Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences et Techniques - Errachidia
Département de Mathématiques

A. U. 2020/2021
Filière MIP, Module M112
Responsable : PROF. JAWAD SALHI

Série de Travaux-Dirigés : 1
Rudiments de logique-Ensembles-Applications

Exercice 1 (Raisonnement par récurrence simple)
Montrer que pour tout $n \geq 3$, il existe des entiers $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels :

$$a_1 < \cdots < a_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1.$$

Exercice 2 (Raisonnement par récurrence double)
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u_0 = 4$, $u_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 3.$$

Exercice 3 (Raisonnement par récurrence forte)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle. On suppose que $u_0 \geq 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} u_k$.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 2^n u_0.$$

Exercice 4 (Raisonnement par l'absurde)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le réel $\sqrt{n^2+2}$ n'est pas un entier.

Exercice 5 (Raisonnement par contraposée)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$(n^2 - 1) \text{ n'est pas divisible par } 8 \Rightarrow n \text{ est pair.}$$

Exercice 6 (Raisonnement par analyse-synthèse (1))
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

Exercice 7 (Raisonnement par analyse-synthèse (2))
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

Exercice 8 ($\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents)
Montrer que l'application $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*, (n,p) \mapsto 2^n(2p+1)$ est bijective.
En déduire une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

Exercice 9
Soient E, F et G trois ensembles et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
6. Montrer que s'il existe $h : F \to E$ telle que $h \circ f = Id_E$ et $f \circ h = Id_F$, alors f est bijective et $f^{-1} = h$.

Exercice 10
Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Pour $A, B \subset E$ et $C, D \subset F$, montrer que :

1. Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$. En déduire que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. f est injective si et seulement si pour toutes parties A, B de E : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ et $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
5. $A \subset f^{-1}(f(A))$ avec égalité quand f est injective.
6. $f(f^{-1}(C)) \subset C$ avec égalité quand f est surjective.

Exercice 11
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Pout tout $x \in E$, notons $\bar{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$ la classe d'équivalence de x pour $\mathcal{R}$.
Montrer que l'ensemble des classes d'équivalences de E forme une partition de E (i.e. $E = \bigsqcup_{x \in E} \bar{x}$).
L'ensemble des classes d'équivalences de E pour $\mathcal{R}$ est appelé l'ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$ et souvent noté $E/\mathcal{R}$.

Exercice 12 (Théorème de Cantor)
En considérant la partie $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$, montrer qu'il n'existe pas de surjection f de E sur $\mathcal{P}(E)$.

Série de T.D : 1

EX 1 : On veut montrer que pour tout entier $n \geq 3$, il existe des entiers $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels :

$$a_1 < \dots < a_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1.$$

Raisonnons par récurrence :

- Initialisation : On a $2 < 3 < 6$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.
- Hérédité : Soit $n \geq 3$. Supposons que pour certains entiers $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$: $a_1 < \dots < a_n$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1$ et montrons qu'il existe $b_1, \dots, b_n, b_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$b_1 < \dots < b_n < b_{n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{b_k} = 1.$$

Pour cela, observons que $\frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{a_n(a_n+1)} = \frac{a_n+1}{a_n(a_n+1)} = \frac{1}{a_n}$.

Cela nous donne l'idée de poser : $b_k = a_k$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, puis : $b_n = a_n + 1$ et $b_{n+1} = a_n(a_n+1)$.

Par définition, on a bien $b_k \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$.

De plus, on a $b_1 < \dots < b_n < b_{n+1}$. En effet, par hypothèse de récurrence, on a $b_1 < \dots < b_{n-1} < b_n$ et comme $0 < \frac{1}{a_n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1$, alors $a_n > 1$ et donc $b_n < a_n b_n = b_{n+1}$.

Finalement, on a bien :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{b_k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{b_k} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_{n+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{a_n(a_n+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1.$$

D'où le résultat.

EX2 : $u_0 = 4$, $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

On veut montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3$.

Raisonnons par une récurrence double.

- Initialisation : $u_0 = 4 = 2^0 + 3$ et $u_1 = 5 = 2^1 + 3$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = 2^n + 3$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} + 3$ et on montre que $u_{n+2} = 2^{n+2} + 3$.

On a :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \overset{(HR)}{=} 3(2^{n+1} + 3) - 2(2^n + 3)$$

$$= (3-1)2^{n+1} + 9 - 6$$

$$= 2^{n+2} + 3.$$

Ce qui finit la récurrence.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3$.

EX3 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :

$$u_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} u_k .$$

On veut montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n \leq 2^n u_0$.

Raisonnons par récurrence forte.

- Initialisation : $u_0 \leq u_0 = 2^0 u_0$.

- Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que

$\forall k \in [\![0,n]\!]$: $u_k \leq 2^k u_0$

et montrons que $u_{n+1} \leq 2^{n+1} u_0$.

$$\text{On a : } u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k \overset{(HR)}{\leq} \sum_{k=0}^{n} 2^k u_0 = u_0 \sum_{k=0}^{n} 2^k .$$

$$\text{Or } \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^0 \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}-1 \leq 2^{n+1} .$$

Comme $u_0 \geq 0$, alors $u_0 \sum_{k=0}^{n} 2^k \leq 2^{n+1} u_0$.

D'où $u_{n+1} \leq 2^{n+1} u_0$, ce qui finit la récurrence.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \leq 2^n u_0$.

EX4 : On veut montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+2}$ n'est pas un entier.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{n^2+2}$ est un entier, disons $p = \sqrt{n^2+2}$.

Alors $p^2 = n^2 + 2$ et donc $(p-n)(p+n) = 2$.

Remarquons que $p-n$ et $p+n$ sont des entiers (Par hypothèse) et que $p+n \geq p-n$.

Donc $p+n = 2$ et $p-n = 1$.

Ainsi $p = \frac{3}{2}$, ce qui est absurde, car $p \in \mathbb{N}$.

Conclusion : $\sqrt{n^2+2}$ n'est pas un entier.

EX5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que :

(n^2-1) n'est pas divisible par $8 \Longrightarrow n$ est pair.

Raisonnons par contraposition et montrons que :

n est impair $\Longrightarrow$ 8 divise (n^2-1).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que n est impair, alors $n = 2\ell+1$ avec $\ell \in \mathbb{N}$.

Donc $n^2 = 4\ell^2 + 4\ell + 1$ et $n^2 - 1 = 4\ell(\ell+1)$.

Or $\ell(\ell+1)$ est pair et donc $\ell(\ell+1)$ s'écrit

$\ell(\ell+1) = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Donc $n^2-1 = 4 \times (2p) = 8p$.

Donc 8 divise (n^2-1). D'où le résultat.

EX6 :

On cherche l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquels pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(y - f(x)) = 2 - x - y$.

Raisonnons par analyse-synthèse.

- Analyse : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

En particulier : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 2 - x - f(x) \quad (y = f(x))$.

Donc $f(x) = (2 - f(0)) - x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Ainsi f est affine de la forme $x \longmapsto \lambda - x$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Synthèse : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons f la fonction $x \longmapsto \lambda - x$.

On a :

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(y - f(x)) &= f(y - (\lambda - x)) \\
&= f(x + y - \lambda) \\
&= \lambda - (x + y - \lambda) \\
&= 2\lambda - x - y.
\end{aligned}$$

Ainsi, la seule valeur de λ pour laquelle f satisfait le problème étudié est $\lambda = 1$.

Conclusion : la fonction $x \longmapsto 1 - x$ est la seule fonction du problème étudié.

Ex 7 : On cherche l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquels : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ |f(x) - f(y)| = |x - y|$.

Raisonnons par analyse - synthèse.

- Analyse : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Supposons que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ |f(x) - f(y)| = |x - y|$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x) - f(0)| = |x|$.

Considérons la fonction g définie par : $g(x) = f(x) - f(0)$

Ainsi, g satisfait : $|g(x)| = |x|, \ \forall x \in \mathbb{R}$

et $g(0) = 0$.

Donc $g = Id_{\mathbb{R}}$ ou $g = -Id_{\mathbb{R}}$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que : $g \neq Id_{\mathbb{R}}$ et $g \neq -Id_{\mathbb{R}}$.

Donc, $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{R}^*$ t.q. que $g(x_0) = x_0$ et $g(y_0) = -y_0$.

Ainsi $|g(x_0) - g(y_0)| = |x_0 + y_0|$.

Or, par définition de g, on a :

$$|g(x_0) - g(y_0)| = |f(x_0) - f(0) - (f(y_0) - f(0))|$$
$$= |f(x_0) - f(y_0)|$$
$$= |x_0 - y_0|.$$

Donc $|x_0 + y_0| = |x_0 - y_0|$.

En élevant au carré cette identité, on obtient :

$2x_0y_0 = -2x_0y_0$, c-à-d $x_0y_0 = 0$.

Donc $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$, ce qui est absurde.

D'où $g = Id_{\mathbb{R}}$ ou $g = -Id_{\mathbb{R}}$.

Ex 7 : (Suite)

Comme $g = Id_{\mathbb{R}}$ ou $g = -Id_{\mathbb{R}}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f(x) = x + f(0)$ ou $f(x) = -x + f(0)$.

On en déduit que f est affine de la forme

$x \longmapsto x + \lambda$ ou $x \longmapsto -x + \lambda$, (avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

- Synthèse : Il est facile de vérifier que les fonctions $x \longmapsto x + \lambda$ et $x \longmapsto -x + \lambda$ satisfont bien la propriété du problème étudié.

Conclusion : les fonctions cherchées sont les fonctions $x \longmapsto x + \lambda$ et $x \longmapsto -x + \lambda$ avec λ est une constante.

EX8 :

Soit $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^*$
$(n,p) \longmapsto 2^n(2p+1)$.

- Montrons que f est bijective.
- Injectivité : Soit $(n,p),(m,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$f(n,p) = f(m,q).$$

Alors $2^n(2p+1) = 2^m(2q+1)$.

Supposons par exemple $n \geq m$. On obtient donc :

$$\underbrace{2^{n-m}(2p+1)}_{\text{nombre pair}} = \underbrace{2q+1}_{\text{nombre impair}}.$$

~~si $n \neq m$~~

Si $n \neq m$, on a $2^{n-m}(2p+1)$ est pair alors que $(2q+1)$ est impair. Contradiction.

Donc $n = m$. On obtient alors $2p+1 = 2q+1$ et par suite $p = q$.

Finalement, on a bien : $f(n,p) = f(m,q) \Rightarrow (n,p) = (m,q)$.

D'où f est injective.

- Surjectivité : Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème fondamental de l'arithmétique, ℓ se décompose en produit de facteurs premiers : $\ell = 2^n p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, avec les p_i, $i \geq 2$ des nombres premiers impairs.

En utilisant le fait que le produit de nombres impairs est impair, alors $p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ est impair, c-à-d

$$p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} = 2p+1 \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}.$$

EX8 : (Suite)

On a donc $\ell = 2^n(2p+1) = f(n,p)$ et donc

f est surjective.

Conclusion : L'application f étant surjective et injective, alors f est bijective.

- Trouver une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

Comme f est bijective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$, il s'agit de composer f avec une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}$.

Soit $g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$
$\quad\quad n \longmapsto n-1$.

Il est facile de vérifier que g est bijective.

Ainsi, l'application $h = g \circ f : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{N}^* \xrightarrow{g} \mathbb{N}$
$\quad\quad (n,p) \longmapsto f(n,p) \longmapsto f(n,p) - 1$

est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

EX 9 : $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

① Supposons que f et g sont injectives.
Montrons que $g \circ f$ est injective.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. Supposons que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.

Alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.

Puisque g est injective, alors $f(x_1) = f(x_2)$.
Or, on sait que f est aussi injective et donc

$x_1 = x_2$.

On a montré que :
$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \ (g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.
D'où $g \circ f$ est injective.

② Supposons que f et g sont surjective.
Montrons que $g \circ f$ est surjective.
Soit $y \in G$. Il s'agit de montrer qu'il existe
$x \in E$ tel que $y = g \circ f(x)$.
Comme g est surjective, alors il existe $t \in F$
tel que $y = g(t)$.
D'autre part, on a $t \in F$ et f est surjective, donc
il existe $x \in E$ tel que $t = f(x)$.
Finalement, il existe $x \in E$ tel que $y = g(t)$
$= g(f(x))$
$= g \circ f(x)$.

D'où $g \circ f$ est surjective.

EX 9 : (Suite).

③ D'après ce qui précède, si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.

④ Supposons que $g \circ f$ est injective.
Montrons que f est injective.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. Supposons que $f(x_1) = f(x_2)$.
Alors, en composant avec la fonction g,
on obtient : $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.
Or $g \circ f$ est injective et donc $x_1 = x_2$.

On a montré que :
$$\forall (x_1, x_2) \in E^2 \ \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \right).$$
D'où f est injective.

⑤ Supposons que $g \circ f$ est surjective.
Montrons que g est surjective.
Soit $y \in G$. Il s'agit de montrer qu'il existe $x \in F$ tel que $y = g(x)$.
Comme $y \in G$ et $g \circ f$ est surjective, alors
il existe $t \in E$ tel que $y = g \circ f(t)$
$= g(f(t))$.

Ainsi, en posant $x = f(t) \in F$, on a bien $y = g(x)$.

D'où g est surjective.

EX 9 : (Suite).

⑥ Supposons qu'il existe $h : F \longrightarrow E$ telle que
$h \circ f = Id_E$ et $f \circ h = Id_F$.
Montrons que f est bijective et $f^{-1} = h$.
Puisque $h \circ f = Id_E$ (*) et que Id_E est injective,
alors d'après la question 4, f est injective.
De plus, puisque $f \circ h = Id_F$ et que Id_F est surjective,
alors d'après la question 5, f est surjective.
Finalement f est bijective.
Notons f^{-1} sa réciproque.
En composant par f^{-1} à droite les deux membres
de (*), on obtient : $h \circ f \circ f^{-1} = Id_E \circ f^{-1}$
et donc $h \circ Id_F = f^{-1}$.
D'où $h = f^{-1}$.

EX10 : $f : E \to F$ une application. $A, B \subset E$ et $C, D \subset F$.

① • Montrons que $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

Soit $y \in f(A)$. Alors, $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$.

Or $A \subset B$ et donc $x \in B$. D'où $y = f(x) \in f(B)$.

Ainsi $f(A) \subset f(B)$.

• Montrons que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Comme $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, alors d'après ce qui précède, on a $f(A \cap B) \subset f(A)$ et $f(A \cap B) \subset f(B)$.

Donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

② Montrons que f est injective $\Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{P}(E) : f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

$\Rightarrow$] Supposons que f est injective. Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

On a d'après la question ① : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Il reste à montrer que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Pour cela, soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors :

$\exists (x, x') \in A \times B$ tel que $y = f(x) = f(x')$.

Puisque f est injective, alors $x = x' \in A \cap B$ et

donc $y = f(x) \in f(A \cap B)$.

Finalement $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

$\Leftarrow$] Soit $(x, x') \in E$ tel que $f(x) = f(x') = y$.

Prenons $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$, alors $f(A) = f(B) = \{y\}$.

Comme $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ alors $f(A \cap B) = \{y\}$.

En particulier $A \cap B \neq \emptyset$ et donc $x = x'$.

D'où f est injective.

EX 10 : (Suite)

(3) Montrons que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

On a : $A \subset A \cup B$ et donc $f(A) \subset f(A \cup B)$

De même $B \subset A \cup B$ et donc $f(B) \subset f(A \cup B)$

D'où $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Réciproquement, soit $y \in f(A \cup B)$.

Alors : $\exists x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.

Il y a deux cas à envisager :

- Si $x \in A$, on a $y = f(x) \in f(A) \subset f(A) \cup f(B)$.
- Si $x \in B$, on a $y = f(x) \in f(B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Dans tous les cas, on a $y \in f(A) \cup f(B)$ et donc

$$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B).$$

D'où l'égalité.

(4) • Montrons que : $\forall C, D \in \mathcal{P}(F)$, $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

Soit $x \in f^{-1}(C \cup D)$, alors $f(x) \in C \cup D$.

Donc : $\left(f(x) \in C \text{ ou } f(x) \in D \right)$

Donc : $\left(x \in f^{-1}(C) \text{ ou } x \in f^{-1}(D) \right)$

Donc $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

D'où $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

EX10 (Suite)

Réciproquement, soit $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

Alors : $\left(x \in f^{-1}(C) \text{ ou } x \in f^{-1}(D) \right)$

Donc : $\left(f(x) \in C \text{ ou } f(x) \in D \right)$

Donc : $f(x) \in C \cup D$.

D'où $x \in f^{-1}(C \cup D)$. Ainsi $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$.

D'où l'égalité.

.. Montrons que : $\forall C, D \in \mathcal{P}(F)$, $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Soit $x \in f^{-1}(C \cap D)$, alors $f(x) \in C \cap D$.

Donc : $\left(f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D \right)$

Donc : $\left(x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \in f^{-1}(D) \right)$.

Donc : $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

D'où $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Réciproquement, soit $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Alors : $\left(x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \in f^{-1}(D) \right)$

Donc : $\left(f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D \right)$

$f(x) \in C \cap D$.

Donc : $x \in f^{-1}(C \cap D)$

Donc : $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cap D)$.

D'où l'égalité.

EX10 : (Suite)

⑤ Montrons que $A \subset f^{-1}(f(A))$ avec égalité si f est injective.

- Soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$ et donc $x \in f^{-1}(f(A))$.

Donc $A \subset f^{-1}(f(A))$.

- Supposons que f est injective.

Soit $x \in f^{-1}(f(A))$, alors $f(x) \in f(A)$.

Donc $\exists x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$.

Comme f est injective, alors $x = x'$ et donc $x \in A$.

D'où $f^{-1}(f(A)) \subset A$. D'où l'égalité.

⑥ Montrons que $f(f^{-1}(C)) \subset C$ avec égalité si f est surjective.

- Soit $y \in f(f^{-1}(C))$. Alors : $\exists x \in f^{-1}(C)$ tel que $y = f(x)$.

Puisque $x \in f^{-1}(C)$, alors $f(x) \in C$ et donc $y \in C$.

D'où $f(f^{-1}(C)) \subset C$.

- Supposons que f est surjective :

Soit $y \in C$. Puisque f est surjective, alors

$\exists x \in E$ tel que $y = f(x) \in C$.

Donc $x \in f^{-1}(C)$.

Ainsi $y = f(x) \in f(f^{-1}(C))$. D'où $C \subset f(f^{-1}(C))$.

D'où l'égalité.

EX 11 : R une relation d'équivalence sur E.

Montrons que l'ensemble des classes d'équivalences de E pour R forme une partition de E.

Il s'agit de montrer que les classes d'équivalences sont non vides, que leur réunion est E tout entier et qu'elles sont deux à deux égales ou disjointes.

- Comme R est une relation d'équivalence sur E, alors pour tout $x \in E$: $x R x$ (Par reflexivité). Donc $x \in \bar{x}$. En particulier : $\forall x \in E$, $\bar{x} \neq \emptyset$.

- Il est clair que $\bigcup_{x \in E} \bar{x} \subset E$.

  Réciproquement, soit $x \in E$.
  Or $x \in \bar{x}$ et donc $x \in \bigcup_{x \in E} \bar{x}$.
  Ainsi $E \subset \bigcup_{x \in E} \bar{x}$. D'où l'égalité $E = \bigcup_{x \in E} \bar{x}$.

- Soit $x, y \in E$. Montrons que $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont égales ou disjointes. Pour cela, supposons-les non disjointes et montrons qu'elles sont alors égales.
  Soit $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$. Par symétrie des rôles de x et y, il suffit de montrer que $\bar{x} \subset \bar{y}$. Soit donc $t \in \bar{x}$.
  Comme $z \in \bar{y}$ alors $y R z$.
  De même $z \in \bar{x}$ et donc $x R z$ et par symétrie on a aussi $z R x$. Par transitivité, on obtient donc $y R x$. Or $t \in \bar{x}$ et donc $x R t$.
  Ce qui entraîne que $y R t$. D'où $t \in \bar{y}$.
  D'où le résultat.

EX 12 :

Montrons qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

Soit $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une application.

On pose $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

Il s'agit de montrer qu'il n'existe pas d'élément $a \in E$ tel que $f(a) = A$.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un élément $a \in E$ tel que $f(a) = A$.

Alors on a deux possibilités :

- ou bien $a \in A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$ et alors par définition de A, $a \notin f(a) = A$ ce qui est absurde.

- ou bien $a \notin A = f(a)$ et alors par définition de A, on a $a \in A$, ce qui est aussi absurde.

Ainsi, on a montré par l'absurde que : $\forall x \in E,\ f(x) \neq A$.

Comme $A \in \mathcal{P}(E)$, nous pouvons conclure qu'il existe un élément de $\mathcal{P}(E)$ ne possédant pas d'antécédant par f et donc : f n'est pas surjective.

Donc : Il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.