

Examen d'Analyse (Durée 3h)

Juin 2014

Exercice 1

Soit $\alpha \geq 0$ et

$$S_n(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$$

- (1) Montrer que $(S_n(1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite divergente. *
- (2) Montrer que $\forall \alpha \in [0, 1]$, $(S_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente.
- (3) Montrer que $\forall \alpha > 0, \forall x > 0$

$$\frac{\alpha}{(x+1)^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{(x+1)^\alpha} \leq \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}.$$

Indication utiliser le Théorème des Accroissements Finis.

- (4) En remplaçant x par $1, 2, \dots, n$ et en sommant les inégalités obtenues, montrer que $(S_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge pour $\alpha > 1$.

Exercice 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = a, f(b) = b$ et soit $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ telle que $f(c) = g(c)$.

Indication: considérer la fonction h définie par $h(x) = f(x) - g(x), \forall x \in [a, b]$.

Exercice 3

- (1) Donner le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction réelle g donnée par

$$g(x) = (\cos x)^{x \cdot (\cot gx)}$$

$$\text{où } \cot gx = \frac{1}{\tan gx}$$

- (2) Résoudre l'équation différentielle suivante:

$$y'' - 2y' + y = 2\sinh(x).$$

Exercice 4

On considère les intégrales $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$

- (1) Montrer que $I = J$.
- (2) Calculer $I + J$ et en déduire les valeurs de I et J .
- (3) En déduire la valeur de l'intégrale $K = \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{1-x^2}}$

Bonne Chance

Poseons $\sin x + \cos x = k$.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{k} dx \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{k} dx$$

$$= \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \cos(\pi/2 - x) dx = \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \cos x dx$$

alors $u = (\pi/2 - x)$
 $du = -dx$

