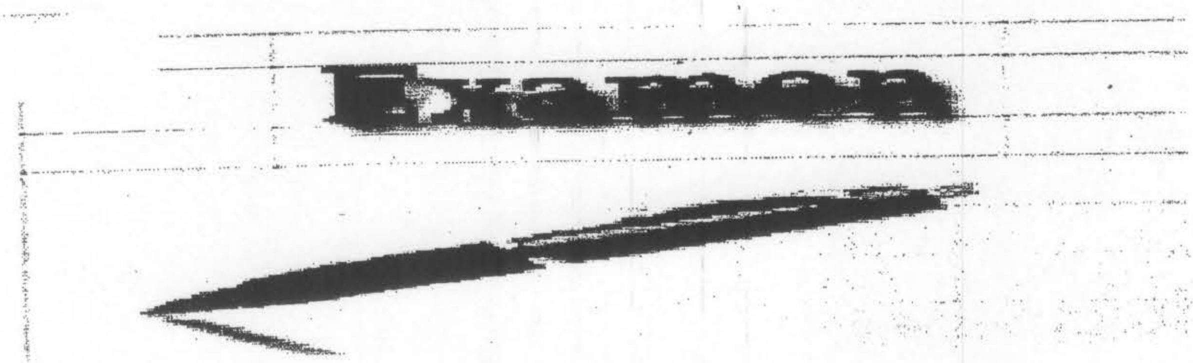
Université Hassan II

Faculté des Sciences et Techniques de Mohammadia

Département de Mathématique

10,–

Date le Mercredi 11 Novembre 2015



Module Probabilité –Statistique – MIP

S4

Durée 2h

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2017-2018
Module M147 - S4 - MIP
31 mai 2018

EXAMEN DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Durée 1h30

N.B.- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice 1 (6 points)

Dans cet exercice, on donnera tous les résultats sous la forme d'une valeur arrondie à 10^{-2}.

La répartition des employés d'une entreprise internationale selon le salaire mensuel brut exprimé **en milliers de dirhams** (variable X) et l'ancienneté exprimée en années (variable Y) est donnée dans le tableau suivant :

X \ Y	$[0,4[$	$[4,8[$	$[8,12[$	$[12,20[$	$[20,28[$
$[12,18[$	12	10	10	8	
$[18,22[$	8	14	5	4	4
$[22,30[$		6	5	6	3
$[30,42[$				2	3

1. Calculer la moyenne et l'écart-type du salaire mensuel pour l'ensemble des employés.
2. Calculer la moyenne et l'écart-type de l'ancienneté pour l'ensemble des employés.
3. Sachant que le coefficient de corrélation entre X et Y est égal à 0,45, donner l'équation de la droite de régression de X en fonction de Y. Quel est le point d'intersection de cette droite avec l'autre droite de régression de Y en fonction de X?
4. Déterminer la distribution (en pourcentage) de l'ancienneté des employés gagnant au moins 18000 dh.

Exercice 2 (7 points)

Dans cet exercice, on donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible sauf dans la question **4.b)** où on donnera une valeur arrondie à 10^{-2}.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 4 jetons numérotés de 1 à 4 et l'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.
Un jeu consiste à tirer un jeton de U_1, à noter son numéro, puis à tirer simultanément de U_2 un nombre de boules égale au nombre indiqué par le jeton tiré de U_1.
On considère les événements suivants :
$J_i =$ "le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro i", $1 \leq i \leq 4$
$B =$ "toutes les boules tirées de l'urne U_2 sont blanches".

1. Calculer $p(B|J_1)$ et $p(B|J_2)$.
   On admet dans la suite les résultats suivants : $p(B|J_3) = \frac{1}{30}$ et $p(B|J_4) = \frac{1}{210}$.

2. Montrer que la probabilité de l'événement B vaut : $p(B) = \frac{1}{7}$.
3. On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 3 ?
4. On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties où toutes les boules tirées sont blanches.

   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

   (b) Calculer la probabilité de l'événement $(X = 3)$.

Exercice 3 (7 points)

Dans cet exercice, on donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

La quantité de café (en Kg/jour) vendue par un marchant est une variable aléatoire continue X prenant ses valeurs dans l'intervalle $[1, 7]$ dont la fonction densité de probabilité est définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} k(x-1)(7-x) & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la constante k pour que f_X soit une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer la probabilité que la quantité vendue pendant une journée soit :

   (a) moins de 2 Kg

   (b) plus de 3 Kg

   (c) entre 2 et 3 Kg
4. On considère la variable aléatoire $Y = X - 4$ et on note F_Y la fonction de répartition de Y. On donne le résultat suivant :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -3 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^3}{108} & \text{si} \quad -3 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

   (a) Déterminer la fonction densité de probabilité de Y.

   (b) Calculer la médiane, l'espérance et la variance de Y.

   (c) En déduire la médiane, l'espérance et la variance de X.

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2017-2018
Module M147 - S4 - MIP
31 mai 2018

CORRIGÉS
EXAMEN DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUE
du 31 mai 2018

Exercice 1

1) Pour le caractère X, on peut résumer les calculs dans le tableau suivant :

Salaires (X) $[x_i, x_{i+1}[$	effectifs n_i	centres c_i	$n_i c_i$	$n_i c_i^2$
$[12, 18[$	40	15	600	9000
$[18, 22[$	35	20	700	14000
$[22, 30[$	20	26	520	13520
$[30, 42[$	5	36	180	6480
Total	100		2000	43000

√ **La moyenne :**
On a : $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum n_i c_i = \frac{2000}{100} = 20 \times 10^3$ DH.
√ **L'écart-type :**
On a : $\overline{X^2} = \frac{1}{N}\sum n_i c_i^2 = \frac{43000}{100} = 43 \times 10^7$.
Donc, $V(X) = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 30 \times 10^6$ et $\sigma(X) = 5477,23$ DH.

2) De même, on peut résumer les calculs, pour le caractère Y, dans le tableau suivant :

Ancienneté (Y) $[y_i, y_{i+1}[$	effectifs n_i	centres c_i	$n_i c_i$	$n_i c_i^2$
$[0, 4[$	20	2	40	80
$[4, 8[$	30	6	180	1080
$[8, 12[$	20	10	200	2000
$[12, 20[$	20	16	320	5120
$[20, 28[$	10	24	240	5760
Total	100		980	14040

√ **La moyenne :**
On a : $\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum n_i c_i = \frac{980}{100} = 9,8$ ans.
√ **L'écart-type :**
On a : $\overline{Y^2} = \frac{1}{N}\sum n_i c_i^2 = \frac{14040}{100} = 140,40$.
Donc, $V(Y) = \overline{Y^2} - \overline{Y}^2 = 44,36$ et $\sigma(Y) = 6,66$ ans.

3) On a : $X = aY + b$ avec :
$a = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)} = r(X,Y)\frac{\sigma(X)\sigma(Y)}{V(Y)} = r(X,Y)\frac{\sigma(X)}{\sigma(Y)} = 0,45\frac{5477,23}{6,66} \simeq 370,06,$
$b = \overline{X} - a\overline{Y} = 20000 - 370,06 \times 9,8 \simeq 16373,37.$
Donc, l'équation de la droite de régression de X en fonction de Y est donnée par :

$$X = 370,06\,Y + 16373,37$$

②

Le point d'intersection de cette droite avec l'autre droite de régression de Y en fonction de X est le point moyen G de coordonnées $(\overline{X}, \overline{Y})$.

4) Distribution (en pourcentage) de l'ancienneté des employés gagnant au moins 18000 dh :
Il s'agit de la distribution de $(Y|X \geq 18000)$. Elle est donnée par le tableau suivant :

$(Y\|X \geq 18000)$	$[0,4[$	$[4,8[$	$[8,12[$	$[12,20[$	$[20,28[$	Total
Effectifs	8	20	10	12	10	60
Pourcentage	$\frac{8}{60} = 13,33\%$	33,33%	16,67%	20%	16,67%	100%

Exercice 2

On a $p(J_1) = p(J_2) = p(J_3) = p(J_4) = \frac{1}{4}$.

1) On a :

$$p(B|J_1) = \frac{C_4^1}{C_{10}^1} = \frac{2}{5},$$
$$p(B|J_2) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15},$$
$$p(B|J_3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30},$$
$$p(B|J_4) = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210},$$

2) D'après la formule des probabilités totales, on a : $p(B) = \sum_{i=1}^{4} p(B|J_i) \times p(J_i)$.

D'où $p(B) = (\frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{210}) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{7}$.

3) Cette question consiste à calculer $p(J_3|B)$.

On a : $p(J_3|B) = \dfrac{p(B|J_3) \times p(J_3)}{p(B)} = \dfrac{\frac{1}{30} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{7}} = \dfrac{7}{120}$.

4-a) Dans cette question, la variable aléatoire X désigne le nombre de succès (parties où toutes les boules tirées sont blanches) obtenus après $n = 10$ répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli (jouer une fois à ce jeu) de paramètre $p = \frac{1}{7}$. Donc, X vérifie les conditions d'une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{7}$.

4-b) $p(X = 3) = C_{10}^3 (\frac{1}{7})^3 (\frac{6}{7})^7 \simeq 0,12$

Exercice 3

1) $f_X(x)$ doit vérifier $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.

On a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f_X(x)dx + \int_{1}^{7} f_X(x)dx + \int_{7}^{+\infty} f_X(x)dx$. Donc,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_1^7 k(x-1)(7-x)dx = \int_1^7 k(-x^2 + 8x - 7)dx = k\left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 7x\right]_1^7 = 36k.$$

Donc, on doit avoir $k = \frac{1}{36}$.

2) On a : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$. Donc :

$\surd$ si $x \leq 1$, $F_X(x) = 0$,

$\surd$ si $1 \leq x \leq 7$, $F_X(x) = \int_1^x \frac{(-t^2+8t-7)}{36}dt = \frac{1}{36}\left[-\frac{t^3}{3}+4t^2-7t\right]_1^x = \frac{-x^3}{108}+\frac{x^2}{9}-\frac{7x}{36}+\frac{5}{54}$,

$\surd$ si $x \geq 7$, $F_X(x) = \int_1^7 f_X(t)dt + \int_7^x f_X(t)dt = 1$,

Donc la fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{-x^3}{108}+\frac{x^2}{9}-\frac{7x}{36}+\frac{5}{54} & \text{si } 1 \leq x \leq 7 \\ 1 & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

3) On a :

a) $p(X < 2) = F_X(2) = \frac{2}{27}$,

b) $p(X > 3) = 1 - F_X(3) = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$,

c) $p(2 < X < 3) = F_X(3) - F_X(2) = \frac{7}{27} - \frac{2}{27} = \frac{5}{27}$.

4) On pose $Y = X - 4$ et on donne :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -3 \\ \frac{-x^3}{108}+\frac{x}{4}+\frac{1}{2} & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

a) On a $f_Y(x) = F'_Y(x)$. D'où

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}-\frac{x^2}{36} & \text{si} \quad -3 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b)

$\surd$ **Médiane** : La médiane de Y vérifie l'équation $F_Y(x) = \frac{1}{2}$.

On a $F_Y(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-x^3}{108}+\frac{x}{4}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-x^3}{108}+\frac{x}{4} = 0 \Leftrightarrow x(27-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x^2 = 27$.

Donc, $M_e(Y) = 0$ (car $\sqrt{27} > 3$).

$\surd$ **Espérance** : On a $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)dx = \int_{-3}^{3}(\frac{x}{4}-\frac{x^3}{36})dx = 0$.

Remarque : On peut constater que $xf_Y(x)$ est impaire, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_Y(x)dx = 0$ (sans calcul).

$\surd$ **Variance** : On a $E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Y(x)dx = \int_{-3}^{3}(\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{36})dx = \left[\frac{x^3}{12}-\frac{x^5}{180}\right]_{-3}^{3} = \frac{9}{5}$.

Remarque : On peut constater que $x^2 f_Y(x)$ est paire, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Y(x)dx = 2\int_0^{+\infty} x^2 f_Y(x)dx$.

Donc, $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{9}{5}$.

c) On a $X = Y + 4$. D'où

$Me(X) = Me(Y) + 4 = 4$

$E(X) = E(Y) + 4 = 4$ et

$V(X) = V(Y) = \frac{9}{5}$.

3

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2017-2018
Module M147 - S4 - MIP
03 janvier 2018

ÉPREUVE DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Durée 2h00

Exercice 1 (5 points)

Afin d'étudier les disparités de salaires entre hommes et femmes, une enquête a été réalisée auprès du personnel ouvrier d'un secteur industriel. Les résultats concernant les salaires annuels en **milliers de dirhams** sont résumés dans les deux tableaux suivants :

Tableau 1 : Hommes

Salaire moyen	Médiane	Ecart-type	1^er^ quartile	3^ème^ quartile	Effectif total
$\overline{X}_H$=154	$M_e = 148$	$\sigma_H = 24,2$	$Q_1 = 127,5$	$Q_3 = 176,6$	$N_H = 180$

Tableau 2 : Femmes

Salaire annuel (10^3 dh)	$[100, 120[$	$[120, 140[$	$[140, 160[$	$[160, 200]$	Total
Nombre d'ouvrières	82	34	12	n_4	$N_F = 132, 134, 136, 138, 142$

1. Proposer, pour la distribution du salaire des hommes, en précisant les valeurs correspondantes :
   - deux indicateurs de tendance centrale;
   - deux indicateurs de dispersion;
   - deux indicateurs de dispersion relative.
2. Calculer le salaire annuel moyen des femmes.
3. Calculer l'écart-type de la distribution des salaires des femmes.
4. Entre les distributions des salaires des hommes et des femmes, quelle est la distribution la plus dispersée (la moins homogène) ?
5. Calculer le salaire annuel moyen de l'ensemble des ouvriers hommes et femmes de l'enquête.

Exercice 2 (4 points)

On lance n fois une pièce de monnaie. On suppose que la probabilité d'obtenir pile est égale à la probabilité d'obtenir face. Soient A et B les événements :
$A =$ "obtenir au plus une fois pile" ;
$B =$ "obtenir au moins une fois pile et au moins une fois face".

1. Pour $n = 2$, calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
   Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Mêmes questions pour $n = 3$.

Tournez la page

4

Exercice 3 (5.5 points)

Soit une urne U_1 contenant 3 boules rouges et 2 boules vertes et soit une urne U_2 initialement vide. On transfère au hasard 3 boules de l'urne U_1 vers l'urne U_2, puis on tire au hasard avec remise deux boules de l'urne U_2.

Soit X la variable aléatoire qui désigne le nombre de boules rouges transférées de U_1 vers U_2 et soit Y la variable aléatoire qui désigne le nombre de boules vertes tirées de U_2.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ? (Reconnaître une loi usuelle)
2. Soit $i \in X(\Omega)$. Quelle est la loi de probabilité conditionnelle de Y sachant que $(X = i)$? (Reconnaître une loi usuelle)
3. Montrer alors que
$$P(Y = j, X = i) = C_2^j \left(1 - \frac{i}{3}\right)^j \left(\frac{i}{3}\right)^{2-j} \frac{C_3^i C_2^{3-i}}{C_5^3}.$$
4. En déduire le tableau de la loi de probabilité conjointe du couple (X, Y).
5. En déduire la loi de probabilité marginale de Y.
6. Calculer la covariance de (X, Y). Conclure.

Exercice 4 (5.5 points)

On considère une variable aléatoire continue X dont la fonction densité de probabilité est définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^n & \text{si } 0 < x < 1; \quad (n = 2, 3, 4, 5, 6) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de la constante k.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. Calculer la moyenne et la variance de X.
4. On considère la variable aléatoire $Y = X^2$.
   (a) Montrer que
   $$P(X^2 \leq x) = \begin{cases} F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   (b) Déterminer alors la fonction de répartition de la variable Y.
   (c) En déduire la fonction densité de probabilité de Y.

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2017-2018
Module M147 - S4 - MIP
03 janvier 2018

CORRIGÉS
ÉPREUVE DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUE
du 03 janvier 2018

Exercice 1

1)
√ Deux indicateurs de tendance centrale : $\overline{X}_H = 154 \times 10^3$ DH; $M_e = 148 \times 10^3$ DH.
√ Deux indicateurs de dispersion : $\sigma_H = 24,2 \times 10^3$ DH; $\Delta Q = Q_3 - Q_1 = 49,1 \times 10^3$ DH.
√ Deux indicateurs de dispersion relative : $C_V = \dfrac{\sigma_H}{\overline{X}_H} = 15,71\%$; $\dfrac{\Delta Q}{M_e} = 33,18\%$.

2), 3) On peut résumer les calculs dans le tableau suivant :

Salaires (X) $[x_i, x_{i+1}[$	effectifs n_i	centres c_i	$n_i c_i$	$n_i c_i^2$
$[100, 120[$	82	110	9020	992200
$[120, 140[$	34	130	4420	574600
$[140, 160[$	12	150	1800	270000
$[160, 200[$	4	180	720	129600
Total	132		15960	1966400

√ **La moyenne :**
On a : $\overline{X}_F = \dfrac{1}{N}\sum n_i c_i = \dfrac{15960}{132} = 120,909 \times 10^3$ DH.

√ **L'écart-type :**
On a : $\overline{X^2} = \dfrac{1}{N}\sum n_i c_i^2 = \dfrac{1966400}{132} = 14896,9696 \times 10^6$.
Donc, $V_F(X) = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 277,961 \times 10^6$ et $\sigma_F(X) = 16,6722 \times 10^3$ DH.

4) Pour comparer les dispersions des deux distributions, on compare leurs coefficients de variation.
On a : $C_{V_H} = \dfrac{\sigma_H}{\overline{X}_H} = 15,71\%$ et $C_{V_F} = \dfrac{\sigma_F}{\overline{X}_F} = 13,8\%$.
Donc la distribution des salaires des hommes est plus dispersée que celle des femmes.

5) Le salaire annuel moyen est donné par : $\overline{X} = \dfrac{1}{N}(N_H \overline{X}_H + N_F \overline{X}_F)$. D'où :
$\overline{X} = \dfrac{180 \times 154 + 132 \times 120,909}{180 + 132} \simeq 140 \times 10^3$ DH.

Exercice 2

On pose X = nombre de piles obtenues lorsqu'on lance n fois une pièce de monnaie. On a X vérifie les conditions d'une loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{1}{2}$. Donc,
$p(X = k) = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\forall\, 0 \le k \le n$. Et on a :
$p(A) = p(X \le 1) = p(X = 0) + p(X = 1) = \dfrac{1+n}{2^n}$,
$p(B) = p(1 \le X \le n-1) = 1 - p(X = 0) - p(X = n) = 1 - \dfrac{2}{2^n}$,
$p(A \cap B) = p(X = 1) = \dfrac{n}{2^n}$.

1) Pour $n = 2$, on trouve $p(A) = \dfrac{3}{4}$, $p(B) = \dfrac{1}{2}$ et $p(A \cap B) = \dfrac{1}{2}$.

(5)

Dans ce cas, on a $p(A\cap B)\neq p(A)\times p(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

2) Pour $n=3$, on trouve $p(A)=\frac{1}{2}$, $p(B)=\frac{3}{4}$ et $p(A\cap B)=\frac{3}{8}$.
Dans ce cas, on a $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$ donc A et B sont indépendants.

Remarque : Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $n=3$.

Exercice 3

1) X vérifie les conditions d'une loi hypergéométrique de paramètres $N=5$, $N_1=3$ et $n=3$.

2) Sachant que $X=i$, la variable Y vérifie les conditions d'une loi binomiale de paramètres $n=2$, et $p=\frac{3-i}{3}$.

3) On a d'après les questions précédentes :
$p(X=i)=\frac{C_3^iC_2^{3-i}}{C_5^3},\quad i\in\{1,2,3\}$,
$p(Y=j|X=i)=C_2^j\left(1-\frac{i}{3}\right)^j\left(\frac{i}{3}\right)^{2-j},\quad j\in\{0,1,2\}$,
D'où
$p(Y=j,X=i)=p(Y=j|X=i)\times p(X=i)=C_2^j\left(1-\frac{i}{3}\right)^j\left(\frac{i}{3}\right)^{2-j}\frac{C_3^iC_2^{3-i}}{C_5^3}$.

4) On en déduit le tableau de la loi conjointe du couple (X,Y) :

X \ Y	0	1	2	Total
1	1/30	2/15	2/15	3/10
2	4/15	4/15	1/15	6/10
3	1/10	0	0	1/10
Total	2/5	2/5	1/5	1

5) La loi de probabilité de Y est déduite comme loi marginale du couple (X,Y) :

j	0	1	2	Total
$p(Y=j)$	2/5	2/5	1/5	1

6) On a :
$E(X)=np=n\frac{N_1}{N}=\frac{9}{5}$,
$E(Y)=(0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{2}{5})=\frac{4}{5}$,
$E(XY)=(1\times1\times\frac{2}{15}+1\times2\times\frac{2}{15}+2\times1\times\frac{4}{15}+2\times2\times\frac{1}{15}=\frac{6}{5}$,
d'où $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{6}{5}-\frac{36}{25}=-\frac{6}{25}$.
Conclusion : on a $Cov(X,Y)<0$ donc, les variables X et Y varient en sens contraire.

Exercice 4

1) $f_X(x)$ doit vérifier $\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=1$.

On a : $\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f_X(x)dx+\int_0^1f_X(x)dx+\int_1^{+\infty}f_X(x)dx$. Donc,
$\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=\int_0^1kx^3dx=k\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{k}{4}$.
Donc, on doit avoir $k=4$.

2) On a : $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)dt$. Donc :

$\surd$ si $x \leq 0$, $F_X(x) = 0$,
$\surd$ si $0 \leq x \leq 1$, $F_X(x) = \int_0^x 4t^3 dt = \left[t^4\right]_0^x = x^4$,
$\surd$ si $x \geq 1$, $F_X(x) = \int_0^1 f_X(t)dt + \int_1^x f_X(t)dt = 1$,
Donc la fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^4 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3)
$\surd$ **Espérance** : On a $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 4x^4 dx = \frac{4}{5}$.
$\surd$ **Variance** : On a $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 4x^5 dx = \frac{4}{6}$.
Donc, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{75}$

4) On pose $Y = X^2$.
a) On a

$$p(X^2 \leq x) = \begin{cases} p(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) On a $F_Y(x) = p(Y \leq x) = p(X^2 \leq x)$. Donc $F_Y(x)$ est définie par :

$$F_Y(x) = \begin{cases} F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et en tenant compte de $F_X(x)$, on obtient :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

c) on en déduit :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2018-2019
Module M147 - S4 - MIP
27 décembre 2018

EXAMEN DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Durée 1h30

Nom et Prénoms .... N° de place ....

Exercice 1 (6 points)

Dans cet exercice, on donnera tous les résultats numériques sous forme arrondie avec 2 chiffres après la virgule.

L'observation de la consommation énergétique quotidienne (en kwh) dans un local commercial durant une année a donné les résultats suivants :

Consommation	$[8,10[$	$[10,14[$	$[14,16[$	$[16,20[$	$[20,24[$
Effectif	55	60	80	120	50

1. Préciser la population étudiée, le caractère étudié et sa nature.
2. Calculer le mode, la médiane, la moyenne et l'écart-type.
3. Calculer la proportion des jours dont la consommation est comprise entre 11 et 22 kwh.

Exercice 2 (6 points)

Dans cet exercice, on donnera tous les résultats sous forme d'une fraction irréductible.

Le poids (en kilogramme) à la naissance des bébés dans une certaine population est une variable aléatoire X dont la fonction densité de probabilité, notée f_X, est définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} k(x-1) & \text{si} \quad 1 \leq x < 3 \\ k(5-x) & \text{si} \quad 3 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère le changement de variables $Y = X - 3$.

1. Exprimer la fonction de répartion de Y, notée F_Y, à l'aide de la fonction de répartition de X, notée F_X. (On ne demande pas de calculer la fonction de répartition de X).
2. En déduire la fonction densité de probabilité de Y, notée f_Y.
3. Déterminer la valeur de la constante k pour que f_Y soit une densité de probabilité.
4. Déterminer la fonction de répartition de Y.
5. Calculer l'espérance et la médiane de Y.
6. En déduire l'espérance et la médiane de X.
7. Quel est le pourcentage des bébés dont le poids à la naissance est supérieur à 3 kg ?
8. Quel est le pourcentage des bébés dont le poids à la naissance est compris entre 2 et 4 kg ?

Tournez la page

(7)

Exercice 3 (8 points)

Cet exercice est composé de 16 questions à choix multiples (QCM). Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. **Entourer la bonne réponse et barrer les deux mauvaises réponses.** La notation pour chaque question est la suivante : +0,5 point pour une réponse juste, -0,5 point pour une réponse fausse et 0 point si pas de réponse.

1. On lance 3 fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note respectivement c_1, c_2, c_3, le résultat de chaque lancer.

Quel est le nombre de résultats possibles ?	$\boxed{729}$	$\boxed{120}$	$\boxed{216}$

Quelle est la probabilité des événements suivants ?

$A =$ "Obtenir deux chiffres pairs"	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{20}$
$B =$ "Obtenir deux chiffres ≤ 4"	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{3}{5}$
$C =$ "Obtenir deux chiffres ≥ 4"	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{9}$
$D =$ "Obtenir trois chiffres c_1, c_2, c_3 tel que $c_1 \neq c_2 \neq c_3$"	$\frac{5}{54}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{5}{9}$
$E_1 =$ "Obtenir trois chiffres c_1, c_2, c_3 tel que $c_1 = c_2 = c_3$"	$\frac{2}{243}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{20}$
$E_2 =$ "Obtenir trois chiffres c_1, c_2, c_3 tel que $c_1 = c_2 < c_3$"	$\frac{5}{72}$	$\frac{5}{243}$	$\frac{1}{8}$
$E_3 =$ "Obtenir trois chiffres c_1, c_2, c_3 tel que $c_1 < c_2 = c_3$"	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{2}{243}$
$E_4 =$ "Obtenir trois chiffres c_1, c_2, c_3 tel que $c_1 < c_2 < c_3$"	$\frac{5}{9}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{5}{54}$
$E =$ "Obtenir trois chiffres c_1, c_2, c_3 tel que $c_1 \leq c_2 \leq c_3$"	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{13}{108}$

2. On suppose qu'une machine tombe en panne en moyenne 4 fois par année.
Dans cette partie, les réponses proposées sont données en arrondi avec 4 chiffres après la virgule.

Quelle est la probabilité des événements suivants ?

$A =$ "Avoir aucune panne durant un mois"	$0,0183$	$0,7788$	$0,7165$
$B =$ "Avoir deux pannes durant un mois"	$0,0243$	$0,0398$	$0,1465$
$C =$ "Avoir aucune panne durant une année"	$0,0183$	$0,7165$	$0,7788$
$D =$ "Avoir deux pannes durant une année"	$0,0243$	$0,1465$	$0,0398$
$E =$ "Avoir 8 mois sans panne durant une année"	$0,1954$	$0,0298$	$0,2221$
$F =$ "Le temps entre 2 pannes consécutives est ≥ 8 mois"	$0,0298$	$0,0695$	$0,9305$

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2018-2019
Module M147 - S4 - MIP
27 décembre 2018

CORRIGÉS
EXAMEN DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUE
du 27 décembre 2018

Exercice 1

1)
√ Population étudiée : les jours de l'année,
√ Caractère étudié : la consommation énergétique quotidienne,
√ Sa nature : quantitatif continu.

2) On peut résumer les calculs dans le tableau suivant :

Modalités $[x_i, x_{i+1}[$	effectifs n_i	amplitudes a_i	eff. corrigés h_i	eff. cumulés N_i	centres c_i	$n_i c_i$	$n_i c_i^2$
$[8, 10[$	55	2	55	55	9	495	4455
$[10, 14[$	60	4	30	115	12	720	8640
$[14, 16[$	80	2	80	195	15	1200	18000
$[16, 20[$	120	4	60	315	18	2160	38880
$[20, 24[$	50	4	25	365	22	1100	24200
Total	365					5675	94175

√ **Le mode :**
L'effectif corrigé le plus élevé est 80, donc $M_o \in [14, 16[$.
D'où $M_o = 14 + (16-14)\dfrac{(80-30)}{(80-30)+(80-60)} = \dfrac{108}{7} \simeq 15,43$ kwh/jour.

√ **La médiane :**
On a $G(M_e) = \dfrac{N}{2} = 182,5$, compris entre les effectifs cumulés 115 et 195. Donc $M_e \in [14, 16[$.
D'où $M_e = 14 + (16-14)\dfrac{(182,5-115)}{(195-115)} = \dfrac{251}{16} \simeq 15,69$ kwh/jour.

√ **La moyenne :**
On a : $\overline{X} = \dfrac{1}{N}\sum n_i c_i = \dfrac{5675}{365} = \dfrac{1135}{73} \simeq 15,55$ kwh/jour.

√ **L'écart-type :**
On a : $\overline{X^2} = \dfrac{1}{N}\sum n_i c_i^2 = \dfrac{94175}{365} = \dfrac{18835}{73}$.
Donc, $V(X) = \overline{X^2} - \overline{X}^2 \simeq 16,28$ et $\sigma(X) \simeq 4,03$ kwh/jour.

3) On a :
$Pr(11 \le X \le 22) = Pr(11 \le X \le 14) + Pr(14 \le X \le 16) + Pr(16 \le X \le 20) + Pr(20 \le X \le 22)$
$= \dfrac{1}{365}\left(\dfrac{14-11}{14-10} \times 60 + 80 + 120 + \dfrac{22-20}{24-20} \times 50\right) = \dfrac{270}{365} = \dfrac{54}{73} = 73,97\%$

Exercice 2

1) On a $F_Y(x) = p(Y \le x) = p(X \le x+3) = F_X(x+3)$.

2) On en déduit $f_Y(x) = F'_Y(x) = (F_X(x+3))' = (x+3)'F'_X(x+3) = f_X(x+3)$. D'où

$$f_Y(x) = \begin{cases} k(x+2) & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ k(2-x) & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

8

3) $f_Y(x)$ doit vérifier $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x)dx = 1$.

On a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x)dx = \int_{-\infty}^{-2} f_Y(x)dx + \int_{-2}^{0} f_Y(x)dx + \int_{0}^{2} f_Y(x)dx + \int_{2}^{+\infty} f_Y(x)dx$. Donc,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x)dx = \int_{-2}^{0} k(x+2)dx + \int_{0}^{2} k(2-x)dx = k\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{0} + k\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = 4k.$$

Donc, on doit avoir $k = \frac{1}{4}$.

Remarque : On peut constater que $f_Y(x)$ est paire, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x)dx = 2\int_{0}^{+\infty} f_Y(x)dx$

$= 2\int_{0}^{2} k(2-x)dx = 2k\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = 4k$.

4) On a : $F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} f_Y(t)dt$. Donc :

$\surd$ si $x \leq -2$, $F_Y(x) = 0$,

$\surd$ si $-2 \leq x \leq 0$, $F_Y(x) = \int_{-2}^{x} \frac{(t+2)}{4}dt = \left[\frac{t^2}{8} + \frac{t}{2}\right]_{-2}^{x} = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$,

$\surd$ si $0 \leq x \leq 2$, $F_Y(x) = \int_{-2}^{0} \frac{(t+2)}{4}dt + \int_{0}^{x} \frac{(2-t)}{4}dt = \frac{1}{2} + \left[\frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}\right]_{0}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$,

$\surd$ si $x \geq 2$, $F_Y(x) = 1$,

Donc la fonction de répartition de Y est donnée par :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

5)

$\surd$ Espérance : On a $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)dx = \int_{-2}^{0} \frac{(x^2+2x)}{4}dx + \int_{0}^{2} \frac{(2x-x^2)}{4}dx$.

Donc, $E(Y) = \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12}\right]_{0}^{2} = \frac{8}{12} - 1 + 1 - \frac{8}{12} = 0$.

Remarque : On peut constater que $xf_Y(x)$ est impaire, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)dx = 0$ (sans calcul).

$\surd$ Médiane : La médiane de Y vérifie l'équation $F_Y(x) = \frac{1}{2}$.

On a $F_Y(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} = 0$ *ou* $\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = -4$ *ou* $x = 4$.

Donc, $M_e(Y) = 0$ (seule solution possible, car $F_X(-4) = 0$ et $F_X(4) = 1$).

6) On a $X = Y + 3$. D'où

$E(X) = E(Y) + 3 = 3$

$Me(X) = Me(Y) + 3 = 3$

7) On a $p(X > 3) = 1 - p(X \leq 3) = 1 - p(Y \leq 0) = 1 - F_Y(0) = 0,5$.

Donc, 50% des bébés ont le poids à la naissance supérieur à 3 Kg. (Ce résultat est conforme avec l'interprétation de la médiane de X).

8) On a $p(2 \leq X \leq 4) = p(-1 \leq Y \leq 1) = F_Y(1) - F_Y(-1) = \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = 0,75$.

Donc, 75% des bébés ont le poids à la naissance compris entre 2 et 4 Kg.

Exercice 3 Je garde la bonne réponse et j'élimine les mauvaises réponses :

1. On lance 3 fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note respectivement c_1, c_2, c_3, le résultat de chaque lancer.

Quel est le nombre de résultats possibles ?			216

Quelle est la probabilité des événements suivants ?

$A =$ "Obtenir deux chiffres pairs"		$\frac{3}{8}$	
$B =$ "Obtenir deux chiffres ≤ 4"	$\frac{4}{9}$		
$C =$ "Obtenir deux chiffres ≥ 4"		$\frac{3}{8}$	
$D =$ "Obtenir trois chiffres c_1, c_2, c_3 tel que $c_1 \neq c_2 \neq c_3$"			$\frac{5}{9}$
$E_1 =$ "Obtenir trois chiffres c_1, c_2, c_3 tel que $c_1 = c_2 = c_3$"		$\frac{1}{36}$	
$E_2 =$ "Obtenir trois chiffres c_1, c_2, c_3 tel que $c_1 = c_2 < c_3$"	$\frac{5}{72}$		
$E_3 =$ "Obtenir trois chiffres c_1, c_2, c_3 tel que $c_1 < c_2 = c_3$"		$\frac{5}{72}$	
$E_4 =$ "Obtenir trois chiffres c_1, c_2, c_3 tel que $c_1 < c_2 < c_3$"			$\frac{5}{54}$
$E =$ "Obtenir trois chiffres c_1, c_2, c_3 tel que $c_1 \leq c_2 \leq c_3$"		$\frac{7}{27}$	

2. On suppose qu'une machine tombe en panne en moyenne 4 fois par année.

Quelle est la probabilité des événements suivants ?

$A =$ "Avoir aucune panne durant un mois"			0, 7165
$B =$ "Avoir deux pannes durant un mois"		0, 0398	
$C =$ "Avoir aucune panne durant une année"	0, 0183		
$D =$ "Avoir deux pannes durant une année"		0, 1465	
$E =$ "Avoir 8 mois sans panne durant une année"			0, 2221
$F =$ "Le temps entre 2 pannes consécutives est ≥ 8 mois"		0, 0695	

Exercice 4

Le poids (en kilogramme) à la naissance des bébés dans une certaine population est une variable aléatoire X dont la fonction densité de probabilité, notée f_X, est définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} k(x-1) & \text{si} \quad 1 \leq x < 3 \\ k(5-x) & \text{si} \quad 3 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de la constante k pour que f_X soit une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer l'espérance et la médiane de X.
4. Quel est le pourcentage des bébés dont le poids à la naissance est supérieur à 3 kg ?
5. Quel est le pourcentage des bébés dont le poids à la naissance est compris entre 2 et 4 kg ?

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2016-2017
Module M147 - S4 - MIP
22 mai 2017

ÉPREUVE DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

A.BELMAATI, A.FAHSI, M.MALIKI

Durée 1h30

Nom et Prénoms .... N° de place ....

N.B. - *Tous les résultats numériques doivent être arrondis avec 3 chiffres après la virgule.*
- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice 1

Un agriculteur investi dans l'élevage de vaches laitières d'une même race. Le tableau ci-dessous donne le volume annuel (en m^3) du lait produit (variable Y) en fonction du nombre de vaches laitières (variable X).

X	Nombre de vaches : x_i	7	8	11	15	17	21	26	31	34	41
Y	Volume de lait (en m^3) : y_i	12	23	31	47	52	58	69	87	108	133

On donne

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 211;; \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 620;; \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 5663; \quad \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 51594; \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 17032$$

1. Déterminer l'équation de la droite de régression du nombre de vaches par rapport au volume annuel du lait, en précisant la variable expliquée et la variable explicative. $X = a'Y + b'$
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Interpréter.
3. L'agriculteur veut atteindre une production annuelle de 149000 litres de lait (1 litre=1 dm^3). Donner une estimation du nombre de vaches qu'il devrait procurer pour réaliser son objectif.

Exercice 2

1. On lance un dé 22 fois.
   (a) Quelle est la loi de probabilité du nombre de fois d'apparition de la face numéro 5 ?
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir moins de 3 fois la face numéro 5 ? Binomiale.
2. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On tire une boule au hasard, on la remet dans l'urne et on y ajoute une boule de la même couleur. Quelle est la loi de probabilité du nombre de boules blanches dans l'urne ?
3. On répète cette expérience une deuxième fois. Quelle est la nouvelle loi de probabilité du nombre de boules blanches dans l'urne ?
4. A l'entrée de l'autoroute, un étudiant fait du stop. En cette saison, un automobiliste sur vingt s'arrête pour prendre un stoppeur.

Tournez la page

(a) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de véhicules que l'étudiant verra passer jusqu'à ce que un automobiliste s'arrête pour le prendre. Quelle est la loi de probabilité de X ?

(b) Quelle est la probabilité que l'étudiant voit passer au moins 6 voitures qui ne s'arrêtent pas ?

(c) Calculer le nombre maximal de voitures qu'il devra voir passer pour que la probabilité qu'un automobiliste s'arrête pour le prendre soit supérieure à 0,85 ?

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire réelle de densité de probabilité

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^2(x+1)} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition de X.
   Indication : On donne la décomposition en éléments simples
$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$
2. Calculer l'espérance et la variance de X si elles existent.
3. On considère la variable aléatoire $Y = \frac{X+1}{X}$. $= 1 + \frac{1}{x} > 1$
   (a) Déterminer la fonction de répartition $F_Y(y)$ de Y.
   (b) En déduire que Y a pour densité de probabilité
$$f_Y(y) = \begin{cases} a(1 - \frac{1}{y}) & \text{si } 1 < y < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   (c) Calculer l'espérance et la variance de Y si elles existent.
4. Déterminer la constante a.

Solution Examen M147 - II - 16.17

22 mai 2017

Exercice 1 (6 points)

(0,5) $\bar{x} = \frac{1}{10} \sum x_i = 21$ vaches

(0,5) $\bar{y} = \frac{1}{10} \sum y_i = 62 \text{ m}^3$

(0,5) $\overline{x^2} = \frac{1}{10} \sum x_i^2 = 564,6 \Rightarrow V(X) = 123,6$

(0,5) $\overline{y^2} = \frac{1}{10} \sum y_i^2 = 5159,4 \rightarrow V(Y) = 1315,4$

(0,5) $\overline{xy} = \frac{1}{10} \sum x_i y_i = 1699,1 \Rightarrow Cov(X,Y) = 397,1$

1) $X = aY + b$;

(0,5) $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)} = \frac{397,1}{1315,4} \simeq 0,302$ $\Rightarrow \boxed{X = 0,302Y + 2,283}$

(0,5) $b = \bar{x} - a\bar{y} \simeq 2,283$

(0,5) variable expliquée : X = nbr de vaches
variable explicative : Y = volume du lait

2) (1) $\boxed{r(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} \simeq 0,985}$; r proche de 1 $\Downarrow$ Très bon ajuste linéai

3) $150000 \text{ l} = 150 \text{ m}^3$.

$\Rightarrow X = a \times 150 + b$

(1,0) $\Rightarrow X = 47,566$, soit $\boxed{48 \text{ vaches}}$

Total 6 pts

Solution Examen M147 - 22 mai 2017

Exercice 2 (7 points)

1) Soit X = nbr d'apparition de la face numéro 5.

a) On a X = nbr de succès (face n°5) obtenu après $n=20$ répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli (lancer un dé) de paramètre $p = \frac{1}{6}$ (prob du succès).

Donc on reconnaît que la loi de X est la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=1/6$.

(1) cad $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(20, 1/6)$.

b) Calculons $p(X<2)$.

$$p(X<2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$$
$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{20} + C_{20}^{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{19} + C_{20}^{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{18}$$
$$= \frac{5^{18}}{6^{20}}\left(25 + 100 + 190\right)$$

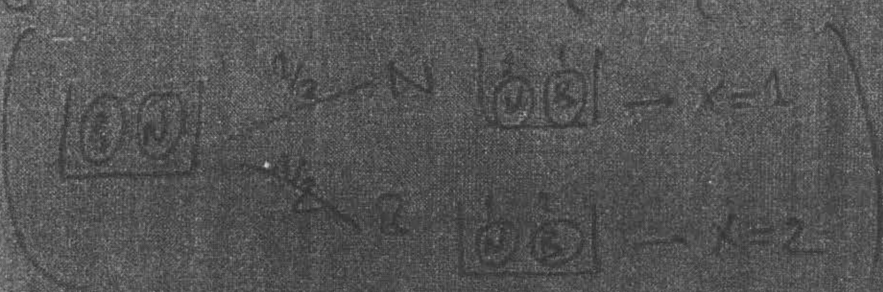
(1) $\Longrightarrow P(X<2) \simeq 0{,}329$

2) Soit X = nbr de boules blanches dans l'urne.

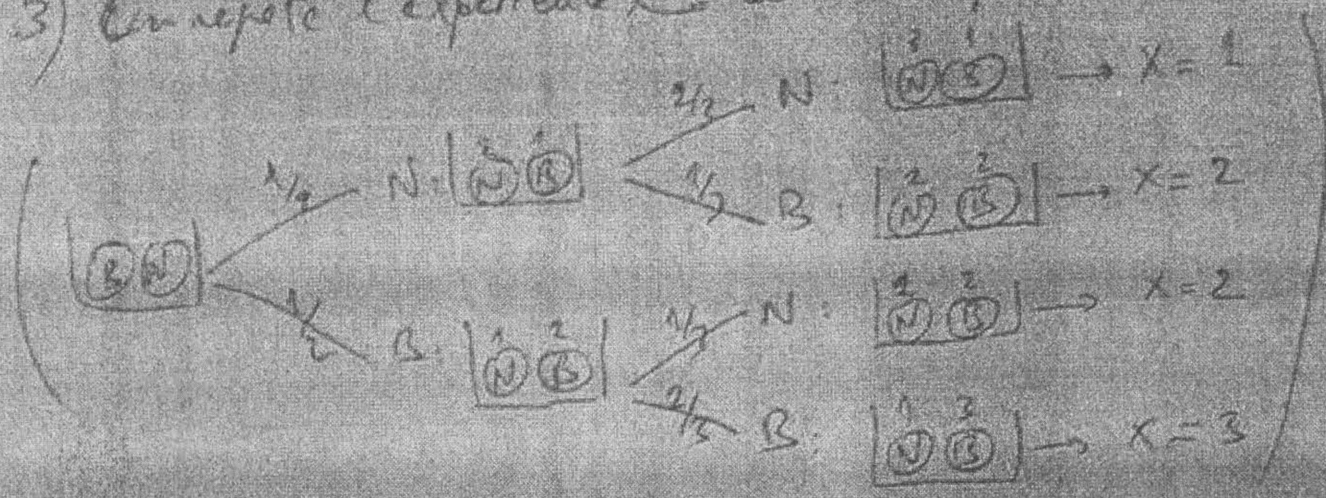
On a $X(\Omega) = \{1, 2\}$

On a $p(X=1) = 1/2$; $p(X=2) = 1/2$

(1) Donc $X \rightsquigarrow \mathcal{U}(2)$ (loi uniforme de paramètre 2).



3) On répète l'expérience une deuxième fois.



Dans ce cas, on a : $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.

et on a : $p(X=1) = P(NN) = p(N|N)\,p(N) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$p(X=2) = p(NB) + p(BN)$

$= p(B|N)\,p(N) + p(N|B)\,p(B)$

(1) $= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

$p(X=3) = p(BB) = p(B|B)\cdot p(B) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

donc $p(X=1) = p(X=2) = p(X=3) = \frac{1}{3}$.

donc $X \rightsquigarrow \mathcal{U}(3)$ (loi uniforme de paramètre 3)

4) a) On a X = nbr de répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli (passage d'un véhicule) de paramètre $p = \frac{1}{20}$ (probabilité qu'il s'arrête pour prendre un stoppeur = prob du succès) jusqu'à ce que un automobiliste s'arrête donc jusqu'à 1er succès.

(1) Donc on reconnaît que la loi de X est la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{20}$: $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(\frac{1}{20})$

(3)

Exercice 2 (suite)

a) On a $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{20}\right) : \begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ p(X=k) = \frac{1}{20}\left(\frac{19}{20}\right)^{k-1} \end{cases}$

b) Soit Y = nbr de voitures que l'étudiant voit passer avant le 1er succès.

On a $Y = X - 1$

Calculons $p(Y \geq 6)$:

On a $p(Y \geq 6) = p(X \geq 7) = 1 - \sum_{k=1}^{6} p(X=k)$

$\Rightarrow p(Y \geq 6) = 1 - \frac{1}{20} \sum_{k=1}^{6} \left(\frac{19}{20}\right)^{k-1} = 1 - \frac{1}{20} \cdot \frac{1 - \left(\frac{19}{20}\right)^6}{1 - \frac{19}{20}}$

(1) $\Rightarrow \boxed{p(Y \geq 6) = \left(\frac{19}{20}\right)^6 \simeq 0{,}735}$

c) Soit n_0 le nbr minimal de voiture qu'il devra voir passer $(Y < n_0)$ pour que la probabilité qu'un automobiliste s'arrête pour le prendre soit $> 0{,}9$

cherchons n_0 tq $p(Y < n_0) > 0{,}9$

$p(Y < n_0) > 0{,}9 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n_0+1} p(X=k) > 0{,}9$

$\Leftrightarrow \frac{1}{20} \sum_{k=1}^{n_0+1} \left(\frac{19}{20}\right)^{k-1} > 0{,}9 \Leftrightarrow \frac{1}{20} \cdot \frac{1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{n_0+1}}{\frac{1}{20}} > 0{,}9$

(1) $\Leftrightarrow \left(\frac{19}{20}\right)^{n_0+1} < 0{,}1 \Leftrightarrow (n_0+1) \ln\left(\frac{19}{20}\right) < \ln(0{,}1)$

$\Leftrightarrow (n_0+1) > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{19}{20}\right)} \Leftrightarrow n_0 > 43{,}89$ soit $\boxed{n_0 = 44}$

(4)

Solution Examen M147 _ 22 mai 2017

Exercice 3 (7 points)

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^2(x+1)} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

- si $x \leq 1$: $F_X(x) = 0$
- si $x > 1$: $F_X(x) = \int_1^x \frac{k}{t^2(t+1)}\,dt = \int_1^x k\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}\right)dt$

$\Rightarrow F_X(x) = k\left[-\frac{1}{t} + \ln\left(\frac{t+1}{t}\right)\right]_1^x = k\left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} + 1 - \ln 2\right]$

Donc
$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} k\left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} + 1 - \ln 2\right) & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

1,5

2) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{k}{x(x+1)}\,dx = k\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= k\left[\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^{+\infty} = k \ln 2$

1 Donc $\boxed{E(X) = k\ln 2}$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{k}{x+1}\,dx = k\left[\ln(x+1)\right]_1^{+\infty}$
$= \infty$

0,5 Donc $\boxed{\text{la variance de } X \text{ n'existe pas.}}$

5

3) Soit $Y = \frac{X+1}{X} = 1 + \frac{1}{X} = \varphi(X)$.

$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow \varphi$ est décroissante

mais φ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Donc φ n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$

a) $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{1}{X} \leq y-1\right)$

<u>1er cas</u>: si $y-1 \leq 0$, alors $F_Y(y) = P\left(-\infty < \frac{1}{X} \leq y-1\right)$

$$= P\left(\frac{1}{y-1} \leq X < 0\right)$$

$$= \underbrace{F_X(0)}_{=0} - \underbrace{F_X\left(\frac{1}{y-1}\right)}_{=0} = 0$$

<u>2ème cas</u>: si $y-1 \geq 0$, alors

$$F_Y(y) = P\left(\frac{1}{X} \leq y-1\right) = P\left(\left(-\infty \leq \frac{1}{X} \leq 0\right) \cup \left(0 \leq \frac{1}{X} \leq y-1\right)\right)$$

$$= \underbrace{P(-\infty \leq X \leq 0)}_{0} + P\left(\frac{1}{y-1} \leq X \leq \infty\right)$$

$$= P\left(X \geq \frac{1}{y-1}\right)$$

$$= 1 - F_X\left(\frac{1}{y-1}\right)$$

Donc

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 1 \\ 1 - F_X\left(\frac{1}{y-1}\right) & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

D'où

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 1 \\ 1 - k\left(\ln\left(\frac{\frac{1}{y-1}+1}{\frac{1}{y-1}}\right) - \frac{1}{\frac{1}{y-1}} + 1 - \ln 2\right) & \text{si } y \geq 1 \text{ et } \frac{1}{y-1} \geq 1 \\ 1 - 0 & \text{si } y \geq 1 \text{ et } \frac{1}{y-1} \leq 1 \end{cases}$$

6

Exercice 3 (suite)

Donc $\boxed{F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 1 \\ 1 - k\left(\ln y - y + 2 - \ln 2\right) & \text{si } 1 \leq y < 2 \\ 1 & \text{si } y \geq 2 \end{cases}}$ (1)

b) On a $f_Y(y) = F_Y'(y)$

D'où $f_Y(y) = \begin{cases} -k\left(\frac{1}{y} - 1\right) & \text{si } 1 \leq y < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (0,1)

c) On a $\cancel{E(Y) = E\left(1 + \frac{1}{X}\right)} = 1 + E\left(\frac{1}{X}\right) = E\left(\frac{X+1}{X}\right)$

On a $E(Y) = E\left(\frac{X+1}{X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x} f_X(x)\,dx$

(1) $\longrightarrow \boxed{E(Y) = \int_1^{+\infty} \frac{k}{x^3}\,dx = -\frac{k}{2}\left[\frac{1}{x^2}\right]_1^{+\infty} = \frac{k}{2}}$

Ou bien

$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_1^2 k(y-1)\,dy = k\left[\frac{y^2}{2} - y\right]_1^2$

$\longrightarrow \boxed{E(Y) = k/2}$

De même, on a $E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 f_X(x)\,dx = k\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^4}\,dx$
$=$

ou bien $E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\,dy = \int_1^2 k(y^2 - y)\,dy =$

On trouve $\boxed{E(Y^2) = \frac{5}{6}k}$

D'où $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$

0.5 $\Rightarrow \boxed{V(Y) = \frac{5}{6}k - \frac{k^2}{4}}$

4) On détermine k par l'une des méthodes suivantes

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy = 1$
- $\lim_{y \to 1} F_Y(y) = 0$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{k}{x^2(x+1)}\,dx = k\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) dx$

$$= k\left[-\frac{1}{x} - \ln x + \ln(x+1)\right]_1^{+\infty}$$

$$= k\left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]_1^{+\infty}$$

$$= k(1 - \ln 2)$$

D'où $\boxed{k = \frac{1}{1 - \ln 2}}$

1

On trouve $\boxed{E(Y^2) = \frac{5}{6}k}$

D'où $V(Y) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2$

0.5 $\Rightarrow \boxed{V(Y) = \frac{5}{6}k - \frac{k^2}{4}}$

4) On détermine k par l'une des méthodes suivantes :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy = 1$
- $\lim_{y \to 1} F_Y(y) = 0$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{k}{x^2(x+1)}\,dx = k\int_{1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)dx$

$$= k\left[-\frac{1}{x} - \ln x + \ln(x+1)\right]_1^{+\infty}$$

$$= k\left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]_1^{+\infty}$$

$$= k(1 - \ln 2)$$

D'où $\boxed{k = \frac{1}{1 - \ln 2}}$

1

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2016-2017
Module M147 - S4 - MIP
30 décembre 2016

ÉPREUVE DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Durée 2h00

Nom et Prénoms .... N° de place ....

N.B.- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice 1 (5 points)

Une enquête a été menée sur un échantillon de 1000 personnes (600 hommes et 400 femmes) afin d'étudier l'indice de masse corporelle, noté IMC (un des facteurs prédisposant aux affections cardio-vasculaires). Les tableaux suivants résument les résultats obtenus :

IMC chez les hommes	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Effectif	58	97	103	44	49	67	37	43	31	71

IMC chez les femmes	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Effectif	25	37	106	92	38	39	16	12	15	13	7

1. Déterminer les quartiles pour chacune des deux distributions.
2. Sur le même graphique, tracer puis interpréter la boîte à moustaches associée à chacune de ces distributions.
3. Pour un IMC strictement supérieur à 22 chez la femme et strictement supérieur à 23 chez l'homme, la personne est déclarée "à risque".
   Peut-on comparer, au vu des graphiques tracés précédemment, le pourcentage des femmes déclarées comme n'étant pas "à risque" à celui des hommes ?

Exercice 2 (4 points)

On choisit au hasard un comité de quatre personnes parmi huit marocains, cinq anglais et trois français. Calculer la probabilité des événements suivants :

$A =$ "Ce comité ne se compose que de marocains"

$B =$ "Aucun marocain ne figure dans ce comité"

$C =$ "Ce comité se compose d'une seule nationalité"

$D =$ "Au moins un membre de chaque nation figure dans ce comité"

Tournez la page

Exercice 3 (6 points)

Dans une urne contenant 4 boules rouges, 5 vertes et 3 blanches, on tire 2 boules successivement et sans remise. Soient X le nombre de boules rouges tirées et Y le nombre de boules vertes tirées.

1. Déterminer la loi conjointe des probabilités du couple (X, Y).
2. Déterminer les lois marginales des probabilités de X et de Y.
3. Calculer les probabilités suivantes : $p(X < 1, Y < 2)$, $p(X < 1 \mid Y < 2)$
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.
5. Calculer la covariance de (X, Y). Conclure.

Exercice 4 (5 points)

Une usine produit un grand nombre de pièces mécaniques. Chaque pièce a la probabilité 0.1 d'être défectueuse. Lors d'une inspection de contrôle de qualité, on a choisi au hasard un échantillon de 400 pièces. On note X le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi de X ? Justifier. Binomiale.
2. Par quelle loi usuelle continue peut-on approximer la loi de X ? Justifier. la loi Normal.
3. En utilisant cette approximation, avec correction de continuité, calculer la probabilité des événements suivants :

   $A =$ "45 pièces sont défectueuses"

   $B =$ "Au moins 45 pièces sont défectueuses"
4. Déterminer la valeur de a tel que $p(|X - 40| < a) \simeq 0,95$.

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Année universitaire 2015 - 2016
Module M147 - S4 - MIP
SP - P1 - 30 mars 2016

EXAMEN DE PROBABILITES ET STATISTIQUE

Durée 2h00

Nom et Prénoms [redacted]........................ N° de place ....

N.B.- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Exercice 1 (5 points)

On analyse le montant des achats (en dirhams) des clients d'un magasin que l'on a répartis dans les classes ci-dessous :

Classes	Effectif
[100, 300[	20
[300, 500[	40
[500, 900[	60
[900, 1300[	50
[1300, 1900[	30

1. Tracer l'histogramme et le polygone.
2. Calculer le mode, la médiane et la moyenne.
3. Calculer la proportion des clients dont le montant des achats est compris entre 1500 et 2000 dirhams.

Exercice 2 (4 points)

On estime que 10% des messages e-mails reçus par une entreprise sont des messages indésirables (en anglais SPAM). L'entreprise est intéressée par un logiciel anti-SPAM qui supprime automatiquement les messages qu'il considère comme indisérables.
On suppose que la probabilité qu'un message indisérable soit supprimé par ce logiciel est égale à 90% et que la probabilité qu'un message qui n'est pas indisérable soit supprimé est égale à 9%.
On choisit un message reçu au hasard. On définit les événements : $I =$ "le message est indésirable" et $S =$ "le message est supprimé".

1. Calculer la probabilité que le message reçu soit indisérable et soit supprimé.
2. Calculer la probabilité que le message reçu ne soit pas indisérable et ne soit pas supprimé.
3. Calculer la probabilité que le message reçu soit supprimé.
4. On suppose que le message reçu est supprimé, quelle est la probabilité qu'il soit un message non indésirable ?

Exercice 3 (5 points)

Un dé équilibré porte un point sur une de ses six faces, deux points sur deux autres faces et trois points sur les trois dernières faces. On note X la variable aléatoire désignant le nombre de points obtenus lors d'un lancer de ce dé.

1. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance et sa variance.
2. Après avoir lancé le dé, on lance une pièce de monnaie équilibrée autant de fois que le dé a montré de points et on note Y la variable aléatoire désignant le nombre de piles obtenus. Reconnître la loi de probabilité conditionnelle de Y sachant $(X = n)$, $1 \leq n \leq 3$.
3. Déterminer la loi de probabilité conjointe du couple (X, Y). (sous forme d'un tableau).
4. En déduire la loi de probabilité de Y.

Exercice 4 (6 points)

Soit X une variable aléatoire dont la fonction densité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{3} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{k}{x^3} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de la constante k.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer la médiane de X.
4. Calculer l'espérance de X.

Soit Y une variable aléatoire définie par $Y = 2 - 3X$.

5. Déterminer la loi de probabilité de Y.
6. Calculer l'espérance et la médiane de Y.

$\frac{13x}{24}$

$p(X < m) = 0,5$.

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Année universitaire 2015 - 2016
Module M147 - S4 - MIP
SA - P1 - 17 novembre 2015

EXAMEN DE RATTRAPAGE
Probabilités et Statistique

Exercice 1 (6 points)

On donne la série statistique suivante, correspondant à la répartition d'un groupe d'entreprises en fonction de leur chiffre d'affaire :

Chiffres d'affaires (millions de dh)	[0, 10[	[10, 20[	[20, 30[	[30, 50[	[50, 60[
Nombre d'entreprises	20	32	52	72	24

1. Tracer l'histogramme et le polygone des effectifs.
2. Calculer le mode, la médiane, la moyenne et l'écart-type.
3. Calculer la proportion d'entreprises dont le chiffre d'affaire est supérieur à 25 millions de dirhams.

Exercice 2 (6 points)

Soit X une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } x \in [1, 2[\\ \frac{1}{4} & \text{si } x \in [2, 4[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de la constante k.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Soit Y une variable aléatoire définie par $Y = 4 - 2X$.

4. Déterminer la fonction de répartition et la fonction densité de probabilité de Y.
5. Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 3 (4 points)

Dans une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10, on tire au hasard, successivement et avec remise 15 boules.
Pour tout entier k compris entre 1 et 10, On considère les événements suivants :
A_k : "Le plus grand des numéros tirés est $\leq$ à k"
B_k : "Le plus grand des numéros tirés est égal à k"

1. Calculer $p(A_k)$.
2. En déduire $p(B_k)$.
   Indication : On peut utiliser la relation : $A_k = A_{k-1} \cup B_k$.

Université Hassan II Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammadia
Département de Mathématiques

Année universitaire 2014 - 2015
Module M147 - S4 - MIP
SA - P1

EXAMEN DE RATTRAPAGE - 21 novembre 2014

Exercice 1 (6 points)

La distribution conjointe d'un groupe d'enfants selon leurs poids en Kg (caractère X) et leurs âges en annèes (caractère Y) est donnée dans le tableau suivant :

X \ Y	$[5,7[$	$[7,9[$	$[9,11[$	$[11,13[$
$[15,25[$	30	8	0	0
$[25,35[$	10	32	30	13
$[35,45[$	0	0	10	18
$[45,55[$	0	0	0	9

1) Quelle est la proportion des enfants ayant le poids compris entre 30 et 40 Kg ?
2) Calculer le mode et la médiane de la distribution marginale de X.
3) Déterminer la droite de régression de Y en fonction de X.
4) Mesurer la qualité de cette ajustement linéaire.

Exercice 2 (3 points)

Dans une entreprise, la probabilité pour qu'un ouvrier quitte l'entreprise dans l'année est 0,35 (événement A) et la probabilité pour qu'un cadre quitte l'entreprise est 0,6 (événement B).
1) En supposant ces deux événements indépendants, calculer la probabilité pour que :
a) Un ouvrier et un cadre quittent l'entreprise.
b) Ni ouvrier ni cadre ne quittent l'entreprise.
c) L'un des deux quitte l'entreprise.
2) Reprendre les questions précédentes en supposant que la probabilité pour qu'au moins l'un des deux quittent l'entreprise est égale à 0,75.

Exercice 3 (4 points)

1) On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3. L'urne U_1 contient 5 boules blanches et 15 boules noires, l'urne U_2 contient 10 boules blanches et 10 boules noires et l'urne U_3 contient 15 boules blanches et 5 boules noires. On choisit une urne au hasard puis, dans l'urne choisie, on tire une boule au hasard. On suppose que la boule chosie est noire.
Quelle est la probabilité qu'elle soit tirée de U_1 ?
2) Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. On tire au hasard 3 boules successivement et sans remise. Soit X la variable aléatoire désignant le plus petit des numéros tirés.
Déterminer la loi de probabilité de X. et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 4 (7 points)

Soit X une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer la constante k.
2) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
3) Calculer l'espérance et la variance de X.
4) Déterminer la fonction de répartition, la fonction densité de probabilité, l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y définie par $Y = 1 - \frac{X}{2}$.

Université Hassan II Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Année universitaire 2014 - 2015
Module M147 - S4 - MIP
SP - P1 - 15 avril 2015

EXAMEN DE RATTRAPAGE

Exercice 1 (6 points)

Le tableau suivant donne la distribution conjointe d'un couple de caractère X et Y :

X \ Y	$[5,7[$	$[7,9[$	$[9,11[$	$[11,13[$
$[15,25[$	30	8	0	0
$[25,35[$	10	32	30	13
$[35,45[$	0	0	10	18
$[45,55[$	0	0	0	9

1. Calculer le mode et la médiane de la distribution marginale de X.
2. Déterminer la droite de régression de Y en fonction de X.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

Exercice 2 (6 points)

Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateurs M_1 et M_2. Les deux modèles sont proposés en deux couleurs : noire et blanche.
D'après une étude sur les ventes, 70% des acheteurs ont choisi le modèle M_1 et, parmi eux, 60% ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20% des clients ayant acheté un ordinateur M_2 l'ont choisi de couleurs blanche.
Parmi les clients ayant acheté un ordinateur dans ce magasin, on choisit un au hasard.

1. Calculer la probabilité qu'il ait acheté un ordinateur M_2 de couleur noire.
2. Calculer la probabilité qu'il ait acheté un ordinateur de couleur noire.
3. Le client a acheté un ordinateur noire, quelle est la probabilité qu'il soit de marque M_2 ?

Exercice 3 (8 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. On pose $Z = X + Y$.

1. Montrer que Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
2. Montrer que la loi de probabilité conditionnelle de X sachant que $Z = n$ est une loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

A un péage d'une autoroute, liant deux villes A et B, le nombre de véhicules quittant la ville A suit une loi de Poisson de paramètre 16, celui des véhicules venant en sens inverse suit une loi de Poisson de paramètre 9.

3. Sachant qu'au total 100 véhicules ont franchi ce péage dans les deux sens, quelle est en moyenne le nombre de véhicules ayant franchi le péage dans chaque sens ?

Exercice 2 (3 points)

Un dé équilibré porte un point sur une de ses six faces, deux points sur deux autres faces et trois points sur chacune des trois dernières faces. On note X la variable aléatoire désignant le nombre de points obtenus lors d'un lancer de ce dé.

1) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance et sa variance.

2) Après avoir lancé le dé, on lance une pièce de monnaie (équilibrée) autant de fois que le dé a montré de points et on note Y la variable aléatoire désignant le nombre de piles obtenus. Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de Y sachant X.

3) Déterminer la loi de probabilité du couple (X, Y).

4) En déduire la loi de probabilité de Y.

Université Hassan II Mohammadia
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Année universitaire 2014 - 2015
Module M147 - S4 - MIP
SA - P1 - 13 novembre 2014

Nom et Prénoms .... N° de place ....

EXAMEN DE PROBABILITES ET STATISTIQUE

N.B. - *Tous les résultats numériques doivent être arrondis avec 3 chiffres après la virgule.*
- *Tout résultat non justifié ne sera pas considéré.*

Questions de cours (2,5 points)

1) Comment reconnaître si une variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres n et p ?
2) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. On suppose $n \geq 50$, $np \geq 10$ et $n(1-p) \geq 10$. Donner, sans calcul numérique, l'expression de la valeur approchée par une loi normale centrée réduite de : $p(X = k)$, $p(X \leq k)$, $p(X > k)$.

Exercice 1 (5,5 points)

La distribution conjointe d'un groupe d'enfants selon leurs poids en Kg (caractère X) et leurs âges en annèes (caractère Y) est donnée dans le tableau suivant :

X \ Y	$[5,7[$	$[7,9[$	$[9,11[$	$[11,13[$
$[15,25[$	28	8	0	0
$[25,35[$	12	32	30	13
$[35,45[$	0	0	10	18
$[45,55[$	0	0	0	9

1) Calculer le mode et la médiane de la distribution marginale de X.
2) Déterminer la droite de régression de X en fonction de Y.
3) Mesurer la qualité de cette ajustement linéaire.

Exercice 2 (3 points)

Dans une entreprise, la probabilité pour qu'un ouvrier quitte l'entreprise dans l'année est $1/5$ (événement A) et la probabilité pour qu'un cadre quitte l'entreprise est $1/8$ (événement B).
1) En supposant ces deux événements indépendants, calculer la probabilité pour que :
   a) Un ouvrier et un cadre quittent l'entreprise.
   b) Ni ouvrier ni cadre ne quittent l'entreprise.
   c) L'un des deux quitte l'entreprise.
2) Reprendre les questions précédentes en supposant que la probabilité pour qu'au moins l'un des deux quittent l'entreprise est égale à $1/4$.

Tournez la page ...

Exercice 3 (4 points)

1) On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 15 boules blanches et 5 boules noires et l'urne U_2 contient 10 boules blanches et 10 boules noires. On choisit une urne au hasard puis, dans l'urne choisie, on tire une boule au hasard. On suppose que la boule chosie est blanche. Quelle est la probabilité qu'elle soit tirée de U_1 ?

2) Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. On tire au hasard 3 boules successivement et sans remise. Soit X la variable aléatoire désignant le plus grand des numéros tirés. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 4 (5 points)

Soit T une variable aléatoire continue désignant la durée d'atterissage d'un avion sur la piste d'un aéroport (en minutes). La densité de probabilité de T est donnée par :

$$f(t) = \begin{cases} kte^{-2t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer la constante k.
2) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.
3) Quelle est la probabilité pour qu'un avion occupe l'espace d'atterissage plus de 2 mn ?
4) Quelle est la probabilité pour qu'un avion occupe l'espace d'atterissage moins de 4 mn sachant qu'il a dépassé 2 mn ?
5) Calculer l'espérance et la variance de T.

Université Hassan II Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Année universitaire 2014 - 2015
Module M147 - S4 - MIP
SP - P1 - 31 mars 2015

Nom et Prénoms .... N° de place ....

EXAMEN DE PROBABILITES ET STATISTIQUE

Questions de cours (2 points)

1) Montrer que les événements A, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cup B}$, forment un système complet.
2) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose $\lambda \geq 20$. Donner, sans calcul numérique, l'expression de la valeur approchée par une loi normale centrée réduite de : $p(X \leq k)$, $p(X > k)$.

Exercice 1 (5 points)

Le tableau suivant donne l'évolution d'une population (en milliers d'habitants) d'une nouvelle ville entre 1980 et 2010 :

Année (A)	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Nombre d'habitants (Y) (en milliers)	18	21	25	30	36	42	50

1. On pose $X = A - 1980$. Représenter le nuage statistique des variables X et Y.
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en fonction de X.
3. Quelle serait avec cet ajustement affine l'effectif de la population en 2012 ?
4. La forme du nuage suggère cependant une régression exponentielle. On pose $Z = \ln(Y)$.
   a) Déterminer l'équation de la droite de régression de Z en fonction de X.
   b) En déduire l'expression de l'ajustement exponentiel de Y en fonction de X.
   c) Quelle serait avec cet ajustement exponentiel l'effectif de la population en 2012 ?

On donne :

Y	18	21	25	30	36	42	50
$Z = \ln(Y)$	2,89	3,04	3,22	3,40	3,58	3,74	3,91

Exercice 2 (4 points)

Dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5, on tire au hasard, successivement et avec remise 3 boules. On note x_i le numéro de la ième boule tirée.
Calculer la probabilité des événements suivants :

a) $x_1 < x_2 < x_3$

b) $x_1 \leq x_2 \leq x_3$

c) $x_1 < x_2$

d) $x_1 \leq x_2$

e) Seulement deux numéros sont apparus au cours du tirage.

Tournez la page ...

1.1

2. Montrer que $p(X=k, S=n) = e^{-\lambda}\dfrac{(\lambda p)^k(\lambda q)^{n-k}}{k!(n-k)!}$ pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ et $k \leq n$.

3. Exprimer $p(X=k)$ en fonction des $p(X=k, S=n)$.

4. Montrer alors que X suit une loi Poisson de paramètre λp. (On rappelle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$)

5. De manière similaire, on conclut que la variable aléatoire Y, définie ci-dessus, suit une loi de Poisson de paramètre λq. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 3 (6 points)

La quantité de pain (en centaines de kilos) qu'une boulangerie vend en une journée est une variable aléatoire X dont la fonction densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 4 \\ k(8-x) & \text{si} \quad 4 \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de la constante k.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Déterminer m tel que $p(X \leq m) = 0.5$. Que représente m ?
4. Quelle est en moyenne la quantité de pain vendue en une journée ?
5. On considère les événements suivants :
   A : "le nombre de kilos de pain vendus dans une journée est supérieur à 400 kg"
   B : "le nombre de kilos de pain vendus dans une journée est compris entre 200 et 600 kg"
   Ces deux événements sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 3 (4,5 points)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.

1. Calculer $P(X > k), \ k \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que la loi de X est sans mémoire, i.e.

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^{*2}, \ P(X > n + k | X > k) = P(X > n)$$

On considère une deuxième variable aléatoire Y de même loi géométrique de paramètre p. On pose $Z = min(X, Y)$ et on suppose que X et Y sont indépendantes.

3. Montrer que $P(Z > k) = ((1-p)^2)^k$
4. Déduire que $P(Z = k) = p(2-p)[1-p(2-p)]^{k-1}, \ \forall k \in \mathbb{N}^*$.
5. Déduire l'espérance de Z.

Exercice 4 (4,5 points)

Soit X la variable aléatoire désignant la durée de fonctionnement d'un composant électronique d'un ordinateur (en années). On suppose que la densité de probabilité de X est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^3} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de la constante k.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Quelle est la probabilité pour que le composant électronique fonctionne plus de 18 mois ?
4. On suppose que le composant électronique fonctionne depuis 18 mois. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore dans 3 ans ?
5. Calculer la durée de vie moyenne du composant électronioque.

12