leq \|f(x)-f(y)\| + \|\varphi(x)-\varphi(y)\|. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque l'application φ *qui est différentiable sur* E *et vérifie*

$$\|D\varphi(x)\| \leq k \quad \text{pour tout } x \in E$$

alors, d'après le T.A.F on a

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq k\|x-y\|, \quad \forall (x,y) \in E^2$$

Réponse

2) Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| \geq (1-k)\|x-y\|$.
Pour tous $x, y \in E$, on a $f(x) = x + \varphi(x)$ et $f(y) = y + \varphi(y)$, donc

$$\begin{aligned} \|x-y\| &= \|[f(x)-\varphi(x)] - [f(y)-\varphi(y)]\| \\ &= \|[f(x)-f(y)] - [\varphi(x)-\varphi(y)]\| \\ &\leq \|f(x)-f(y)\| + \|\varphi(x)-\varphi(y)\|. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque l'application φ qui est différentiable sur E et vérifie

$$\|D\varphi(x)\| \leq k \quad \text{pour tout } x \in E$$

alors, d'après le T.A.F on a

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq k\|x-y\|, \quad \forall (x,y) \in E^2$$

Réponse

Donc pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\| + \|\varphi(x)-\varphi(y)\| \leq \|f(x)-f(y)\| + k\|x-y\|$$

D'où

$$\boxed{(1-k)\|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\|, \quad \forall (x,y) \in E^2}$$

- ***En déduisant que** f **est injective.*** *Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors d'après l'inégalité précédente on a*

$$(1-k)\|x-y\| \leq 0$$

et comme $1-k>0$, on en déduit que

$$\|x-y\| \leq 0.$$

ce qui implique $x = y$. D'où f est injective.

Réponse

Donc pour tous $x, y \in E$, *on a*

$$\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| + \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \|f(x) - f(y)\| + k\|x - y\|$$

D'où

$$\boxed{(1 - k)\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|, \quad \forall (x, y) \in E^2}$$

- **En déduisant que** f **est injective.** *Soient* $x, y \in E$ *tels que* $f(x) = f(y)$. *Alors d'après l'inégalité précédente on a*

$$(1 - k)\|x - y\| \leq 0$$

et comme $1 - k > 0$, *on en déduit que*

$$\|x - y\| \leq 0.$$

ce qui implique $x = y$. *D'où* f *est injective.*

Réponse

Donc pour tous $x, y \in E$, *on a*

$$\|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\| + \|\varphi(x)-\varphi(y)\| \leq \|f(x)-f(y)\| + k\,\|x-y\|$$

D'où

$$\boxed{(1-k)\,\|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\|\,, \quad \forall\,(x,y)\in E^2}$$

- ***En déduisant que*** f ***est injective.*** *Soient* $x, y \in E$ *tels que* $f(x) = f(y)$. *Alors d'après l'inégalité précédente on a*

$$(1-k)\,\|x-y\| \leq 0$$

et comme $1-k>0$, *on en déduit que*

$$\|x-y\| \leq 0.$$

ce qui implique $x = y$. *D'où* f *est injective.*

Réponse

Donc pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\| + \|\varphi(x)-\varphi(y)\| \leq \|f(x)-f(y)\| + k\|x-y\|$$

D'où

$$\boxed{(1-k)\|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\|, \quad \forall (x,y) \in E^2}$$

- ***En déduisant que** f **est injective.*** *Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors d'après l'inégalité précédente on a*

$$(1-k)\|x-y\| \leq 0$$

et comme $1-k>0$, on en déduit que

$$\|x-y\| \leq 0.$$

ce qui implique $x = y$. D'où f est injective.

Réponse

Donc pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\| + \|\varphi(x)-\varphi(y)\| \leq \|f(x)-f(y)\| + k\,\|x-y\|$$

D'où

$$\boxed{(1-k)\,\|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\|\,, \quad \forall\,(x,y) \in E^2}$$

- ***En déduisant que** f **est injective.*** *Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors d'après l'inégalité précédente on a*

$$(1-k)\,\|x-y\| \leq 0$$

et comme $1-k > 0$, on en déduit que

$$\|x-y\| \leq 0.$$

ce qui implique $x = y$. D'où f est injective.

Réponse

- ***En déduisant que*** $\|f(x)\| \to +\infty$ ***quand*** $\|x\| \to +\infty$**.**

En appliquant l'inégalité précédente au couple $(x, 0)$ *, on obtient que*

$$\forall x \in E, \quad (1-k)\|x\| \leq \|f(x) - f(0)\| \leq \|f(x)\| + \|f(0)\| .$$

Donc

$$\forall x \in E, \quad \boxed{(1-k)\|x\| - \|f(0)\| \leq \|f(x)\| .}$$

Puisque $1 - k > 0$*, alors* $[(1-k)\|x\| - \|f(0)\|] \longrightarrow +\infty$ *quand* $\|x\| \to +\infty$*. Ceci implique que* $\|f(x)\| \to +\infty$ *quand* $\|x\| \to +\infty$*.*

Réponse

- ***En déduisant que*** $\|f(x)\| \to +\infty$ ***quand*** $\|x\| \to +\infty$.

En appliquant l'inégalité précédente au couple $(x, 0)$, *on obtient que*

$$\forall x \in E, \quad (1-k)\|x\| \leq \|f(x) - f(0)\| \leq \|f(x)\| + \|f(0)\|.$$

Donc

$$\forall x \in E, \quad \boxed{(1-k)\|x\| - \|f(0)\| \leq \|f(x)\|.}$$

Puisque $1-k > 0$, *alors* $[(1-k)\|x\| - \|f(0)\|] \longrightarrow +\infty$ *quand* $\|x\| \to +\infty$. *Ceci implique que* $\|f(x)\| \to +\infty$ *quand* $\|x\| \to +\infty$.

Réponse

- ***En déduisant que*** $\|f(x)\| \to +\infty$ ***quand*** $\|x\| \to +\infty$***.***

En appliquant l'inégalité précédente au couple $(x, 0)$, *on obtient que*

$$\forall x \in E, \quad (1-k)\|x\| \leq \|f(x) - f(0)\| \leq \|f(x)\| + \|f(0)\| .$$

Donc

$$\forall x \in E, \quad \boxed{(1-k)\|x\| - \|f(0)\| \leq \|f(x)\| .}$$

Puisque $1-k > 0$, *alors* $[(1-k)\|x\| - \|f(0)\|] \longrightarrow +\infty$ *quand* $\|x\| \to +\infty$. *Ceci implique que* $\|f(x)\| \to +\infty$ *quand* $\|x\| \to +\infty$.

Réponse

*3) **Montrons que** f **est un** C^1-**difféomorphisme de** E **sur** E.*
D'après les questions 1) et 2), l'application $f : E \to E$ satisfait les propriétés suivantes :

i) *f est de classe C^1 sur E ;*
ii) *pour tout $x \in E$, $Df(x) \in Isom(E, E)$;*
iii) *f est injective.*

Donc d'après le théorème d'inversion globale, l'application f est un C^1-difféomorphisme de E sur l'ouvert $f(E)$.
Il reste à montrer que $f(E) = E$, c'est–à-dire, f est surjective. Pour cela fixons $y_0 \in E$ et montons que l'équation suivante

$$f(x) = y_0$$

admet une solution dans E.

Réponse

Notons que

$$\begin{aligned} f(x) = y_0 &\Leftrightarrow x + \varphi(x) = y_0 \\ &\Leftrightarrow x = y_0 - \varphi(x) \\ &\Leftrightarrow g(x) = x, \end{aligned}$$

avec $g : E \to E$ *est l'application définie par*

$$g(x) = \varphi(x) - y_0, \quad \forall x \in E.$$

Donc il suffit de montrer que g *admet un point fixe dans* E. *Or pour tout* $(x, y) \in E^2$ *on a*

$$\|g(x) - g(y)\| = \|\varphi(x) - y_0 - \varphi(y) + y_0\| = \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Alors g *est contractante da rapport* $k < 1$. *Donc d'après le théorème de point fixe,* g *admet un point fixe et un seul dans* E.

Réponse

Autrement dit, l'équation suivante $f(x) = y_0$ *admet une solution et une seule dans* E. *Cela montre que* f *est bijective de* E *sur* E. *Par suite* f *est surjective, d'où* $f(E) = E$. *Par conséquent* f *est un* C^1-*difféomorphisme de* E *sur* E.

Plan

Exercice 3 (Fonctions strictement monotones)

Soit E un espace euclidien de dimension finie. On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Une application $f : E \longrightarrow E$ est dite strictement monotone s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x) - f(y), x - y\rangle \geq k \|x - y\|^2 . \tag{$*$}$$

1. *Soit $f : E \longrightarrow E$ une fonction différentiable. Montrer que f vérifie $(*)$ si et seulement si*

$$\forall x \in E,\ \forall h \in E, \quad \langle Df(x)(h), h\rangle \geq k \|h\|^2 . \tag{$**$}$$

2. *Si $f : E \longrightarrow E$ est de classe C^1 et si elle est strictement monotone, montrer que f est un C^1-difféomorphisme de E sur E.*

Réponse

1) Montrer que $(*) \Leftrightarrow (**)$.
$(\Rightarrow)$ *Supposons* f *vérifie* $(*)$ *et montrons* $(**)$. *Soient* $x \in E$ *et* $h \in E$.
Puisque f *est différentiable en* x*, alors*

$$Df(x)(h) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}. \tag{3.1}$$

En appliquant $(*)$ *au couple* $(x+th, x)$*, on obtient*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \langle f(x+th) - f(x), th \rangle \geq k \|th\|^2 = k\, t^2 \|h\|^2$$

Donc,

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \left\langle \frac{f(x+th) - f(x)}{t}, h \right\rangle \geq k \|h\|^2$$

En faisant tendre t *vers 0, en utilisant la relation (3.1) et la continuité du produit scalaire, on obtient :*

Réponse

$$\langle Df(x)(h), h\rangle \geq k\,\|h\|^2 .$$

D'où $(**)$.
$(\Leftarrow)$ *Supposons* f *vérifie* $(**)$ *et montrons* $(*)$. *Soit* $(x, y) \in E^2$.
Posons $h = x - y$, *et considérons la fonction* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$g(t) = \langle f(y + th), h\rangle$$

Puisque f *est différentiable sur* E, *la fonction* g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et on a d'après l'hypothèse* $(**)$

$$g'(t) = \langle Df(y + th)(h), h\rangle \geq k\,\|h\|^2 , \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En particulier, la fonction g *est continue sur* $[0, 1]$, *dérivable sur* $]0, 1[$.
Donc d'après le T.A.F classique, il existe $c \in]0, 1[$ *tel que*

$$g(1) - g(0) = g'(c) \geq k\,\|h\|^2 .$$

Réponse

C'est-à-dire,

$$\langle f(y+h), h\rangle - \langle f(y), h\rangle \geq k\,\|h\|^2 .$$

Ou encore,

$$\langle f(y+h) - f(y), h\rangle \geq k\,\|h\|^2 .$$

D'où $(*)$ *en remplaçant* h *par* $x-y$ *:*

$$\langle f(x) - f(y), x-y\rangle \geq k\,\|x-y\|^2 .$$

Par conséquent $(*) \Leftrightarrow (**)$.

Réponse

2) Soit $f : E \longrightarrow E$ une application de classe C^1. Supposons f vérifie $(*)$, donc aussi $(**)$.
Montrons que f est un C^1-difféomorphisme de E sur E.
On a :

i) *f est de classe C^1 sur E (par hypothèse).*
ii) *Pour tout $x \in E$, $Df(x) \in Isom(E, E)$.*
iii) *f est injective.*

En effet,
***ii).** Pour chaque $x \in E$, l'application $Df(x) \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme de E **qui est de dimension finie**. Donc pour montrer que $Df(x)$ est bijective, il suffit de montrer que $Df(x)$ est injective.*

Réponse

Soit donc $h \in E$ *tel que* $Df(x)(h) = 0$. *On a d'après* $(**)$,

$$0 = \langle Df(x)(h), h\rangle \geq k \|h\|^2$$

et comme $k > 0$, *on en déduit que* $\|h\| = 0$, *donc* $h = 0$. *D'où* $Df(x)$ *est injective. Par suite* $Df(x)$ *est bijective, d'où* $Df(x) \in Isom(E, E)$.

iii). *Soit* $(x, y) \in E^2$ *tel que* $f(x) = f(y)$. *Alors* $(*)$ *implique*

$$0 = \langle 0, x - y\rangle \geq k \|x - y\|^2$$

et comme $k > 0$, *on en déduit que* $\|x - y\| = 0$, *donc* $x = y$.

Donc d'après le théorème d'inversion globale, l'application f *est un* C^1-*difféomorphisme de* E *sur l'ouvert* $f(E)$.

Réponse

Soit donc $h \in E$ *tel que* $Df(x)(h) = 0$. *On a d'après* $(**)$,

$$0 = \langle Df(x)(h), h\rangle \geq k\|h\|^2$$

et comme $k > 0$, *on en déduit que* $\|h\| = 0$, *donc* $h = 0$. *D'où* $Df(x)$ *est injective. Par suite* $Df(x)$ *est bijective, d'où* $Df(x) \in Isom(E, E)$.
iii). *Soit* $(x, y) \in E^2$ *tel que* $f(x) = f(y)$. *Alors* $(*)$ *implique*

$$0 = \langle 0, x - y\rangle \geq k\|x - y\|^2$$

et comme $k > 0$, *on en déduit que* $\|x - y\| = 0$, *donc* $x = y$.
Donc d'après le théorème d'inversion globale, l'application f *est un* C^1-*difféomorphisme de* E *sur l'ouvert* $f(E)$.

Réponse

*Il reste à montrer que $f(E) = E$. Pour cela nous allons utiliser un argument de connexité. Sachant que E est **connexe** (c'est un e.v.n) et que $f(E)$ est une partie **non vide** de E. Alors pour montrer que $f(E) = E$, il suffit de montrer que $f(E)$ est à la fois **ouvert et fermé** dans E. On sait déjà que $f(E)$ est ouvert (d'après i) et ii)).*
Pour montrer que $f(E)$ est fermé, remarquons d'abord que d'après $(*)$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad k \|x - y\|^2 \leq \langle f(x) - f(y), x - y\rangle \leq \|f(x) - f(y)\| \cdot \|x - y\|$$

donc

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x - y\| \leq \frac{1}{k} \|f(x) - f(y)\| .} \tag{3.2}$$

Considérons maintenant une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $f(E)$ telle que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y dans E. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in E$ tel que $y_n = f(x_n)$.

Réponse

D'après (3.2), *on a*

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{k}\|f(x_n) - f(x_m)\| = \frac{1}{k}\|y_n - y_m\|, \quad \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$$

Et puisque $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy dans* E *(car elle est convergente), on en déduit que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy dans* E*, donc converge. Si on note* x *sa limite, on a alors*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} y_n = y.$$

Ainsi, $y = f(x) \in f(E)$. *Donc* $f(E)$ *est fermé.*
Par conséquent $f(E) = E$ *et* f *est un* C^1-*difféomorphisme de* E *sur* E.

Plan

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *l'application définie par*

$$f(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right)$$

1. *Montrer qu'en tout point de* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*,* f *est un* C^1-*difféomorphisme local.*
2. *L'application* f *est-elle un* C^1-*difféomorphisme global ?.*

Réponse

1) ***Montrons qu'en tout point de*** $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$***,*** f ***est un*** C^1-***difféomorphisme local.*** *Vérifions d'abord que l'application* f *est de classe* C^1 *sur l'ouvert* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *,*

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *l'application définie par*

$$f(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right)$$

1. *Montrer qu'en tout point de* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f *est un* C^1-*difféomorphisme local.*
2. *L'application* f *est-elle un* C^1-*difféomorphisme global ?.*

Réponse

1) ***Montrons qu'en tout point de*** $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f ***est un*** C^1-***difféomorphisme local.*** *Vérifions d'abord que l'application* f *est de classe* C^1 *sur l'ouvert* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *,*

Réponse

L'application f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, car ses deux composantes

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 - y^2 \end{array}$$

et

$$f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2xy \end{array}$$

le sont. En effet, les dérivées partielles de f_1 et f_2 existent

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) &= 2x; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -2y \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) &= 2y; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 2x. \end{aligned}$$

et sont continues.

Réponse

Considérons maintenant, un point (a, b) *quelconque de l'ouvert* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *Le jacobien de* f *en ce point est égal*

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a,b) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 2a & -2b \\ 2b & 2a \end{array} \right| = 4\left(a^2+b^2\right) \neq 0$$

Donc, d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert V *de* (a, b) *dans* $\mathbb{R}^2$ *(*$V \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*) et il existe un voisinage ouvert* W *de* $f(a, b)$ *dans* $\mathbb{R}^2$*, tel que la restriction de* f *à* V *soit un* C^1-*difféomorphisme de* V *sur* W. *Autrement dit,* f *est un* C^1-*difféomorphisme local en* (a, b).

2) **L'application** f **est-elle un** C^1-**difféomorphisme global ?.**

Puisque $f(-1,-1) = f(1,1)$*, l'application* f *n'est donc pas injective, et donc ce n'est pas un* C^1-*difféomorphisme global.*

Réponse

Considérons maintenant, un point (a, b) quelconque de l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Le jacobien de f en ce point est égal

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a,b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & -2b \\ 2b & 2a \end{vmatrix} = 4\left(a^2+b^2\right) \neq 0$$

Donc, d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert V de (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ ($V \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) et il existe un voisinage ouvert W de $f(a, b)$ dans $\mathbb{R}^2$, tel que la restriction de f à V soit un C^1-difféomorphisme de V sur W. Autrement dit, f est un C^1-difféomorphisme local en (a, b).

*2) **L'application** f **est-elle un** C^1-**difféomorphisme global ?.***

Puisque $f(-1,-1) = f(1,1)$, l'application f n'est donc pas injective, et donc ce n'est pas un C^1-difféomorphisme global.

Plan

Exercice 5

Soit E un espace de Banach, et soit $\mathscr{L}(E)$ l'espace des endomorphismes continus de E.

1. *Montrer que l'application*

$$\begin{array}{rccc} \psi : & E \times \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & E \times \mathscr{L}(E) \\ & (x, f) & \longmapsto & (f(x), f) \end{array}$$

   est de classe C^1, et calculer $D\psi(x, f)$ pour tout $(x, f) \in E \times \mathscr{L}(E)$.

2. *Montrer que ψ est un C^1-difféomorphisme local en $(0, I)$, où $I = \mathrm{id}_E$.*

Réponse

*1) **Montrons que** ψ **est de classe** C^1**, et calculons** $D\psi(x,f)$ **pour tout** $(x,f) \in E \times \mathscr{L}(E)$.*

L'application ψ est de classe C^1 car ses deux composantes

$$\begin{array}{rccc} \psi_1 : & E \times \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & E \\ & (x,f) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \psi_2 : & E \times \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ & (x,f) & \longmapsto & f \end{array}$$

le sont. En effet :

*- la première composante ψ_1 est une application **bilinéaire continue** car pour tous $x, y \in E$ et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ et pour tout scalaire λ on a :*

Réponse

$$\psi_1(x+\lambda y, f) = f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y) = \psi_1(x, f) + \lambda \psi_1(y, f)$$

et

$$\psi_1(x, f+\lambda g) = (f+\lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x) = \psi_1(x, f) + \lambda \psi_1(x, g)$$

De plus,

$$\|\psi_1(x, f)\| = \|f(x)\| \leq \|x\| \cdot \|f\|, \quad \forall x \in E, \forall f \in \mathscr{L}(E).$$

Donc ψ_1 *est de classe* C^1 *sur* $E \times \mathscr{L}(E)$*, et sa différentielle en tout point* $(x, f) \in E \times \mathscr{L}(E)$ *a pour expression :*

$$\boxed{D\psi_1(x, f)(y, g) = \psi_1(y, f) + \psi_1(x, g) = f(y) + g(x)} \forall (y, g) \in E \times \mathscr{L}(E$$

Réponse

$$\psi_1(x+\lambda y, f) = f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y) = \psi_1(x,f) + \lambda\psi_1(y,f)$$

et

$$\psi_1(x, f+\lambda g) = (f+\lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x) = \psi_1(x,f) + \lambda\psi_1(x,g)$$

De plus,

$$\|\psi_1(x,f)\| = \|f(x)\| \leq \|x\| \cdot \|f\|, \quad \forall x \in E, \forall f \in \mathscr{L}(E).$$

Donc ψ_1 est de classe C^1 sur $E \times \mathscr{L}(E)$, et sa différentielle en tout point $(x,f) \in E \times \mathscr{L}(E)$ a pour expression :

$$\boxed{D\psi_1(x,f)(y,g) = \psi_1(y,f) + \psi_1(x,g) = f(y) + g(x)} \; \forall (y,g) \in E \times \mathscr{L}(E$$

Réponse

$$\psi_1(x+\lambda y, f) = f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y) = \psi_1(x,f) + \lambda\psi_1(y,f)$$

et

$$\psi_1(x, f+\lambda g) = (f+\lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x) = \psi_1(x,f) + \lambda\psi_1(x,g)$$

De plus,

$$\|\psi_1(x,f)\| = \|f(x)\| \leq \|x\| \cdot \|f\|, \quad \forall x \in E, \forall f \in \mathscr{L}(E).$$

Donc ψ_1 *est de classe* C^1 *sur* $E \times \mathscr{L}(E)$*, et sa différentielle en tout point* $(x,f) \in E \times \mathscr{L}(E)$ *a pour expression :*

$$\boxed{D\psi_1(x,f)(y,g) = \psi_1(y,f) + \psi_1(x,g) = f(y) + g(x)} \forall (y,g) \in E \times \mathscr{L}(E$$

Réponse

*- la deuxième composante ψ_2 est la projection canonique de $E \times \mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{L}(E)$, donc elle est **linéaire continue**. D'où ψ_2 est de classe C^1 sur $E \times \mathscr{L}(E)$, et sa différentielle en tout point $(x, f) \in E \times \mathscr{L}(E)$ a pour expression :*

$$\boxed{D\psi_2\,(x, f)\,(y, g) = \psi_2\,(y, g) = g} \quad \forall\,(y, g) \in E \times \mathscr{L}(E).$$

L'application ψ est donc de classe C^1 sur $E \times \mathscr{L}(E)$, et sa différentielle en tout point $(x, f) \in E \times \mathscr{L}(E)$ a pour expression :

$$D\psi\,(x, f)\,(y, g) = \left(D\psi_1\,(x, f)\,(y, g)\,, D\psi_2\,(x, f)\,(y, g)\right), \quad \forall\,(y, g) \in E \times \mathscr{L}(E)$$

C'est-à-dire,

$$\boxed{D\psi\,(x, f)\,(y, g) = (f\,(y) + g\,(x)\,, g)} \quad \forall\,(y, g) \in E \times \mathscr{L}(E).$$

Réponse

*- la deuxième composante ψ_2 est la projection canonique de $E \times \mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{L}(E)$, donc elle est **linéaire continue**. D'où ψ_2 est de classe C^1 sur $E \times \mathscr{L}(E)$, et sa différentielle en tout point $(x, f) \in E \times \mathscr{L}(E)$ a pour expression :*

$$\boxed{D\psi_2 (x, f) (y, g) = \psi_2 (y, g) = g} \quad \forall (y, g) \in E \times \mathscr{L}(E).$$

L'application ψ est donc de classe C^1 sur $E \times \mathscr{L}(E)$, et sa différentielle en tout point $(x, f) \in E \times \mathscr{L}(E)$ a pour expression :

$$D\psi (x, f) (y, g) = (D\psi_1 (x, f) (y, g), D\psi_2 (x, f) (y, g)), \quad \forall (y, g) \in E \times \mathscr{L}(E$$

C'est-à-dire,

$$\boxed{D\psi (x, f) (y, g) = (f (y) + g (x), g)} \quad \forall (y, g) \in E \times \mathscr{L}(E).$$

Réponse

2) ***Montrons que*** ψ ***est un*** C^1-***difféomorphisme local en*** $(0, I)$***, où*** $I = \mathrm{id}_E$***.***

D'après 1) l'application ψ *est de classe* C^1 *sur* $E \times \mathscr{L}(E)$*, et sa différentielle au point* $(0, I) \in E \times \mathscr{L}(E)$ *a pour expression :*

$$D\psi(0, I)(y, g) = (\mathrm{id}_E(y) + g(0), g) = (y, g), \quad \forall (y, g) \in E \times \mathscr{L}(E).$$

Donc

$$\boxed{D\psi(0, I) = \mathrm{id}_{E\times\mathscr{L}(E)}} \in \mathrm{Isom}(E \times \mathscr{L}(E), E \times \mathscr{L}(E)).$$

Sachant que $E \times \mathscr{L}(E)$ *est un espace de Banach (car* E *est un espace de Banach). Donc d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert* V *de* $(0, I)$ *dans* $E \times \mathscr{L}(E)$ *et il existe un voisinage ouvert* W *de* $\psi(0, I) = (0, I)$ *dans* $E \times \mathscr{L}(E)$ *tel que la restriction de* ψ *à* V *est un* C^1-*difféomorphisme de* V *sur* W*.*
Autrement dit, ψ *est un* C^1-*difféomorphisme local en* $(0, I)$*.*

Réponse

2) ***Montrons que*** ψ ***est un*** C^1-***difféomorphisme local en*** $(0, I)$***, où*** $I = \mathrm{id}_E$***.***

D'après 1) l'application ψ *est de classe* C^1 *sur* $E \times \mathscr{L}(E)$*, et sa différentielle au point* $(0, I) \in E \times \mathscr{L}(E)$ *a pour expression :*

$$D\psi(0, I)(y, g) = (\mathrm{id}_E(y) + g(0), g) = (y, g), \quad \forall (y, g) \in E \times \mathscr{L}(E).$$

Donc

$$\boxed{D\psi(0, I) = \mathrm{id}_{E \times \mathscr{L}(E)}} \in \mathrm{Isom}(E \times \mathscr{L}(E), E \times \mathscr{L}(E)).$$

Sachant que $E \times \mathscr{L}(E)$ *est un espace de Banach (car* E *est un espace de Banach). Donc d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert* V *de* $(0, I)$ *dans* $E \times \mathscr{L}(E)$ *et il existe un voisinage ouvert* W *de* $\psi(0, I) = (0, I)$ *dans* $E \times \mathscr{L}(E)$ *tel que la restriction de* ψ *à* V *est un* C^1-*difféomorphisme de* V *sur* W*. Autrement dit,* ψ *est un* C^1-*difféomorphisme local en* $(0, I)$*.*

Réponse

2) ***Montrons que*** ψ ***est un*** C^1-***difféomorphisme local en*** $(0, I)$***, où*** $I = \mathrm{id}_E$.

D'après 1) l'application ψ *est de classe* C^1 *sur* $E \times \mathscr{L}(E)$*, et sa différentielle au point* $(0, I) \in E \times \mathscr{L}(E)$ *a pour expression :*

$$D\psi\,(0, I)\,(y, g) = (\mathrm{id}_E\,(y) + g\,(0)\,, g) = (y, g)\,, \quad \forall\,(y, g) \in E \times \mathscr{L}(E).$$

Donc

$$\boxed{D\psi\,(0, I) = \mathrm{id}_{E\times\mathscr{L}(E)}} \in \mathrm{Isom}\,(E \times \mathscr{L}(E), E \times \mathscr{L}(E))\,.$$

Sachant que $E \times \mathscr{L}(E)$ *est un espace de Banach (car* E *est un espace de Banach). Donc d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert* V *de* $(0, I)$ *dans* $E \times \mathscr{L}(E)$ *et il existe un voisinage ouvert* W *de* $\psi\,(0, I) = (0, I)$ *dans* $E \times \mathscr{L}(E)$ *tel que la restriction de* ψ *à* V *est un* C^1-*difféomorphisme de* V *sur* W*.*
Autrement dit, ψ *est un* C^1-*difféomorphisme local en* $(0, I)$*.*

Plan

Exercice 6

Montrer que l'équation

$$z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} = \cos(x - y + z)$$

définit au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^3$ implicitement une fonction $z = \varphi(x, y)$ de classe C^1 sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^2$. Calculer les deux dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0)$.

Réponse

- L'équation

$$z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} = \cos(x - y + z)$$

s'écrit aussi sous la forme $f(x, y, z) = 0$
avec $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$f(x, y, z) = z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} - \cos(x - y + z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 6

Montrer que l'équation

$$z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} = \cos(x - y + z)$$

définit au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^3$ *implicitement une fonction* $z = \varphi(x, y)$ *de classe* C^1 *sur un voisinage de l'origine de* $\mathbb{R}^2$. *Calculer les deux dérivées partielles* $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0)$ *et* $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0)$.

Réponse

- L'équation

$$z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} = \cos(x - y + z)$$

s'écrit aussi sous la forme $f(x, y, z) = 0$
avec $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *est la fonction définie par*

$$f(x, y, z) = z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} - \cos(x - y + z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Réponse

La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$, car ses dérivées partielles existent sur $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= -e^{z-x-y^2} + \sin(x-y+z) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= -2ye^{z-x-y^2} - \sin(x-y+z) \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 3z^2 + 2 + e^{z-x-y^2} + \sin(x-y+z)
\end{aligned}$$

et sont continues. De plus, on a

$$f(0,0,0) = 0 + e^0 - \cos 0 = 1 - 1 = 0.$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 0 + 2 + e^0 + \sin(0) = 3 \neq 0.$$

Réponse

La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$, car ses dérivées partielles existent sur $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= -e^{z-x-y^2} + \sin(x-y+z) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= -2ye^{z-x-y^2} - \sin(x-y+z) \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 3z^2 + 2 + e^{z-x-y^2} + \sin(x-y+z)
\end{aligned}$$

et sont continues. De plus, on a

$$f(0,0,0) = 0 + e^0 - \cos 0 = 1 - 1 = 0.$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 0 + 2 + e^0 + \sin(0) = 3 \neq 0.$$

Réponse

Donc d'après le théorème de fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert V de $(0,0,0)$ dans $\mathbb{R}^3$, un voisinage ouvert W de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une fonction $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \varphi(x,y)$ de classe C^1 tel que

$$(x,y,z) \in V \text{ et } f(x,y,z) = 0$$

est équivalente à

$$(x,y) \in W \text{ et } z = \varphi(x,y)$$

- ***Calcul des dérivées partielles** $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)$ **et** $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)$. D'après les formules de cours on a*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)} = \frac{-(-1)}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)} = \boxed{0}.$$

Réponse

Donc d'après le théorème de fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert V de $(0,0,0)$ dans $\mathbb{R}^3$, un voisinage ouvert W de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une fonction $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \varphi(x,y)$ de classe C^1 tel que

$$(x,y,z) \in V \text{ et } f(x,y,z) = 0$$

est équivalente à

$$(x,y) \in W \text{ et } z = \varphi(x,y)$$

- ***Calcul des dérivées partielles** $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)$ **et** $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)$**.** D'après les formules de cours on a*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)} = \frac{-(-1)}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)} = \boxed{0}.$$

Plan

Exercice 7

On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^2yz + 2y + z\sqrt{1+x} = 0 \\ e^x - e^y + \sin(z) = 0 \end{cases}$$

Montrer qu'au voisinage de $(0,0,0)$ *les solutions de ce système sont de la forme* $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$*, où* φ_1 *et* φ_2 *sont deux fonctions numériques de classe* C^1 *sur un voisinage ouvert de* 0*.*
Calculer $\varphi_1'(0)$ *et* $\varphi_2'(0)$*.*

Réponse

- Le système

$$\begin{cases} x^2yz + 2y + z\sqrt{1+x} = 0 \\ e^x - e^y + \sin(z) = 0 \end{cases}$$

s'écrit aussi sous la forme $f(x,y,z) = (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}$

Exercice 7

On considère le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x^2yz + 2y + z\sqrt{1+x} = 0 \\ e^x - e^y + \sin(z) = 0 \end{array}\right.$$

Montrer qu'au voisinage de $(0,0,0)$ *les solutions de ce système sont de la forme* $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$*, où* φ_1 *et* φ_2 *sont deux fonctions numériques de classe* C^1 *sur un voisinage ouvert de* 0*.*
Calculer $\varphi_1'(0)$ *et* $\varphi_2'(0)$*.*

Réponse

- Le système

$$\left\{\begin{array}{l} x^2yz + 2y + z\sqrt{1+x} = 0 \\ e^x - e^y + \sin(z) = 0 \end{array}\right.$$

s'écrit aussi sous la forme $f(x,y,z) = (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}$

Réponse

avec $f :]-1,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ *est la fonction définie par*

$$f(x,y,z)=\left(x^2yz+2y+z\sqrt{1+x},\ e^x-e^y+\sin(z)\right).$$

La fonction f *est de classe* C^1 *sur l'ouvert* $]-1,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, *car ses deux composantes*

$$\begin{array}{rccl} f_1: &]-1,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x^2yz+2y+z\sqrt{1+x} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} f_2: &]-1,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & e^x-e^y+\sin(z) \end{array}$$

le sont. En effet, les dérivées partielles de f_1 *et* f_2 *existent sur* $]-1,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *:*

Réponse

avec $f :]-1,+\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *est la fonction définie par*

$$f(x,y,z) = \left(x^2yz + 2y + z\sqrt{1+x},\; e^x - e^y + \sin(z)\right).$$

La fonction f *est de classe* C^1 *sur l'ouvert* $]-1,+\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *car ses deux composantes*

$$\begin{array}{rccc} f_1 : &]-1,+\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x^2yz + 2y + z\sqrt{1+x} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} f_2 : &]-1,+\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & e^x - e^y + \sin(z) \end{array}$$

le sont. En effet, les dérivées partielles de f_1 *et* f_2 *existent sur* $]-1,+\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *:*

Réponse

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) &= 2xyz + \frac{z}{2\sqrt{1+x}} \\
\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) &= x^2 z + 2 \\
\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) &= x^2 y + \sqrt{1+x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) &= e^x \\
\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) &= -e^y \\
\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) &= \cos(z)
\end{aligned}$$

et sont continues.

Réponse

De plus, on a

$$f(0,0,0) = (f_1(0,0,0), f_2(0,0,0)) = (0,0).$$

et

$$\begin{aligned} \frac{D(f_1,f_2)}{D(y,z)}(0,0,0) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(0,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(0,0,0) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0. \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert V de $(0,0,0)$ dans $\mathbb{R}^3$ ($V \subset]-1,+\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$), un voisinage ouvert W de 0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ de classe C^1 tel que

Réponse

De plus, on a

$$f(0,0,0) = (f_1(0,0,0), f_2(0,0,0)) = (0,0).$$

et

$$\begin{aligned}\frac{D(f_1,f_2)}{D(y,z)}(0,0,0) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(0,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(0,0,0) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.\end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert V de $(0,0,0)$ dans $\mathbb{R}^3$ ($V \subset]-1,+\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$), un voisinage ouvert W de 0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ de classe C^1 tel que

Réponse

De plus, on a

$$f(0,0,0) = (f_1(0,0,0), f_2(0,0,0)) = (0,0).$$

et

$$\begin{aligned}\frac{D(f_1,f_2)}{D(y,z)}(0,0,0) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(0,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(0,0,0) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.\end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert V de $(0,0,0)$ dans $\mathbb{R}^3$ ($V \subset]-1,+\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$), un voisinage ouvert W de 0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ de classe C^1 tel que

Réponse

$$\begin{cases} (x,y,z) \in V \\ f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

est équivalent à

$$\begin{cases} x \in W \\ y = \varphi_1(x) \\ z = \varphi_2(x) \end{cases}$$

Autrement dit, les solutions de ce système sur le voisinage ouvert V de $(0,0,0)$ sont de la forme $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$, $x \in W$ avec $\varphi_1 : W \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi_2 : W \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur le voisinage ouvert W de 0.
Calcul de $\varphi_1'(0)$ et $\varphi_2'(0)$. *D'après la formule de cours on a*

Réponse

$$\begin{cases} (x,y,z) \in V \\ f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

est équivalent à

$$\begin{cases} x \in W \\ y = \varphi_1(x) \\ z = \varphi_2(x) \end{cases}$$

Autrement dit, les solutions de ce système sur le voisinage ouvert V de $(0,0,0)$ sont de la forme $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$, $x \in W$ avec $\varphi_1 : W \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi_2 : W \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur le voisinage ouvert W de 0.

Calcul de $\varphi_1'(0)$ et $\varphi_2'(0)$. *D'après la formule de cours on a*

Réponse

$$\begin{cases} (x,y,z)\in V \\ f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

est équivalent à

$$\begin{cases} x\in W \\ y=\varphi_1(x) \\ z=\varphi_2(x) \end{cases}$$

Autrement dit, les solutions de ce système sur le voisinage ouvert V de $(0,0,0)$ sont de la forme $(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x))$, $x\in W$ avec $\varphi_1 : W \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi_2 : W \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur le voisinage ouvert W de 0.
Calcul de $\varphi_1'(0)$ et $\varphi_2'(0)$. *D'après la formule de cours on a*

Réponse

$$\begin{pmatrix} \varphi_1'(0) \\ \varphi_2'(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(0,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(0,0,0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0,0) \end{pmatrix}$$

$$= = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1'(0) \\ \varphi_2'(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} 2\varphi_1'(0) + \varphi_2'(0) = 0 \\ -\varphi_1'(0) + \varphi_2'(0) = -1 \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_1'(0) = \frac{1}{3} \\ \varphi_2'(0) = -\frac{2}{3} \end{cases}}$$

Réponse

$$\begin{pmatrix} \varphi_1'(0) \\ \varphi_2'(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(0,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(0,0,0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0,0) \end{pmatrix}$$

$$= = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1'(0) \\ \varphi_2'(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} 2\varphi_1'(0) + \varphi_2'(0) = 0 \\ -\varphi_1'(0) + \varphi_2'(0) = -1 \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_1'(0) = \frac{1}{3} \\ \varphi_2'(0) = -\frac{2}{3} \end{cases}}$$