Université Moulay–Ismaïl
F.S.T. Errachidia
Département de Mathématiques

Année Universitaire: 2019/2020
Module: M 512; MIP, S_5
Responsable: A. ELBOUR

Examen de rattrapage
Durée: 55 min

Exercice 1. *Les deux questions suivantes sont indépendantes.*

1) *Montrer que les solutions de l'équation*

$$x\sqrt{1+y^2} + \sin(xz) + e^y - 2\,e^{-xz} = 0$$

au voisinage de $(1,0,0)$ *sont de la forme* $(x, y, \varphi(x,y))$ *où* φ *est une fonction de classe* C^1 *sur un voisinage de* $(1,0)$.

Calculer $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,0)$ *et* $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,0)$.

2) *Montrer que la fonction*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (e^x - e^{2y}, 2x+y) \end{array}$$

est un C^1*-difféomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. *Soit* E *un espace hilbertien réel. On note* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *le produit scalaire sur* E *et* $\|\cdot\|$ *la norme associée définie par* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. *Considérons l'application suivante:*

$$\begin{array}{rccc} g: & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \|x\|\,x \end{array}$$

1) *L'application* g *est-elle différentiable en* 0? *Justifier votre réponse.*

2) *Montrer que l'application*

$$\begin{array}{rccc} N: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

est de classe C^1 *sur l'ouvert* $U = E\setminus\{0\}$ *et calculer sa différentielle en tout point de* U.

3) *Montrer que* g *est de classe* C^1 *sur* U *et calculer sa différentielle en tout point de* U.

4) *L'application* g *est-elle un* C^1-*difféomorphisme de* U *sur* U? *Justifier votre réponse.*

Université Moulay Ismaïl
F.S.T. Errachidia
LST-Maths Appliquées

Année Universitaire: 2019/2020
Module M512
Responsable: Aziz ELBOUR

Examen du Calcul Différentiel

Durée: 2h

N.B. Il sera tenu compte de la lisibilité et de la clarté de la rédaction.

Exercice 1. *1) Montrer que la fonction* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f(x,y)=\left(x-\frac{1}{6}e^{\cos(3y)}\ ,\ y+\frac{1}{4}e^{\sin(x)}\right),$$

est un C^1*-difféomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que l'équation

$$x+2z+e^{x-y+z}+\cos(xyz)-2=0$$

définit au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^3$ *implicitement une fonction* $z=\varphi(x,y)$ *de classe* C^1 *sur un voisinage de l'origine de* $\mathbb{R}^2$. *Calculer les deux dérivées partielles* $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)$ *et* $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)$.

Exercice 2. *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose que la norme sur* E *est associée à un produit scalaire:* $(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$. *Soit* $\varphi:E\to E$ *une application de classe* C^1. *On suppose qu'il existe un réel* $\alpha>0$ *tel que, pour tout* $(x,y)\in E^2$,

$$\langle\varphi(x)-\varphi(y)\,,x-y\rangle\geq\alpha\|x-y\|^2. \qquad (*)$$

1. *Montrer que, pour tous* $x\in E$ *et* $h\in E$,

$$\langle D\varphi(x)(h)\,,h\rangle\geq\alpha\|h\|^2. \qquad (**)$$

2. *Montrer que, pour tout* $x\in E$, $D\varphi(x)$ *est un isomorphisme de* E.
3. *Montrer que* φ *est un* C^1*−difféomorphisme de* E *sur lui-même.*

Exercice 3. *Soit* E *un espace de Banach, et soit* $\mathscr{L}(E)$ *l'espace des endomorphismes continus de* E. *On note* $I=id_E$ *l'application identique de* E, *et on pose* $u^2=u\circ u$ *pour tout* $u\in\mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que l'application $f:\mathscr{L}(E)\longrightarrow\mathscr{L}(E)$ *définie par*

$$f(u)=u^2-u,$$

est de classe C^1 *sur* $\mathscr{L}(E)$ *et déterminer sa différentielle.*

2) Montrer que f *est un* C^1*-difféomorphisme local en* I.

3) Considérons l'application $g:\mathrm{Isom}(E)\longrightarrow\mathscr{L}(E)$ *définie par*

$$g(u)=u^2-u+u^{-1}.$$

Montrer que g *est de classe* C^1 *sur* $\mathrm{Isom}(E)$ *et déterminer sa différentielle.*

4) Calculer $Dg(I)$, *et montrer qu'il existe une boule fermée* $B\subset\mathrm{Isom}(E)$ *centrée en* I *et de rayon* $r>0$ *telle que*

$$\forall u\in B,\qquad\|Dg(u)\|\leq\frac{1}{2}.$$ $\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall\mu,I\in\mathrm{Isom}(E)$

5) Soit $u_0\in B$ *et l'on définit par récurrence* $u_{n+1}=g(u_n)$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$. $\|\mu-I\|<\eta\ \|Dg(\mu)-Dg(u)\|$

(a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in B$.

(b) Montrer que la suite (u_n) *converge vers* I *dans* $\mathrm{Isom}(E)$.

Université Moulay Ismaïl
F.S.T. Errachidia
LST-Maths Appliquées

Année Universitaire: 2019/2020
Module M512
Responsable: Aziz ELBOUR

Examen de Rattrapage du Calcul Différentiel

Durée: 1h 30min

N.B. Il sera tenu compte de la lisibilité et de la clarté de la rédaction.

Exercice 1. *Montrer que la fonction* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f(x,y) = \left(x + \sqrt{2+\cos(y)}\ ,\ y + \sqrt{2-\sin(x)}\right),$$

est un C^1*-difféomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$. *Calculer* $Df^{-1}\left(\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$.

Exercice 2. *Soit* E *un espace préhilbertien réel. On note* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *le produit scalaire sur* E *et* $\|\cdot\|$ *la norme associée définie par* $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. *Soit* $L : E \longrightarrow E$ *une application linéaire continue.*

1) *Montrer que l'application* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \langle L(x), L(x)\rangle$, *est de classe* C^1 *sur* E. *Calculer sa différentielle en tout point* $x \in E$.

2) *Montrer que l'application* $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = e^{-\langle x,x\rangle+1}$, *est différentiable sur* E. *Calculer sa différentielle en tout point* $x \in E$.

3) *Montrer que pour tous* $x, y \in E$ *on a*

$$|g(x) - g(y)| \leq \sqrt{2e}\ \|x-y\|.$$

4) *En déduire que l'application* $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$\phi(x) = \|L(x)\|^2\ e^{\|x\|^2-1}$$

est différentiable sur E *et calculer sa différentielle en tout point* $x \in E$.

Exercice 3. *Soit* E *un espace de Banach, et soit* $\mathscr{L}(E)$ *l'espace des endomorphismes continus de* E. *Considérons l'application suivante:*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathscr{L}(E)\times\mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E)\times\mathscr{L}(E) \\ & (f,g) & \longmapsto & (f\circ g\ ,\ f-g) \end{array}$$

1) *Montrer que* T *est de classe* C^1 *sur* $\mathscr{L}(E)\times\mathscr{L}(E)$, *et calculer* $DT(f,g)(h,k)$ *pour tous* $f,g,h,k \in \mathscr{L}(E)$.

2) *Montrer que* T *est un* C^1-*difféomorphisme local en* (I,I), *où* $I = id_E$ *est l'application identique de* E.

3) *L'application* T *est-elle un* C^1-*diff´eomorphisme local au point* $(0,0)$? *Justifier votre réponse.*

Université Moulay Ismaïl
F.S.T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable: Aziz ELBOUR

Année Universitaire: 2018/2019
LST-Maths Appliquées
Module M512

Examen de Rattrapage du Calcul Différentiel

02/7/2019

Durée: 2 h

Exercice 1. *1) Montrer que la fonction*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\sin\left(\frac{y}{2}\right) - x, \sin\left(\frac{x}{2}\right) - y\right) \end{array}$$

est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la fonction

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x + a\sin y, y + b\sin x) \end{array}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la fonction g soit un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. *On considère le système d'équations suivant:*

$$\begin{cases} e^x - 2\sqrt{1+y^2} + 3y + e^{xy-z} = 0 \\ e^{-x} - e^y + \sin z = 0 \end{cases}$$

Montrer qu'au voisinage de $(0,0,0)$ les solutions de ce système sont de la forme $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$, où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions numériques de classe C^1 sur un voisinage ouvert de 0. Calculer $\varphi_1'(0)$ et $\varphi_2'(0)$.

Exercice 3. *Soient E et F deux espaces de Banach. On appelle $\mathscr{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. On appelle $\mathrm{Isom}(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F. Si $E = F$ on écrira $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,E)$ et $\mathrm{Isom}(E) = \mathrm{Isom}(E,E)$.*

1) *On considère l'application $\varphi : \mathscr{L}(E) \longrightarrow \mathscr{L}(E)$ définie par $\varphi(f) = f \circ f$. Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme local en $I = id_E$*

2) *Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\|g\| < 1$. Montrer que $I - g \in \mathrm{Isom}(E)$.*

3) *Soient $f \in \mathrm{Isom}(E,F)$ et $h \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que*

$$\|h\| < \frac{1}{\|f^{-1}\|} \Longrightarrow f + h \in \mathrm{Isom}(E,F).$$

En déduire que $\mathrm{Isom}(E,F)$ est un ouvert de $\mathscr{L}(E,F)$.

4) *On considère l'application*

$$\psi: \begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(F,E) \\ f & \longmapsto & f^{-1} \end{array}$$

Montrer que ψ est différentiable et calculer $D\psi(f)$ pour tout $f \in \mathrm{Isom}(E,F)$.

Université Moulay Ismaïl
F.S.T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable: Aziz ELBOUR

Année Universitaire: 2018/2019
LST-Maths Appliquées
Module M512

Examen de Calcul Différentiel

14/01/2019

Durée: 2 h 20 min

Exercice 1. *Soit E un espace préhilbertien réel. On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme associée définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. On considère l'application $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par*

$$g(x) = e^{-\langle x,x\rangle} \qquad \forall x \in E$$

1) *Montrer que l'application g est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point $x \in E$.*

2) *Montrer que pour tous $x, y \in E$ on a $|g(x) - g(y)| \leq \sqrt{\frac{2}{e}}\ \|x - y\|$.*

Exercice 2. *On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$f(x,y) = \left(x - \frac{2}{3}\arctan y\ ,\ y + \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\right), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

1) *Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et que $Df(x,y) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

2) *Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Montrer que le système suivant*

$$\begin{cases} x = \alpha + \frac{2}{3}\arctan y \\ y = \beta - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^2$.

3) *En déduire que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.*

4) *Déterminer $Df^{-1}\left(0,\frac{1}{2}\right)$.*

Exercice 3. *On note $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$, et on rappelle que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. On note $\mathcal{B}$ la boule ouverte de E de centre 0 et de rayon 1.*

1) *On considère l'application $L : E \longrightarrow E$ définie par*

$$L(f)(x) = \int_0^x t\ f(t)\ \mathrm{d}t, \qquad \forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1].$$

Montrer que l'application L est linéaire continue, et calculer $\|L\|$.

2) *Montrer que l'application $\varphi : E \longrightarrow E,\ f \longmapsto f^2$ est de classe C^1 sur E et calculer sa différentielle en tout point de E.*

3) En déduire que l'application $T : E \longrightarrow E$ *définie par*

$$T(f)(x) = \int_0^x t \; f^2(t) \; \mathrm{d}t, \qquad \forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1]$$

est de classe C^1 *sur* E *et calculer sa différentielle en tout point de* E.

4) Montrer que pour tout $f \in E$, $\|DT(f)\| \leq \|f\|_\infty$.

5) On pose $\psi = Id_E - T$ *où* Id_E *désigne l'application identité de* E.

i) Montrer que pour tout $(f,g) \in E^2$, *on a*

$$\|\psi(f) - \psi(g)\|_\infty \geq \left(1 - \frac{1}{2}\left(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty\right)\right) \; \|f-g\|_\infty .$$

ii) Montrer que la restriction de ψ *à* $\mathcal{B}$ *est un* C^1*-difféomorphisme de* $\mathcal{B}$ *sur son image* $\psi(\mathcal{B})$.

6) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application de classe* C^1. *Montrer que l'application* $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$\phi(f) = \int_0^1 g(f(t)) \; \mathrm{d}t, \qquad \forall f \in E,$$

est différentiable sur E *et que sa différentielle en tout point* $f \in E$ *est donnée par*

$$D\phi(f)(h) = \int_0^1 g'(f(t)) \; h(t) \; \mathrm{d}t, \qquad \forall h \in E.$$

I.K

Univ.

Université Moulay Ismaïl
F.S.T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable: Aziz ELBOUR

Année Universitaire: 2018/2019
LST-Maths Appliquées
Module M512

Examen de Rattrapage de Calcul Différentiel

05/02/2019

Durée: 1 h 30 min

Exercice 1. *Soit E un espace préhilbertien réel. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme associée définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Soit $L \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme continu de E.*

1) *Montrer que l'application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$q(x) = \langle L(x), L(x)\rangle \qquad \forall x \in E$$

est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point $x \in E$.

2) *En déduire que l'application $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par*

$$g(x) = e^{-q(x)} \qquad \forall x \in E$$

est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point $x \in E$.

3) *Soit $x \in E$. Montrer que $Dg(x) = 0$ si et seulement si $L(x) = 0$.*

4) *Montrer que pour tous $x, y \in E$ on a $|g(x) - g(y)| \leq \|L\| \sqrt{\frac{2}{e}}\ \|x - y\|$.*

Exercice 2. *Soit E un espace de Banach, et soit $\mathscr{L}(E)$ l'espace des endomorphismes continus de E.*

1) *Enoncer le théorème d'inversion locale.*

2) *Montrer que l'application*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E) \\ & (f, g) & \longmapsto & (f - g, f \circ g) \end{array}$$

est de classe C^1, et calculer $DT(f,g)$ pour tout $(f,g) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$.

3) *Montrer que T est un C^1-difféomorphisme local en (I, I), où $I = \mathrm{id}_E$.*

Exercice 3. *On considère le système d'équations suivant:*

$$\begin{cases} x^2yz + 3y - z\sqrt{1 + x^2} = 0 \\ e^x - e^y + \arctan(z) = 0 \end{cases}$$

Montrer qu'au voisinage de $(0,0,0)$ les solutions de ce système sont de la forme $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$, où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions numériques de classe C^1 sur un voisinage ouvert de 0. Calculer $\varphi_1'(0)$ et $\varphi_2'(0)$.

1

Université Moulay Ismaïl
F.S.T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable: Aziz ELBOUR

Année Universitaire: 2017/2018
LST-Maths Appliquées
Module M512

Examen de Calcul Différentiel

30/05/2018

Durée: 2 h

Exercice 1. *On considère la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f(x,y) = \left(x - \frac{1}{2}\sin y, y + \frac{1}{2}\sin x\right), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On munit $\mathbb{R}^2$ *de la norme euclidienne* $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

1) Montrer que la fonction f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et que* $Df(x,y) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ *pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

i) Démontrer que le problème de trouver $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $f(x,y) = (a,b)$ *est équivaut au problème de point fixe* $\varphi(x,y) = (x,y)$, *où* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *est l'application définie par*

$$\varphi(x,y) = \left(a + \frac{1}{2}\sin y, b - \frac{1}{2}\sin x\right).$$

ii) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $(x',y') \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$\|\varphi(x,y) - \varphi(x',y')\| \leq \frac{1}{2}\|(x,y) - (x',y')\|.$$

iii) En déduire que f *est bijective.*

3) Conclure que f *est un* C^1*-difféomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

4) Calculer $Df^{-1}(0,0)$.

Exercice 2. *On note* $E = \mathcal{C}([0,1])$ *l'espace des fonctions continues* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, *muni de la norme la convergence uniforme* $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, *et on rappelle que* $(E, \|\cdot\|)$ *est un espace de Banach. On note* $\mathcal{B}$ *la boule ouverte de* E *de centre* 0 *et de rayon* 1.

1) Montrer que l'application $\varphi : E \longrightarrow E$, $f \longmapsto f^2$ *est de classe* C^1 *sur* E *et calculer sa différentielle en tout point de* E.

2) On considère l'application $L : E \longrightarrow E$ *définie par*

$$L(f)(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t, \qquad \forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1].$$

Montrer que $L : E \longrightarrow E$ *est une application linéaire continue.*

3) En déduire que l'application $\psi : E \longrightarrow E$ *définie par*

$$\psi(f)(x) = \int_0^x f^2(t)\ \mathrm{d}t, \qquad \forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1]$$

est de classe C^1 *sur* E *et calculer sa différentielle en tout point de* E.

4) Montrer que, pour tout $f \in E$, $\|D\psi(f)\| \leq 2\|f\|$.

5) On pose $\phi = Id_E + \frac{1}{2}\psi$ *où* Id_E *désigne l'application identité de* E.

i) Montrer que pour tout $(f,g) \in E^2$, *on a*

$$\|\phi(f) - \phi(g)\| \geq \left(1 - \frac{1}{2}(\|f\| + \|g\|)\right) \|f - g\|.$$

ii) En déduire que la restriction de ϕ *à* $\mathcal{B}$ *est injective.*

iii) Montrer que la restriction de ϕ *à* $\mathcal{B}$ *est un* C^1*-difféomorphisme de* $\mathcal{B}$ *sur son image* $\phi(\mathcal{B})$.

Université Moulay Ismaïl
F.S.T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable: Aziz ELBOUR

Année Universitaire: 2017/2018
LST-Maths Appliquées
Module M512

Examen de Rattrapage du Calcul Différentiel

03/07/2018

Durée: 1 h 30 min

Exercice 1. *On considère la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f(x,y) = \left(x + \frac{1}{2}\sqrt{1+y^2}, y - \frac{2}{3}\arctan x\right), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On munit $\mathbb{R}^2$ *de la norme euclidienne* $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

1) *Montrer que la fonction* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et que* $Df(x,y) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ *pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2) *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *fixé. Considérons l'application* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\varphi(x,y) = \left(a - \frac{1}{2}\sqrt{1+y^2}, b + \frac{2}{3}\arctan x\right), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   i) *Vérifier que le problème de trouver* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $f(x,y) = (a,b)$ *est équivaut au problème de point fixe* $\varphi(x,y) = (x,y)$.

   ii) *En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que l'application* φ *est contractante.*

   iii) *En déduire que* f *est bijective.*

3) *Conclure que* f *est un* C^1*-difféomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

4) *Déterminer* $Df^{-1}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Exercice 2. *Soit* E *un espace de Banach, et soit* $\varphi : \mathscr{L}(E) \longrightarrow \mathscr{L}(E)$ *l'application définie par* $\varphi(u) = u \circ u$. *On note* $I = id_E$ *l'application identité de* E, *et* $B = B\left(I, \frac{1}{2}\right)$ *la boule ouverte dans* $\mathscr{L}(E)$, *de centre* I *et de rayon* $\frac{1}{2}$.

1) *Montrer que* φ *est de classe* C^1 *sur* $\mathscr{L}(E)$ *et calculer sa différentielle en tout* $u \in \mathscr{L}(E)$.

2) *Montrer que pour tout* $u \in \mathscr{L}(E)$ *on a*

$$\|D\varphi(u) - 2\mathcal{I}\| \leq 2\|u - I\|,$$

   où $\mathcal{I} = id_{\mathscr{L}(E)}$ *désigne l'application identité de* $\mathscr{L}(E)$.

3) *En déduire que pour tout* $u \in B$, $D\varphi(u) \in \mathrm{Isom}(\mathscr{L}(E))$.

4) *Considérons l'application* $\psi : \mathscr{L}(E) \longrightarrow \mathscr{L}(E)$ *définie par* $\psi(u) = \varphi(u) - 2u$.

   i) *Vérifier que l'application* ψ *est différentiable et que*

$$\|\psi(u) - \psi(v)\| \leq \|u - v\| \quad \text{pour tous } u, v \in B.$$

   ii) *En déduire que la restriction de* φ *à* B *est injective.*

5) *Montrer que* φ *est un* C^1*-difféomorphisme de* B *sur* $\varphi(B)$.

Université Moulay Ismaïl
F.S.T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable: Aziz ELBOUR

Année Universitaire: 2017/2018
LST-Maths Appliquées
Module M512

Examen de Calcul différentiel

(02/2/2018)

Durée: 2h 15min

N.B. Il sera tenu compte de la lisibilité et de la clarté de la rédaction.

Exercice 1. *Soit E un espace préhilbertien réel. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme associée définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Soit $L : E \longrightarrow E$ un endomorphisme continu de E vérifiant*

$$\langle L(x), y \rangle = \langle x, L(y) \rangle \qquad \forall (x, y) \in E^2.$$

1) *Montrer que l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle L(x), x \rangle$, est de classe C^1 sur E. Calculer sa différentielle en tout point $x \in E$.*

2) *Montrer que l'application $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^{-\langle x, x \rangle}$, est de classe C^1 sur E. Calculer sa différentielle en tout point $x \in E$.*

3) *Montrer que pour tous $x, y \in E$ on a*

$$|g(x) - g(y)| \leq \sqrt{\frac{2}{e}} \; \|x - y\|.$$

4) *En déduire que l'application $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\phi(x) = \langle L(x), x \rangle \; e^{-\langle x, x \rangle}$$

est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point $x \in E$.

5) *Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que si $D\phi(x) = 0$ alors x est un vecteur propre de L.*

Exercice 2. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et soit $\varphi : E \longrightarrow E$ une application de classe C^1. On suppose qu'il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \geq k \|x - y\|, \quad \forall (x, y) \in E^2.$$

1) *Montrer que $\varphi(E)$ est un fermé de E.*

2) *Montrer que*

$$\|D\varphi(x)(h)\| \geq k \|h\|, \quad \forall (x, h) \in E^2.$$

3) *En déduire que $D\varphi(x) \in \mathrm{Isom}(E, E)$ pour tout $x \in E$.*

4) *Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme de E sur E.*

Exercice 3. *Soit U un ouvert convexe d'un espace vectoriel normé E. Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite $\alpha-$convexe (avec $\alpha \geq 0$) si, pour tous $x, y \in U$ et tout $t \in [0,1]$,*

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + t f(y) - \frac{\alpha}{2} t (1-t) \|x-y\|^2 .$$

1) *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:*

   (i) *f est $\alpha-$convexe sur U;*

   (ii) *Pour tout $(x,y) \in U^2$,* $\quad Df(x)(y-x) + \frac{\alpha}{2}\|x-y\|^2 \leq f(y) - f(x)$;

   (iii) *Pour tout $(x,y) \in U^2$,* $\quad Df(x)(y-x) + \alpha\|x-y\|^2 \leq Df(y)(y-x)$.

2) *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur U. Montrer que f est $\alpha-$convexe sur U si et seulement si,*

$$\forall x \in U,\ \forall h \in E, \qquad D^2 f(x)(h,h) \geq \alpha \|h\|^2 . \qquad (*)$$

Université Moulay Ismaïl
F.S.T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable: Aziz ELBOUR

Année Universitaire: 2017/2018
LST-Maths Appliquées
Module: M512

Examen de Rattrapage

17/02/2018

Durée: 2 h

Exercice 1. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par*

$$\varphi(x,y) = \left(\frac{1}{4}\sin(x+y), 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y)\right).$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\| = |x| + |y|$.

1) Montrer que pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$,

$$\|\varphi(x,y) - \varphi(x',y')\| \leq \frac{11}{12}\|(x,y) - (x',y')\|.$$

2) En déduire que le système d'équations suivant

$$(S) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4}\sin(x+y) \\ y = 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y) \end{cases}$$

admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. *Soit E un espace préhilbertien réel. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme associée définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Soit $L : E \longrightarrow E$ un endomorphisme continu de E vérifiant*

$$\langle L(x), y\rangle = \langle x, L(y)\rangle \qquad \forall (x,y) \in E^2.$$

1) Montrer que l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle L(x), x\rangle$, est de classe C^1 sur E. Calculer sa différentielle en tout point $x \in E$.

2) Montrer que l'application $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^{-\langle x, x\rangle}$, est de classe C^1 sur E. Calculer sa différentielle en tout point $x \in E$.

3) Montrer que pour tous $x, y \in E$ on a

$$|g(x) - g(y)| \leq \sqrt{\frac{2}{e}}\ \|x - y\|.$$

4) En déduire que l'application $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x) = \langle L(x), x\rangle\ e^{-\langle x, x\rangle}$$

est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point $x \in E$.

5) Soit $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $D\phi(x) = 0$. Montrer que x est un vecteur propre de L.

Exercice 3. *Soit E un espace hilbertien réel. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme associée définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Posons $U = E \setminus \{0\}$. On considère les deux applications suivantes:*

$$\alpha : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array} \quad ; \quad \varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \|x\|\, x \end{array}$$

1) Montrer que α est de classe C^1 sur U et déterminer $D\alpha(x)$ pour tout $x \in U$.

2) Montrer que φ est de classe C^1 sur U et calculer sa différentielle en tout point $x \in U$.

3) Montrer que $D\varphi(x) \in Isom(E, E)$ pour tout $x \in U$.

4) Montrer que φ est bijective et déterminer son application inverse φ^{-1}.

5) En déduire que φ est un C^1-difféomorphisme de U sur U.

Université Moulay Ismaïl
F.S.T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable: Aziz ELBOUR

Année Universitaire: 2016/2017
LST-Maths Appliquées
Module M512 (Calcul différentiel)

Examen (Libre)

Durée: 2h

Exercice 1 *Soit H un espace hilbertien réel. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur H et $\|\cdot\|$ la norme associée définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Considérons l'application*

$$f: \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arctan(\langle x, x\rangle) \end{array}.$$

1) *Montrer que f est différentiable sur H et déterminer sa différentielle en tout point $x \in H$.*

2) *Montrer que pour tout $(x, y) \in H^2$ on a*

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\|x - y\|.$$

3) *Considérons l'application*

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(H) & \longrightarrow & \mathscr{L}(H) \\ u & \longmapsto & u \circ u \end{array}$$

(a) *Montrer que φ est de classe C^1 et déterminer sa différentielle en tout point $u \in \mathscr{L}(H)$.*

(b) *Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme local en $u = Id_H$*

Exercice 2 *On considère le système d'équations suivant:*

$$\begin{cases} e^{2x} - 2y + z\cos(x - y + z) = 1 \\ xe^{xyz} + y - ze^{x} = 0 \end{cases}$$

1) *Montrer qu'au voisinage de $(0,0,0)$ les solutions de ce système sont de la forme $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$, où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions numériques de classe C^1 sur un voisinage ouvert de 0.*

2) *Calculer $\varphi_1'(0)$ et $\varphi_2'(0)$.*

Exercice 3 *Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. On munit E de la norme de la convergence uniforme:*

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \qquad f \in E.$$

On note B la boule ouverte de E de center 0 et de rayon 1, et soit $\varphi : E \longrightarrow E$ l'application définie par:

$$\varphi(f)(x) = \int_0^x f^2(t)\ dt, \qquad f \in E, \quad x \in [0,1].$$

1) *Montrer que φ est de classe C^1 et déterminer $D\varphi(f)$ pour tout $f \in E$.*

Université Moulay Ismaïl
F.S.T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable: Aziz ELBOUR

Année Universitaire: 2016/2017
LST-Maths Appliquées
Module M512

Examen de Rattrapage du Calcul différentiel (Libre)

(14/07/2017)
Durée: 1h30mn

Exercice 1 (Questions de cours). *Soit E un espace de Banach non nul ($E \neq \{0\}$). On pose $I = Id_E$.*

1. *Montrer que si $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\|u\| < 1$, alors $I - u \in \operatorname{Isom}(E)$ et que*
$$(I-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n.$$

2. *En déduire que l'ensemble $\operatorname{Isom}(E)$ est un ouvert de $\mathscr{L}(E)$.*

3. *Montrer que l'application $\varphi : \operatorname{Isom}(E) \longrightarrow \mathscr{L}(E)$, $u \longmapsto u^{-1}$ est différentiable et déterminer sa différentielle en tout point $u \in \operatorname{Isom}(E)$.*

Exercice 2. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par*
$$f(x,y) = \left(\frac{1}{4}\sin(x-y), 1 - \frac{2}{3}\arctan(x+y)\right).$$
On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\| = |x| + |y|$.

1) *Montrer que pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$,*
$$\|f(x,y) - f(x',y')\| \leq \frac{11}{12}\|(x,y) - (x',y')\|.$$

2) *En déduire que le système d'équations suivant*
$$(S) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4}\sin(x-y) \\ y = 1 - \frac{2}{3}\arctan(x+y) \end{cases}$$
admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et soit $f : E \longrightarrow E$ une application de classe C^1. On suppose qu'il existe une constante $k > 0$ tel que*
$$\|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|, \quad \forall (x,y) \in E^2.$$

1) *Montrer que f est injective et que $f(E)$ est une partie fermée de E.*

2) *Montrer que*
$$\|Df(x)(h)\| \geq k\|h\|, \quad \forall (x,h) \in E^2.$$

3) *Montrer que f est un C^1-difféomorphisme de E sur E.*

Université Moulay Ismaïl
F.S.T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable: Aziz ELBOUR

Année Universitaire: 2016/2017
LST-Maths Appliquées
Module M512

Examen de Calcul différentiel

(03/2/2017)

Durée: 2h

Exercice 1. *Soit U un ouvert convexe d'un espace vectoriel normé réel E et soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est convexe sur U si, pour tous $x, y \in U$ et tout $t \in [0,1]$,*

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + t f(y).$$

1) *On suppose f différentiable sur U. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:*

   (i) *f est convexe sur U;*

   (ii) *Pour tous $x, y \in U$, $\quad Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x)$;*

   (iii) *Pour tous $x, y \in U$, $\quad Df(x)(y-x) \leq Df(y)(y-x)$.*

2) *On suppose que f est deux fois différentiable dans U. Montrer que si f est convexe sur U alors*

$$\forall x \in U,\ \forall h \in E, \quad D^2 f(x)(h,h) \geq 0.$$

Exercice 2. *On considère le système d'équations suivant:*

$$\begin{cases} e^{-x} + 2y + z\cos(x - y + z) = 1 \\ xe^{xyz} - y + z\sqrt{1+x} = 0 \end{cases}$$

1) *Montrer qu'au voisinage de $(0,0,0)$ les solutions de ce système sont de la forme $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$, où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions numériques de classe C^1 sur un voisinage ouvert de 0.*

2) *Calculer $\varphi_1'(0)$ et $\varphi_2'(0)$.*

Exercice 3. *Soit E un espace hilbertien réel. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme associée définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Posons $U = E \setminus \{0\}$. On considère les deux applications suivantes:*

$$\alpha : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array} \quad ; \quad f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \|x\|\, x \end{array}$$

1) *Montrer que* α *est de classe* C^1 *sur* U *et déterminer* $D\alpha(x)$ *pour tout* $x \in U$.

2) *Montrer que* f *est de classe* C^1 *sur* U *et que* $Df(x)(h) = \frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|}x + \|x\| h$ *pour tout* $x \in U$ *et tout* $h \in E$.

3) *Vérifier que* f *est différentiable en* $x = 0$ *et que* $Df(0) = 0$.

4) *Montrer que* $\|Df(x)\| \leq 2\|x\|$ *pour tout* $x \in E$.

5) *En déduire que* f *est de classe* C^1 *sur* E *et que* $\|f(x) - f(y)\| \leq 2\|x - y\|$ *pour tous* $x, y \in B(0,1)$.

6) *Montrer que* $Df(x) \in \mathrm{Isom}(E,E)$ *pour tout* $x \in U$.

7) *Montrer que* f *est bijective et déterminer son application inverse* f^{-1}.

8) *En déduire que* f *est un* C^1*-difféomorphisme de* U *sur* U.

Université Moulay Ismaïl
F.S.T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable: Aziz ELBOUR

Année Universitaire: 2016/2017
LST-Maths Appliquées
Module M512

Examen de Rattrapage du Calcul différentiel
(22/02/2017)
Durée: 1h30mn

Exercice 1. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par*

$$\varphi(x,y) = \left(\frac{1}{4}\sin(x+y), 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y)\right).$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\| = |x| + |y|$.

1) *Montrer que pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$,*

$$\|\varphi(x,y) - \varphi(x',y')\| \leq \frac{11}{12}\|(x,y) - (x',y')\|.$$

2) *En déduire que le système d'équations suivant*

$$(S) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4}\sin(x+y) \\ y = 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y) \end{cases}$$

admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. *Soit E un espace hilbertien réel. On note $\langle \cdot,\cdot \rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme associée définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Soit $L \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme continu de E vérifiant*

$$\langle L(x), y\rangle = \langle x, L(y)\rangle \qquad \forall (x,y) \in E^2.$$

1) *Montrer que l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle L(x), x\rangle$, est de classe C^1 sur E. Calculer sa différentielle en tout point $x \in E$.*

2) *Posons $U = E\setminus\{0\}$. Considérons l'application $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = \frac{\langle L(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle}$.*

   i- *Montrer que ψ est différentiable sur U et calculer sa différentielle en tout point $x \in U$.*

   ii- *Montrer que si $a \in U$ est un vecteur propre de L alors $D\psi(a) = 0$.*

Exercice 3. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et soit $f : E \longrightarrow E$ une application de classe C^1. On suppose qu'il existe une constante $k > 0$ tel que*

$$\|f(x) - f(y)\| \geq k\|x-y\|, \quad \forall (x,y) \in E^2.$$

1) *Montrer que f est injective et que $f(E)$ est fermée dans E.*

2) *Montrer que*

$$\|Df(x)(h)\| \geq k\|h\|, \quad \forall (x,h) \in E^2.$$

3) *En déduire que $Df(x) \in \mathrm{Isom}(E,E)$ pour tout $x \in E$.*

4) *Montrer que f est un C^1-difféomorphisme de E sur E.*

Université Moulay Ismaïl
F.S.T. Errachidia
Département de Mathématiques
LST-Maths Appliquées

Année Universit[illegible] 2016
Module M512
Calcul différentiel
Responsable: Aziz [illegible]

Examen de juin 2016

Durée: 2h30mn

Exercice 1. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par*

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{4}\sin(x+y), 1 + \frac{2}{3}\arctan(x+y)\right).$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\| = |x| + |y|$.

1. *Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa différentielle en tout point $(x,y) \in$ $\mathbb{R}^2$.*
2. *Montrer que pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$,*
$$\|f(x,y) - f(x',y')\| \le \frac{11}{12}\|(x,y) - (x',y')\|.$$
3. *En déduire que le système d'équations suivant*
$$(S) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4}\sin(x+y) \\ y = 1 + \frac{2}{3}\arctan(x+y) \end{cases}$$
admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. *Soit E un espace hilbertien réel. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme associée. Posons $U = E \setminus \{0\}$.*

1. *Montrer que l'application $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{\|x\|^2}$ est différentiable sur U et calculer sa différentielle en tout point de U.*
2. *Soit $f : U \longrightarrow E$ définie par $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$.*
   (a) *Montrer que f est différentiable sur U et donner l'expression de sa différentielle en tout point de U.*
   (b) *Montrer que f est une bijection de U sur U puis que f est un C^1-difféomorphisme de U sur U.*

Exercice 3. *Soit U un ouvert convexe d'un espace vectoriel normé réel E et soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est convexe sur U si, pour tous $x, y \in U$ et tout $t \in [0,1]$,*

$$f((1-t)x + ty) \le (1-t)f(x) + tf(y).$$

1. *On suppose f différentiable sur U. Montrer que f est convexe sur U si, et seulement si,*
$$\forall x \in U,\ \forall y \in U, \quad Df(x)(y-x) \le f(y) - f(x).$$

2. *On suppose que f est de classe C^2 sur U. Montrer que f est convexe sur U si, et seulement si,*

$$\forall x \in U,\ \forall h \in E, \quad D^2 f(x)(h,h) \geq 0. \tag{$*$}$$

3. *On suppose f convexe et différentiable sur U. Soit $a \in U$ tel que $Df(a) = 0$. Montrer que f a un minimum absolu en a.*

Exercice 4. *On considère le système différentiel suivant sur $I =]0, +\infty[$:*

$$(E_0) \quad \begin{cases} x'(t) = \frac{2}{t}x(t) - \frac{1}{t^2}y(t), \\ y'(t) = 2x(t). \end{cases}$$

1. *Vérifier que $X_1 : t \longrightarrow \left(\frac{1}{2}, t\right)$ et $X_2 : t \longrightarrow (t, t^2)$ sont deux solutions de (E_0), linéairement indépendantes.*

2. *Déduire la solution générale de (E_0).*

3. *Résoudre le système différentiel suivant sur $I =]0, +\infty[$:*

$$(E) \quad \begin{cases} x'(t) = \frac{2}{t}x(t) - \frac{1}{t^2}y(t) + t, \\ y'(t) = 2x(t) + t^2. \end{cases}$$

Université Moulay Ismaïl
F.S.T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable: Aziz ELBOUR

Année Universitaire: 2015/2016
LST-Maths Appliquées
Module M512

Examen de Calcul différentiel

(12-02-2016)

Durée: 2h30mn

Exercice 1. *Montrer que l'équation*

$$xyz + e^{2x-y+z} + \sin(x+2z) - 1 = 0$$

définit au voisinage de $(0,0,0)$ *une fonction implicite* $z = \varphi(x,y)$ *de classe* C^1 *sur un voisinage de l'origine de* $\mathbb{R}^2$. *Calculer les dérivées partielles* $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)$ *et* $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)$.

Exercice 2. *Déterminer les solutions réelles définies sur* $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *de l'équation différentielle* $y'' + y = \tan t$.

Exercice 3. *Soit* E *un espace de Banach, et soit* $f : \mathscr{L}(E) \longrightarrow \mathscr{L}(E)$ *l'application définie par* $f(u) = u \circ u$. *On note* $I = id_E$ *l'application identique de* E, *et* $B = B\left(I, \frac{1}{2}\right)$ *la boule ouverte dans* $\mathscr{L}(E)$, *de centre* I *et de rayon* $\frac{1}{2}$.

1. *Montrer que* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathscr{L}(E)$ *et que* $Df(u)(h) = u \circ h + h \circ u$ *pour tous* $u, h \in \mathscr{L}(E)$.
2. *Montrer que pour tous* $u, h \in \mathscr{L}(E)$,
$$\|Df(u)(h) - 2h\| \leq 2\|h\| \cdot \|u - I\|$$
et
$$\|Df(u) - 2\mathcal{I}\| \leq 2\|u - I\|,$$
où $\mathcal{I} = id_{\mathscr{L}(E)}$ *désigne l'application identitque de* $\mathscr{L}(E)$.
3. *En déduire que pour tout* $u \in B$, $Df(u)$ *est un isomorphisme de* $\mathscr{L}(E)$ *sur* $\mathscr{L}(E)$.
4. *Considérons l'application* $g : \mathscr{L}(E) \longrightarrow \mathscr{L}(E)$ *définie par* $g(u) = f(u) - 2u$.
   (a) *Vérifier que l'application* g *est différentiable et montrer que*
   $$\|g(u) - g(v)\| \leq \|u - v\| \quad \text{pour tous } u, v \in B.$$
   (b) *En déduire que la restriction de* f *à* B *est injective.*
5. *Montrer que* f *est un* C^1*--difféomorphisme de* B *sur* $f(B)$.

Exercice 4. *Soit* E *un espace vectoriel normé et soit* $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow E$ *une application de classe* C^2. *On suppose qu'il existe des constantes* $A > 0$ *et* $B > 0$ *telles que* $\|\phi(x)\| \leq A$ *et* $\|\phi''(x)\| \leq B$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

1. *En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2 entre x et $x+h$ puis entre x et $x-h$ montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, on a:*

$$\|\phi'(x)\| \leq \frac{A}{h} + B\frac{h}{2}.$$

2. *En déduire que $\|\phi'(x)\| \leq \sqrt{2AB}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

3. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ une application de classe C^∞. On suppose que les dérivées d'ordre pair admettent dans $\mathbb{R}$ une majoration de la forme*

$$\left\|f^{(2n)}(x)\right\| \leq M \times (2n)! \times k^{2n},$$

où M et k sont des constantes > 0, indépendantes de n.

   (a) *Quelles majorations peut-on en déduire pour les dérivées de f d'ordre impair?*

   (b) *En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ la série de Taylor $\sum_{n \geq 0} (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ converge vers $f(x)$ en tout point x d'un voisinage ouvert de x_0 que l'on précisera.*

X

Université Moulay Ismaïl
F.S.T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable: Aziz ELBOUR

Année Universitaire: 2015/2016
LST-Maths Appliquées
Module M512

Examen de Rattrapage de Calcul différentiel (Durée: 2h)

(01-3-2016)

Exercice 1. *Soit E un espace préhilbertien réel. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par:*

$$f(x) = \ln\left(2 + \langle x, x \rangle\right), \quad \forall x \in E.$$

1. *Montrer que f est différentiable sur E et calculer $Df(x)(h)$ pour tous $x, h \in E$.*
2. *Montrer que pour tous $x, y \in E$ on a:*
$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|x - y\|.$$
3. *En admettant que f est deux fois différentiable sur E, calculer $D^2 f(0)(h, h)$ pour tout $h \in E$. En déduire que $f(h) = \ln(2) + \frac{1}{2}\|h\|^2 + o\left(\|h\|^2\right)$.*

Exercice 2. *On considère le système d'équations suivant:*

$$\begin{cases} xz + \cos(xy) - e^z = 0 \\ e^{x+2y} - \sin(x+z) + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Montrer qu'au voisinage de $(0,0,0)$ les solutions de ce système sont de la forme $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$, où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions numériques de classe C^1 sur un voisinage ouvert de 0. Calculer $\varphi_1'(0)$ et $\varphi_2'(0)$.

Exercice 3. *Soit E un espace de Banach, et soit $\varphi : E \longrightarrow E$ une application de classe C^1. On suppose qu'il existe une constante $k \in [0, 1[$ telle que*

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq k\|x - y\| \qquad \forall (x, y) \in E^2. \tag{*}$$

On considère l'application $f : E \longrightarrow E$ définie par $f(x) = x - \varphi(x)$.

1. *Montrer que $\|D\varphi(x)(h)\| \leq k\|h\|$ pour tous $x, h \in E$.*
   (Indication: on pourra utiliser la relation $D\varphi(x)(h) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\varphi(x+th) - \varphi(x)}{t}$)
   En déduire que $\|D\varphi(x)\| \leq k$ pour tout $x \in E$.
2. *Vérifier que f est de classe C^1 sur E et montrer que pour tout $x \in E$, $Df(x) \in \mathrm{Isom}(E, E)$.*
3. *Montrer que f est une bijection de E sur E.*
4. *En déduire que f est un C^1-difféomorphisme de E sur E.*

12 Gm.

Université Moulay Ismaïl
F.S.T. Errachidia
Département de Mathématiques
LST-Maths Appliquées

Année Universitaire: 2014/2015
Élément de Module M1109
Calcul différentiel
Responsable: Aziz ELBOUR

Examen

(session de Janvier)

Durée: 1h 30mn

N.B. Il sera tenu compte de la lisibilité et de la clarté de la rédaction.

Comme l'exercice 08

Exercice 1. *Soit H un espace hilbertien réel, et soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \sqrt{1 + \langle x, x\rangle}$.*

1) *Montrer que f est différentiable en tout point x de H, et calculer $f'(x)$.*

2) *Montrer que pour tous $x, y \in H$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|.$$

Exercice 2. *Soit E un espace de Banach, et soit $\varphi : E \longrightarrow E$ une application de classe C^1 telle que $c = \sup_{x\in E} \|\varphi'(x)\| < 1$. On définit la fonction $f : E \longrightarrow E$ par $f(x) = x - \varphi(x)$.*

On va montrer que f est un C^1-difféomorphisme de E sur E.

1) *Montrer que f est de classe C^1 sur E et que pour tout $x \in E$, $f'(x) \in \mathrm{Isom}(E, E)$*

2) *Montrer que pour tous $x, y \in E$,*

$$\|f(x) - f(y)\| \geq (1 - c)\|x - y\|.$$

3) *Montrer que f est une bijection de E sur E.*

4) *Conclure.*

Exercice 3. *Montrer que l'équation*

$$\cos(x + y) = 1 + x + 2y$$

définit implicitement au voisinage de $(0, 0)$ une fonction φ de classe C^1 telle que

$$\cos(x + \varphi(x)) = 1 + x + 2\varphi(x).$$

Calculer $\varphi'(0)$.

Université Moulay Ismaïl
F.S.T. Errachidia
Département de Mathématiques
LST-Maths Appliquées

Année Universitaire: 2014/2015
Élément de Module M1109
Calcul différentiel
Responsable: Aziz ELBOUR

Examen
(session de Juin)
Durée: 1h 30mn

N.B. Il sera tenu compte de la lisibilité et de la clarté de la rédaction.

Exercice 1. *Soit H un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme associée. Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.*

1) *Montrer que f n'est pas différentiable en 0.*

2) *Montrer que f est différentiable en tout point $x \neq 0$ de H, et calculer $f'(x)$.*

Exercice 2. *On munit l'espace $E = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ du produit scalaire habituel $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$. Soit $\varphi : E \longrightarrow E$ une application de classe C^1. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que*

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle \varphi(x) - \varphi(y), x - y\rangle \geq k\,\|x - y\|^2 . \qquad (*)$$

1) *En utilisant la définition de la différentielle de φ en un point $x \in E$, montrer que $\forall x \in E$, $\forall h \in E$,*

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{\varphi(x+th) - \varphi(x)}{t} = \varphi'(x)(h)$$

2) *Déduire de $(*)$ que $\forall x \in E$, $\forall h \in E$,*

$$\langle \varphi'(x)(h), h\rangle \geq k\,\|h\|^2 .$$

3) *Montrer que $\forall x \in E$, $\varphi'(x) \in Isom(E, E)$.*

4) *Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme de E sur E.*

Exercice 3. *On considère le système d'équations suivant:*

$$\begin{cases} x - 2y + \ln(1 + z^2) = 0 \\ \cos(x) + y + z = 1 \end{cases}$$

Montrer qu'au voisinage de $(0, 0, 0)$ les solutions de ce système sont de la forme $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$, où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions numériques de classe C^1 sur un voisinage ouvert de 0. Calculer $\varphi_1'(0)$ et $\varphi_2'(0)$.