Université Moulay-Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable : Prof. A. Sadrati

Année universitaire 2016-2017
Section : MIP S2
Module : M 124

EXAMEN D'ALGÈBRE - 19 JUIN 2017

Durée : 2h

Le sujet comporte 2 pages. L'épreuve dure 2 heures. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdis.

Exercice 1 : (6 pts)

Soit q_n la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$q_n(x) = x_1^2 + 2\sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$$

avec $n \geq 3$.

1) Donner la matrice de q_n dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   On prendra dans toute la suite $n = 3$, et on écrira $q = q_3$.
2) Vérifier que, pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,
   $$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$
3) Réduire, en utilisant la méthode de Gauss, la forme quadratique q.
4) En déduire le rang et la signature de q.
5) Déterminer une base orthogonale de q.
6) Écrire la matrice de q dans cette base.

Exercice 2 : (4 pts)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et on considère le déterminant d'ordre $n \geq 2$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & & & . \\ . & . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha & \alpha & . & . & . & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

1) Calculer Δ_2 et Δ_3.
2) Trouver une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1}.
3) En déduire la valeur de Δ_n.

Exercice 3 : (10 pts)

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ et

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice d'un endomorphisme f de E dans la base B.

1) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2) Montrer que la famille $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, avec $e'_1 = (1, 0, -1), e'_2 = (0, 1, -1)$ et $e'_3 = (0, 1, 1)$, est une base de E.

3) Écrire la matrice D de f dans la base B'.

4) déterminer la matrice de passage P de la base B à la base B' et calculer P^{-1}.
Pour toute matrice carrée M d'ordre 3, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$T_n(M) = I_3 + \frac{1}{1!}M + \frac{1}{2!}M^2 + \ldots + \frac{1}{n!}M^n.$$

5) Montrer que $T_n(A) = PT_n(D)P^{-1}$.

6) Calculer $T_n(D)$ sous forme matricielle, puis calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} T_n(D)$.

7) En déduire $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} T_n(A)$.

Indications

- On rappelle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n\right) = e^x$.
- Si $M_n = \left(a_{ij}^n\right)$ est une suite de matrices dépendant de n, on définit $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} M_n$ comme étant la matrice $\left(\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_{ij}^n\right)$.
- La matrice $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} T_n(M)$ s'appelle l'exponentielle de la matrice M.

Correction de l'examen d'algèbre 2

- Juin 2017 -

Exercice 1.

1) Donner la matrice de q_n dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

La forme polaire associée à q_n est définie par, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_n(x,y) = x_1 y_1 + 2\sum_{i=2}^{n-1} x_i y_i + 2 \sum_{1\leq i\neq j\leq n} \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$$

$$= x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n-1} 2x_i y_i + 0 x_n y_n + \sum_{1\leq i\neq j\leq n} (x_i y_j + x_j y_i)$$

Ainsi, la matrice de φ_n (ou de q_n) est donnée par:

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

2) pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ $(n=3)$,

$$q(x) = x_1^2 + 2\sum_{i=2}^{3-1} x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq 3} x_i x_j$$

$$= x_1^2 + 2x_2^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

$$= x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

3) $q(x) = x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + 2x_2^2 + 2x_2x_3$

$= (x_1+x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3$

$= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 - x_3^2$

4) $\text{rang}(q) = 3$ et $\text{sign}(q) = (2,1)$.

5) on pose $\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = x_1' \\ x_2 = x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$

on obtient $\begin{cases} x_1 = x_1' - x_2' - x_3' \\ x_2 = x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$

La forme matricielle du système est :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}.$$

$$X = P \quad X'$$

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique à la base orthogonale (c'est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base orthogonale dans la base canonique).

Donc, la base orthogonale pour q est :

$B = \{(1,0,0), (-1,1,0), (-1,0,1)\}$.

6) La matrice de q dans la base orthogonale est :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les coefficients des carrés dans la forme réduite de q.

[On peut vérifier que $M' = {}^tP\,M\,P$, avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$]

Exercice 2

1) $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 - C_1 & C_3 - C_1 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 0} \\ \alpha \quad 1-\alpha \quad 1-\alpha \\ \alpha \quad 0 \quad 1-\alpha \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\alpha & 1-\alpha \\ 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} = (1-\alpha)^2.$$

2) $$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 - C_1 & C_3 & \cdots & C_n \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha & 1-\alpha & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \alpha & \ddots & \vdots \\ \alpha & 0 & \alpha & \cdots \alpha & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (1-\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha & 1 & & \vdots \\ \alpha & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ \alpha & \cdots & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \underline{(1-\alpha)\,\Delta_{n-1}}$$

Ainsi, $\Delta_n = (1-\alpha)\Delta_{n-1}$, $\forall n \geq 2$.

3) $\Delta_n = (1-\alpha)\Delta_{n-1} = (1-\alpha)(1-\alpha)\Delta_{n-2} = (1-\alpha)^2\Delta_{n-2}$

$\Delta_n = (1-\alpha)^3\Delta_{n-3} = \cdots = (1-\alpha)^{n-2}\Delta_{n-(n-2)}$

$\Delta_n = (1-\alpha)^{n-2}\Delta_2 = (1-\alpha)^{n-1}$.

[On a utilisé la question 2].

Exercice 3

1) On calcule le polynome caractéristique de A.

$$C_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -2-X & 0 & 0 \\ 3 & 1-X & 3 \\ 3 & 3 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= -(2+X)\begin{vmatrix} 1-X & 3 \\ 3 & 1-X \end{vmatrix} = -(2+X)\left[(1-X)^2-9\right]$$

$$= -(2+X)(1-X-3)(1-X+3)$$

$$= -(2+X)^2(X-4)$$

$C_A(X)$ est scindé et les valeurs propres de A sont -2 double et 4 simple.

Donc, A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_{-2}) = 2$:

[La valeur propre 4 est simple, donc $\dim(E_4) = 1$, d'après le cours].

On détermine E_{-2} :

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} = \ker(A + 2I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 0y + 0z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x + y + z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -y - z.$

Donc $E_{-2} = \{(-y-z, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$.

$= \{ y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \}$

E_{-2} est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

V_1 et V_2 sont libre car $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

par conséquent, $\dim(E_{-2}) = 2$ et A est diagonalisable.

2) Montrons que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\mathrm{card}(B') = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc il suffit de montrer que B' est libre.

$\det(B') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$

Donc $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est libre.

D'où, B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) Écrire la matrice D de f dans B'.

D est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des images par f des vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 dans B'.

$$f(e'_1) = A \cdot e'_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= -2 e'_1 = -2 e'_1 + 0 e'_2 + 0 e'_3$$

$$f(e'_2) = A \cdot e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 e'_2$$

$$f(e'_3) = A \cdot e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot e'_3$$

par conséquent, $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

4) La matrice de passage de B à B' est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de B' dans B.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\, {}^t\mathrm{Com}(P)$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5) La formule de changement de base est :

$A = P D P^{-1}$, de plus

$$A^n = P D P^{-1} P D P^{-1} \ldots P D P^{-1} = P D^n P^{-1}$$

$$T_n(A) = T_n(PDP^{-1}) = I_3 + \frac{1}{1!}PDP^{-1} + \frac{1}{2!}PD^2P^{-1} + \dots + \frac{1}{n!}PD^nP^{-1}$$

$$= PI_3P^{-1} + P\frac{1}{1!}DP^{-1} + P\frac{1}{2!}D^2P^{-1} + \dots + P\frac{1}{n!}D^nP^{-1}$$

$$= P\left(I_3 + \frac{1}{1!}D + \frac{1}{2!}D^2 + \dots + \frac{1}{n!}D^n\right)P^{-1}$$

$$= P\,T_n(D)\,P^{-1}.$$

6) $T_n(D) = I_3 + \frac{1}{1!}D + \frac{1}{2!}D^2 + \dots + \frac{1}{n!}D^n$

Or, $\forall k \in \mathbb{N}$, $D^k = \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix}$. Donc

$$T_n(D) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{1!}(-2) + \frac{1}{2!}(-2)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}4^k \end{pmatrix}$$

Comme $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{(-2)}{1!} + \frac{(-2)^2}{2} + \dots + \frac{(-2)^n}{n!}\right) = e^{-2}$

$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \dots + \frac{4^n}{n!}\right) = e^4$,

alors $\lim_{n\to\infty} T_n(D) = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix}$

7) $\lim_{n\to\infty} T_n(A) = \lim_{n\to\infty}\left(P\,T_n(D)\,P^{-1}\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} T_n(D)\right)P^{-1}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 & 0 \\ -e^{-2}+e^4 & e^{-2}+e^4 & -e^{-2}+e^4 \\ -e^{-2}+e^4 & -e^{-2}+e^4 & e^{-2}+e^4 \end{pmatrix}$$

Université Moulay-Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable : Prof. A. Sadrati

Année universitaire 2018-2019
Filière : MIP
Module : M 124

EXAMEN D'ALGÈBRE - SESSION NORMALE (DÉCEMBRE 2018)

Durée : 1h30

Le sujet comporte 2 pages. L'épreuve dure 1h30. Les documents, calculatrices et matériels électroniques non autorisés.

Exercice 1 : (4 pts)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer A^n.

Exercice 2 : (10 pts)

Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) les suites définies par :

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}, \quad v_{n+1} = 3v_n + 2w_n \quad \text{et} \quad w_{n+1} = v_n + 2w_n.$$

On suppose que $u_0 \geq 0$, $v_0 = u_0$ et $w_0 = 1$.

1) Montrer que, $\forall n \geq 0$, $u_n = \dfrac{v_n}{w_n}$.

2) a) Trouver une matrice A, telle que

$$\forall n \geq 0, \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

b) Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D, telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

c) Calculer A^n et en déduire v_n, w_n et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 3 : (6 pts)

1) Décomposer en somme de carrés de formes linéairement indépendantes la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{\cancel{3}\,4}$ suivante :

$$q(x,y,z,t) = y^2 + z^2 - 4xz - 4xt + 2yz.$$

Quelle est sa signature et son rang ?

2) Soit φ une application bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E, et soit Q sa forme quadratique. Soient $f_1, \ldots, f_r$ des formes linéaires indépendantes, telles que Q s'écrive sous la forme :

$$\forall x \in E, \quad Q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (f_i(x))^2,$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, r$.

   a) Rappeler la définition du noyau d'une forme bilinéaire symétrique.

   b) Vérifier que la forme bilinéaire symétrique φ associée à Q est donnée par :

$$\forall x, y \in E, \quad \varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i(x) f_i(y).$$

Corrigé (Décembre 2018)

Exercice 1

$$A = 2I_3 + N \quad \text{où} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$N^3 = 0$ et $N^k = 0, \ \forall k \geq 3$.

On applique le binôme de Newton :

$$A^n = (2I+N)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (2I)^{n-k} N^k$$

$$= C_n^0 \cdot 2^n \cdot I + C_n^1\, 2^{n-1} \cdot N + C_n^2 \cdot 2^{n-2} N^2$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n \cdot 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^{n-3} n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (Decembre 2018)

$\forall n \geq 0$, $U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{U_n + 2}$, $V_{n+1} = 3V_n + 2W_n$ et $W_{n+1} = V_n + 2W_n$.

$U_0 \geq 0$, $V_0 = U_0$ et $W_0 = 1$

1 Montrons que, $\forall n \geq 0$, $U_n = \dfrac{V_n}{W_n}$.

Initialisation. pour $n = 0$, $U_0 = \dfrac{U_0}{1} = \dfrac{V_0}{W_0}$.

Hypothèse de récurrence. On suppose que $U_n = \dfrac{V_n}{W_n}$

et on montre que $U_{n+1} = \dfrac{V_{n+1}}{W_{n+1}}$.

$$U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{U_n + 2} = \frac{3\left(\frac{V_n}{W_n}\right) + 2}{\frac{V_n}{W_n} + 2}$$

$$= \frac{3V_n + 2W_n}{V_n + 2W_n} = \frac{V_{n+1}}{W_{n+1}}.$$

Conclusion. $U_n = \dfrac{V_n}{W_n}$, $\forall n \geq 0$.

2) a/ On a
$$\begin{pmatrix} V_{n+1} \\ W_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3V_n + 2W_n \\ V_n + 2W_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} V_n \\ W_n \end{pmatrix}$$

b)

$$C_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 2 \\ 1 & 2-X \end{vmatrix} = X^2 - 5X + 4 = 0$$
$$= X^2 - X - 4X + 4$$
$$= X(X-1) - 4(X-1)$$
$$= (X-1)(X-4)$$

Les valeurs propres de A sont 1 et 4.

$E_1 = \ker(A - I_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow E_1$ est engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E_4 = \ker(A - 4I_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow E_4$ est engendré par $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

On a $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$PDP^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = A$

c) $A^n = P D^n P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \times 4^n \\ -1 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2 \times 4^n & -2 + 2 \times 4^n \\ -1 + 4^n & 2 + 4^n \end{pmatrix}$.

On a
$$\begin{pmatrix} V_n \\ W_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} V_0 \\ W_0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(4^n) & -2+2.4^n \\ -1+4^n & 2+4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ W_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_n = \frac{1}{3}\left[(1+2.4^n)V_0 + (-2+2.4^n)\,W_0\right] \\ W_n = \frac{1}{3}\left[(-1+4^n)V_0 + (2+4^n)\,W_0.\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_n = \frac{1}{3}\left[2.4^n(V_0+W_0) + (V_0-2W_0)\right] \\ W_n = \frac{1}{3}\left[4^n(V_0+W_0) + (-V_0+2W_0)\right]. \end{cases}$$

Ainsi

$$U_n = \frac{2\,4^n(V_0+W_0) + (V_0-2W_0)}{4^n(V_0+W_0) + (-V_0+2W_0)}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2(V_0+W_0)\times 4^n}{(V_0+W_0)\times 4^n} = 2.$$

Exercice 3 (Decembre 2018)

1) On applique la méthode de Gauss (attention : appliquer une autre méthode peut mener à des formes linéairement dépendante).

$$q(x,y,z) = y^2 + z^2 - 4xz - 4xt + 2yz$$
$$= y^2 + 2yz + z^2 - 4xz - 4xt$$
$$= (y+z)^2 - 4x(z+t)$$
$$= (y+z)^2 - (x+z+t)^2 + (x-z-t)^2$$

q est donc de signature $(2,1)$ et de rang 3.

2) a/ Le noyau d'une forme bilinéaire symétrique φ est l'ensemble des vecteurs $x \in E$ telsque pour tout vecteur $y \in E$, on ait $\varphi(x,y) = 0$.

b) Il est facile de vérifier que φ est bilinéaire symétrique. Comme $\varphi(x,x) = Q(x)$ pour tout x, φ est bien l'unique forme associée à Q.

Université Moulay–Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable : Prof. A. Sadrati

Année universitaire 2017-2018
Section : MIP S2
Module : M 124

EXAMEN D'ALGÈBRE (Pour les libres)
Durée : 1h30

Exercice 1 : (4 pts)

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ rapporté à sa base canonique. Soit a un réel et q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$q(x,y) = x^2 + y^2 + 2axy.$$

1) Réduire q par la méthode de Gauss.

2) Discuter suivant les valeurs de a, le rang et la signature de q.

3) Déterminer une base $\{u,v\}$ de $\mathbb{R}^2$ orthogonale pour q.

Exercice 2 : (6 pts)

Soient m et a deux paramètres réels. On considère le système linéaire

$$(S_{m,a}) \begin{cases} mx - 2y + z = 1 \\ -2x + y + mz = a \\ x + my - 2z = 1 \end{cases}$$

1) Pour quelles valeurs de m, $(S_{m,a})$ est de Cramer ?

2) Discuter suivant les valeurs de m le rang du système $(S_{m,a})$.

3) Résoudre le système $(S_{0,1})$ ($m = 0$ et $a = 1$) par la méthode des déterminants.

4) Résoudre le système $(S_{1,a})$. Discuter suivant la valeur du paramètre a.

Exercice 3 : (10 pts)

On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ par :

$$x = (x_1, x_2, x_3),\; f(x) = (x_1, -x_1 + 2x_2, x_1 + 3x_2 + 5x_3).$$

1) Écrire la matrice A de f dans la base B.

2) A est-elle diagonalisable ?

3) Soient $u_1 = (1,1,-1), u_2 = (0,1,-1), u_3 = (0,0,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   a) Vérifier que $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Écrire la matrice P de passage de B à B'.
   c) Calculer P^{-1}.
   d) En déduire la matrice A' de f dans la base B'.

4) Calculer A^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5) On considère 3 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} \\ v_n = -u_{n-1} + 2v_{n-1} \\ w_n = u_{n-1} + 3v_{n-1} + 5w_{n-1} \end{cases} \quad avec \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \\ w_0 = 3 \end{cases}$$

Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction n.

Correction : (Libre 2017-2018)

Exercice 3

1) La matrice A de f dans la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2) A est triangulaire inférieure, donc les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux. A admet trois valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

3) a/ On a $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Donc B' est une famille libre. Comme $card(B') = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, alors B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

b/ La matrice de passage de B à B' est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\det(P) = 1$; $com(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d)
$$A' = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

4) $A = PA'P^{-1} \Rightarrow A^n = PA'^nP^{-1}$. ①

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-2^n & 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 5^n-2^n & 5^n \end{pmatrix}.$$

5) Le système s'écrit $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n-1} \\ V_{n-1} \\ W_{n-1} \end{pmatrix}$

si l'on pose $X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$ on obtient $X_n = AX_{n-1}$.

D'où, $X_n = A^nX_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-2^n & 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 5^n-2^n & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

par conséquent,

$U_n = 1$; $V_n = 2^n+1$ et $W_n = 5^{n+1} - 2^n - 1$.

<u>Exercice 2</u>.

1) La matrice associée au système $(S_{m,a})$ est $A_m = \begin{pmatrix} m & -2 & 1 \\ -2 & 1 & m \\ 1 & m & -2 \end{pmatrix}$

$\det(A_m) = \begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ -2 & 1 & m \\ 1 & m & -2 \end{vmatrix} = (m-1)(-m^2-m-7)$

Le discriminant du trinôme $-m^2-m-7$ est $-27<0$.

Donc, $\forall m \in \mathbb{R}$, $-m^2-m-7 \neq 0$.

Le système $(S_{m,a})$ est de Cramer si $\det(A_m) \neq 0$

c-à-d $m \neq 1$.

2) <u>1^{er} cas</u> : si $m \neq 1$ alors $rang(S_{m,a}) = 3$.

<u>2^{eme} cas</u> : si $m = 1$ alors $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

On a $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rang(A_1) = 2$.

3) $m = 0$ et $a = 1$. On a $(S_{0,1}) \begin{cases} -2y + z = 1 \\ -2x + y = 1 \\ x - 2z = 1. \end{cases}$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -7$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$; $\Delta_z = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7$

et $\det(A_1) = 7$. Donc $x = y = z = -1$.

4) $m = 1$. $(S_{1,a}) \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2x + y + z = a \\ x + y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 & L_1 \\ -3y + 3z = 2 + a & L_2 + 2L_1 \\ -3y + 3z = 0 & L_3 - L_1 \end{cases}$

<u>1^{er} cas</u> : si $2 + a \neq 0$ c-à-d $a \neq -2$ alors les deux équations (2) et (3) sont incompatibles, donc $S = \phi$.

<u>2^{eme} cas</u> : si $2 + a = 0$, c-à-d $a = -2$, alors le système devient $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ z = y \end{cases}$

$\Rightarrow S = \{ (1+y, y, y) / y \in \mathbb{R} \}$.

Exercice 1.

1) $q(x,y) = (x + ay)^2 + (1-a^2)y^2$.

2) - si $a = \pm 1$, alors $\text{rang}(q) = 1$ et $\text{sign}(q) = (1,0)$.

- si $-1 < a < 1$, alors $\text{rang}(q) = 2$ et $\text{sign}(q) = (2,0)$

- si $a < -1$ ou $a > 1$, alors :

$$q(x,y) = (x + ay)^2 - (a^2-1)y^2.$$

Donc $\text{rang}(q) = 2$ et $\text{sign}(q) = (1,1)$

3) on détermine une base orthogonale pour q :

soit $\begin{cases} x + ay = x' \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - ay' \\ y = y' \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow B' = \{(1,0), (-a,1)\}$ est une base orthogonale pour q.