

Examen d'Analyse 1 (durée : 2h)
Janvier 2020

Tout document est interdit. Le téléphone portable est également interdit.

Exercice 1.

Soit

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)$$

- 1) Peut-on prolonger f en une fonction continue, dérivable en $x = 0$?
- 2) Préciser alors la position de la courbe vis à vis de sa tangente.

Exercice 2. On considère deux réels strictement positifs a et b . On définit les suites (u_n) et (v_n) en posant $u_0 = a, v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ les relations de récurrence:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \right) \end{cases} \quad \begin{matrix} u_0 = a \\ v_0 = b \end{matrix}$$

1. Étant donné deux réels strictement positifs x, y , montrer que $\frac{x+y}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$. Dans quel cas a-t-on l'égalité?

2.

- a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, les nombres u_n et v_n sont bien définis et que $u_n \geq v_n$.
- b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
- c) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n - v_n|$.
Deducez-en que $(u_n - v_n)_{n \geq 0}$ est convergente vers 0 et concluez.

3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le produit $u_n v_n$.

4. Déduisez-en la limite commune des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 3.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

- 1) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $f_n(x) = 2$, admet une unique solution x_n dans $[0, +\infty[$. Calculer x_1 et x_2 .
b) Montrer que si $n \geq 2$, alors $x_n \in]0, 1[$.
c) En comparant les nombres $f_{n+1}(x_{n+1})$, $f_n(x_{n+1})$ et $f_n(x_n)$, montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante, puis convergente. On pose $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- 2) a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{n+1} = 0$.
b) Donner une formule pour $f_n(x)$ dès que $x \neq 1$.
c) En déduire $l = \frac{1}{2}$.
- 3) On pose $h_n = x_n - \frac{1}{2}$.
a) Montrer que $(\frac{1}{2} + h_n)^{n+1} = 2h_n$. En déduire que : $h_n = o((\frac{2}{3})^n)$.
b) Conclure que : $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}} + o(\frac{1}{2^n})$.

Bonne chance.

Examen d'Analyse 1 (Durée 2h)
Janvier 2019

Exercice 1

Pour tout entier non nul n , on pose

$$S_n(\alpha) = \ln(2\cos(\frac{\alpha}{3}) - 1) + \ln(2\cos(\frac{\alpha}{3^2}) - 1) + \dots + \ln(2\cos(\frac{\alpha}{3^n}) - 1)$$

$$= \sum_{k=1}^n \ln(2\cos(\frac{\alpha}{3^k}) - 1), \text{ où } \alpha \in]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[.$$

- ✓ (1) Montrer que $\cos(3x) = (2\cos(2x) - 1)\cos x$. ✓
- 4 (2) En déduire que $S_n(\alpha) = \ln(\cos \frac{\alpha}{2}) - \ln(\cos \frac{\alpha}{2 \cdot 3^n})$ ✓
- ✓ (3) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\alpha)$. ✓

Exercice 2

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x \cosh(x) - \cos x) e^x + 1}{x^3} - \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{4}{3}, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$\frac{8}{6} \quad \frac{4}{3}$

- DL (6)
(3)
- ✓ (1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
- ✓ (2) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ 1 - 2\sin^2 a = \cos 2a \\ \sin 2a = 2\sin a \cos a \end{cases}$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 2(x - 1) - \arctan(x)$.

- (1) Etudier la dérivabilité et la monotonie de la fonction f . ✓
- (2) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. ✓
- (3) Montrer que

$$\begin{cases} \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- (4) Ecrire le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(x)$.
En déduire l'équation de la tangente en 0 et la position relative de la courbe C_f par rapport à cette tangente.
- (5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique $\alpha \in]1, \sqrt{3}[$. (On rappelle que $\sqrt{3} \approx 1,73$ et $\pi \approx 3,14$).
- (6) Montrer qu'il existe $c \in]1, \alpha[$: $\frac{\pi}{4} = (\alpha - 1)f'(c)$.

Bonne Chance

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!}$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}$$

Usuel

si $f'(a) > 0$ ou $f'(a) < 0$ ou $f'(a) = 0$

6 f ou desou de la tangente

Examen d'Analyse 1 (durée: 1h30min)
Février 2020

Tout document est interdit. Le téléphone portable et la calculatrice sont également interdits.

Exercice 1.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x-1}$.

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f .
2. En déduire la tangente T_0 à C_f en 0 et leurs positions relatives.

Exercice 2.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{2}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{|u_n - \sqrt{2}|^2}{2}$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}$ et donner la limite de (u_n) .
4. Combien de termes de la suite faut-il calculer pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près?

Exercice 3.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f_n(x) = x^n + 2x^2 + x - 1.$$

- 1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$.
- 2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0, \frac{1}{2}[$ que l'on notera x_n .
- 3) Vérifier que pour chaque x fixé dans $[0, 1]$, la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est décroissante (c'est-à-dire, $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$).
- 4) En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
- 5) En citant proprement le résultat utilisé, en déduire que $(x_n)_{n \geq 1}$ est une suite convergente.
- 6) Par la méthode d'encadrement, montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^n = 0$. Puis en déduire la limite de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.

Bonne chance.

Examen d'Analyse (Durée 2h)

Février 2017

X

Exercice 1

- 35 ✓ (1) Comment la fonction $x \rightarrow \arctan(x)$ est-elle définie. Montrez qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez sa dérivée.
- ✓ (2) Montrer que la fonction $g : x \rightarrow \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez sa dérivée g' .
- ✓ (3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$.
- (4) Soit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$.
- (a) Donner une expression simple de $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- (b) Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 2

arcsin

- ✓ (1) Simplifier les expressions $\sin(\arcsin x)$ et $\cos(\arcsin x)$, $x \in [0, 1]$.
- (2) On définit la fonction
- $$x \rightarrow f(x) = \arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2}, x \in [0, 1]$$
- ✓ Montrer, en utilisant la formule d'addition du Sinus, que $\sin \circ f$ est une constante que l'on précisera.
- ✓ (3) En déduire la relation $\arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2} = \text{constante}, x \in [0, 1]$ et déterminer la constante.
- ✓ (4) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0, 1[$ et vérifier que votre résultat est en accord avec le résultat de la question précédente.

1 + 20

Exercice 3

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{e^x \sqrt{1+x} - \cos^2 x}{x}$$

- ✓ (1) Donner le développement limité de la fonction f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
- ✓ (2) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0, noté g .
- ✓ (3) Étudier la dérivabilité de g en 0.
- ✓ (4) Calculer la limite suivante: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \frac{3}{2}}{\ln(1+x)}$

Question de Cours

Montrer qu'une suite de réels qui est décroissante et minorée converge vers $l = \inf \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Bonne Chance

Examen d'Analyse (Durée 2h)
02 Juin 2016

Exercice 1

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a \sin x + 1$, où $a \in]-1, 1[$ est une constante.

- (1) Montrer qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = x_0$. ✓
- (2) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$, tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) \quad |f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|.$$

$a \cos(c) \quad |a| \cos(n) < 1$

On considère la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ définie par:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = f(x_n), \forall n \geq 1 \end{cases}$$

- (3) Montrer que, $\forall n \geq 1$, $|x_{n+1} - x_0| \leq \alpha |x_n - x_0|$.

- (4) En déduire que la suite (x_n) converge vers x_0 .

$$[x_n, x_0] \quad [x_0, x_{n+1}]$$

$$|f(x_{n+1}) - f(x_0)| < \alpha |x_n - x_0|$$

$$|x_{n+1} - x_0| < \alpha |x_n - x_0|$$

Dérivée

1/10

Exercice 2

$$\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$0 \leq \sqrt{x} \leq 1$

Soit g la fonction définie par $g(x) = \arcsin(\sqrt{x})$.

- (1) Déterminer le domaine de définition de g .
- (2) Vérifier que g est dérivable dans $]0, 1[$ et calculer sa dérivée.
- (3) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\frac{1}{2} \arccos(2x - 1) + \arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} \quad \checkmark$$

Exercice 3

Donner le développement limité d'ordre 4, au voisinage de 0, de la fonction suivante:

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

Bonne Chance

$$\ln \frac{\sin x}{x} \approx -\frac{x^2}{6}$$

Examen d'Analyse (Durée 3h)
Janvier 2015

Problème

Soit f une fonction définie sur $[1; +\infty[$ et ayant une dérivée f' continue et croissante. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = \sum_{n=1}^p f'(n)$.

- (1) En appliquant le théorème des accroissements finis à f sur un intervalle bien choisi, démontrer la relation suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f'(n) \leq f(n+1) - f(n) \leq f'(n+1).$$

- (2) Démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, u_p - f'(p) \leq f(p) - f(1) \leq u_p - f'(1).$$

- (3) Dans cette question on prend $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

- a) Vérifier que la suite (u_p) est monotone.
- b) En utilisant (2), montrer que la suite (u_p) est bornée.
- c) En déduire que la suite (v_p) de terme général $v_p = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^3}$ est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$.

- (4) Dans cette question on prend $f(x) = -\ln x$

- a) En utilisant (2), montrer que la suite $u_p \leq -\frac{1}{p} - \ln p$.
- b) En déduire que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} = +\infty$.

Exercice 1

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \exp\left(\frac{-x}{n}\right) - 2(1-x).$$

1. Dans cette question, l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

a) Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0; 1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$. TVI

c) Montrer que $f_{n+1}(x_n)$ est strictement positif.

2. On considère maintenant la suite de terme général x_n .

a) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

b) En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est convergente. On notera

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

3. Il s'agit de calculer x

a) Montrer que $(-\frac{x_n}{n})_n$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

b) Conclure. /

Exercice 2

En utilisant les développements limités calculer les limites suivantes:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}.$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e^{\cosh x}}{\cos x - \cosh x}.$

Bonne Chance

Examen d'Analyse I (Durée 2h)
Février 2016

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite réelle définie par:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{2^n}$.
- 2) En déduire que (u_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
- 3) En déduire que la suite (u_n) converge. Trouver sa limite.

Exercice 2

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.
- 2) Etudier la continuité, la dérivabilité et la continuité de la dérivée de f .

Exercice 3

Pour $m > 0$ un réel fixé, on considère la fonction g_m définie par

$$g_m(x) = \frac{m}{m+1-\sqrt{1-4x}}$$

- (1) Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $x \rightarrow \sqrt{1-x}$ obtenu en appliquant la formule de Taylor-Young.
- (2) Effectuer le développement limité d'ordre 1 de g_m en 0 et en déduire l'équation de la tangente au graphe de g_m en 0.
- (3) Effectuer le développement limité d'ordre 2 de g_m en 0 et étudier selon les valeurs de m les positions relatives du graphe de g_m par rapport à sa tangente en 0.
- (4) Préciser pour quelle valeur de m le développement limité d'ordre 2 est insuffisant pour répondre à la question de la position relative du graphe et de la tangente en 0. Effectuer un développement limité d'ordre 3 de g_m et préciser cette position.

Bonne Chance

$$\begin{array}{r|l} \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x & \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1 \\ - \frac{x^5}{120} - \frac{24}{240}x^3 + \frac{24}{120}x & \frac{24x}{120} \\ \hline \left(\frac{24}{240} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(1 - \frac{24}{120}\right)x & \end{array}$$

$$g_m''(x) = -2m \left(\frac{4}{m^3} + \frac{2}{m^2} \right) = -4(2-m)$$

Rattrapage d'Analyse (Durée 1h30 min)
Février 2015

Exercice 1

Pour $n \geq 2$, on pose

$$w_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

✓ Etudier la convergence de la suite (w_n) , puis calculer sa limite?

Exercice 2

En utilisant la définition, montrer que

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x - 1} = 4$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+1} = 0$

Exercice 3

Soit la fonction réelle f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x - \sinh x}{\sin x - \tanh x}$$

- (1) Montrer que f est prolongeable par continuité en une fonction réelle g dérivable en 0.
- (2) Étudier la position du graphe de g par rapport à la tangente pour $x = 0$.

Bonne Chance