Topologie générale

Exercice 1 1. Rappeler les définitions d'une borne supérieure (inférieure) d'un ensemble de nombres réels. Si A et B sont deux ensembles bornés non vides de $\mathbb{R}$, comparer avec $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ et $\inf B$ les nombres suivants :

(i) $\sup(A+B)$, (ii) $\sup(A\cup B)$, (iii) $\sup(A\cap B)$, (iv) $\inf(A\cup B)$, (v) $\inf(A\cap B)$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \subset \mathbb{R}^n$ on définit $d(x,A) = \inf_{a\in A} ||x-a||$. Trouver $d(0,\mathbb{R}-\mathbb{Q})$, $d(\sqrt{2},\mathbb{Q})$, $d(M,\mathcal{D})$ où $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{D}$ est la droite de vecteur unitaire (a,b,c).
3. Pour $A, B \subset \mathbb{R}^n$ on définit $d(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} ||a-b||$. Trouver $d(A,B)$ lorsque A est une branche de l'hyperbole $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ xy=1\}$ et B une asymptote.
4. On définit $\mathrm{diam} A = \sup_{a,b\in A} ||a-b||$. Quel est $\mathrm{diam}(]0,1[\cap\mathbb{Q})$? $\mathrm{diam}([0,1]\cap\mathbb{R}-\mathbb{Q})$?

Exercice 2 Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est union dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. (*Indication :* si $x \in O$ ouvert, considérer J_x qui est l'union des intervalles ouverts inclus dans O et contenant x). Énoncer un résultat similaire pour les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3 On va montrer que l'ensemble D des réels de la forme $p+q\sqrt{2}$ où p et q décrivent $\mathbb{Z}$, est dense dans $\mathbb{R}$.

1. Remarquer que D est stable par addition et multiplication.
2. Posons $u=\sqrt{2}-1$; montrer que pour tous $a<b$, on peut trouver $n \geqslant 1$ tel que $0<u^n<b-a$, puis $m\in\mathbb{Z}$ vérifiant $a<mu^n<b$.
   En déduire le résultat.

Exercice 4 Montrer que dans tout espace métrique (E,d) une boule fermée est un fermé, mais que l'adhérence d'une boule ouverte $B(a,r)$ ne coincide pas nécessairement avec la boule fermée $B'(a,r)$ (on pourra considérer dans $(\mathbb{R}^2, ||.||_\infty)$, $E=[0,1]\times\{0\}\cup\{0\}\times[0,1]$ et la boule centrée en $(\frac{1}{2},0)$ de rayon $1/2$).

Exercice 5 $(E,||.||)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que dans ce cas la boule fermée $B'(a,r)$ est l'adhérence de la boule ouverte $B(a,r)$.
2. Montrer que $\overline{B}(a,r)\subset\overline{B}(b,R) \iff r\leqslant R$ et $||a-b||\leqslant R-r$.

Exercice 6 1. Si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $||(x,y)|| = \max(|x+y|,|x-2y|)$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}^2$ et dessiner sa boule unité fermée.

2. Soit p,q deux normes sur $\mathbb{R}^n$, B_p et B_q leurs boules unités fermées. Montrer que
$$B_q \subset B_p \iff p \leqslant q.$$
   Que signifie $\frac{1}{2}B_p \subset B_q \subset 2B_p$? Exemples.

Exercice 7 On note $X = l^\infty$ l'espace des suites réelles bornées, et $Y = c_0$ l'espace des suites réelles tendant vers 0, tous deux munis de la métrique (à vérifier) $d(x, y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$. Montrer que Y est fermé dans X. Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans Y mais pas dans X.

Exercice 8 Soit $E = \{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}) \ ; \ f(0) = 0\}$. On pose

$$||f|| = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) + f'(x)|, \text{ et } N(f) = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)| + \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f'(x)|.$$

Montrer que ce sont deux normes équivalentes sur E.

Exercice 9 On désigne par $d(a, b)$ la distance euclidienne usuelle de $a, b \in \mathbb{R}^2$ et on pose

$$\delta(a, b) = \begin{cases} d(a, b) & \text{si } a, b \text{ sont alignés avec l'origine } O \\ d(0, a) + d(0, b) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$ ("distance SNCF") plus fine que la distance usuelle. Dans la suite, on suppose $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie associée à δ.
2. Soit H le demi-plan $\{(x, y) \ ; \ y > 0\}$; montrer que H est un ouvert ; déterminer $\overline{H}$.
3. Quelle est la topologie induite sur une droite vectorielle ; sur le cercle unité Γ ?
4. Lesquelles des transformations suivantes sont continues : homothéties de centre O ; rotations de centre O ; translations ?

Exercice 10
1. Montrer que $||f||_\infty = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$ et $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt$ sont deux normes sur $C([0, 1], \mathbb{R})$. Sont-elles équivalentes ?
2. Les deux métriques associées sont-elles topologiquement équivalentes ?

Exercice 11 Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$. Comparer les normes $N_1(f) = ||f||_\infty$, $N_2(f) = ||f||_\infty + ||f||_1$, $N_3(f) = ||f'||_\infty + ||f||_\infty$, $N_4(f) = ||f'||_1 + ||f||_\infty$.

Exercice 12 Soit (x_n) une suite d'un espace topologique X séparé ; on note A l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots\}$.

1. Toute valeur d'adhérence a de la suite est un point de $\overline{A}$: donner un exemple où a est un point isolé de A ; un exemple où a est un point d'accumulation dans A ; un exemple où a est un point d'accumulation dans $\overline{A} \backslash A$.
2. Montrer que tout point d'accumulation de A est valeur d'adhérence de la suite.

Exercice 13 Soit $\mathbb{R}^n$ considéré comme groupe additif muni de sa topologie usuelle. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose que 0 est isolé dans G. Montrer que tout point est isolé, que G est discret et fermé dans $\mathbb{R}^n$.

   On se restreint maintenant au cas $n = 1$.
2. Montrer qu'alors, G est soit $\{0\}$, soit de la forme $a\mathbb{Z}$, $a > 0$.
3. Montrer que si 0 est point d'accumulation, G est partout dense dans $\mathbb{R}$. En déduire ainsi les sous-groupes fermés de $\mathbb{R}$.
4. On considère $\alpha \notin \mathbb{Q}$; montrer que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$. En déduire les valeurs d'adhérence de la suite $(e^{2i\pi n\alpha})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Topologie générale

Indication 1 Vérifier que :

1. $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$;
2. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$;
3. $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$;
4. $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$;
5. $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \inf(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$;

Indication 2 Montrer que J_x est un intervalle ouvert ; que $J_x = J_y$ ou $J_x \cap J_y = \varnothing$. Et penser que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Indication 3 Pour trouver m, que prendriez-vous si on voulait seulement $m \in \mathbb{R}$?

Indication 4 Revenir à la définition de ce qu'est un “ensemble fermé” et de ce qu'est une “boule fermée”.

Indication 7 Une suite de l^∞ est notée $(x^p)_{p\in\mathbb{N}}$, pour chaque $p \geqslant 0$, x^p est elle même une suite $x^p = (x^p(0), x^p(1), x^p(2), \ldots)$.

Indication 8 Montrer
- $\|f\| \leqslant N(f)$;
- $\|f'\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f\|$;
- $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$.

Indication 10 – Montrer $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$.
- Par un contre-exemple, montrer qu'il n'existe aucune constante $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$ pour tout f.

Indication 11 Les seules relations sont :

$$N_1 \leqslant N_2 \leqslant 2N_1 \leqslant 2N_4 \leqslant 2N_3.$$

Topologie générale

Correction 1

1. A une partie non vide de $\mathbb{R}$, un *majorant* de A est un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \in A \qquad x \leqslant M.$$
Si A est un partie non vide et majorée, alors par définition $\sup A$ est le plus petit des majorants. On a les propriétés suivantes :
   (a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$;
   (b) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$;
   (c) $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$;
   (d) $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$;
   (e) $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \inf(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$;

   Prouvons les deux premières égalités,
   (a) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$: pour tout $a \in A$ et $b \in B$ on a $a \leqslant \sup A$ et $b \leqslant \sup B$ donc $a + b \leqslant \sup A + \sup B$, donc $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$ et comme $\sup(A + B)$ est le plus petit des majorants de $A + B$ alors $\sup(A + B) \leqslant \sup A + \sup B$. Réciproquement, il existe une suite (a_n) d'éléments de A tel que cette suite converge vers $\sup A$, de même il existe une suite (b_n) d'éléments de B qui converge vers $\sup B$, la suite $(a_n + b_n)$ est une suite d'éléments de $A + B$ qui converge vers $\sup A + \sup B$, donc la borne supérieure de $A + B$ est plus grande que $\sup A + \sup B$, soit $\sup(A + B) \geqslant \sup A + \sup B$. D'où l'égalité.
   (b) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$: Remarquons d'abord que si $P \subset Q$ alors $\sup P \leqslant \sup Q$: en effet $\sup Q$ est un majorant de Q donc de P (par l'inclusion $P \subset Q$), donc le plus petit des majorants, $\sup P$, pour P est plus petit que le majorant particulier $\sup Q$. Appliquons ceci à $A \subset A \cup B$ donc $\sup A \leqslant \sup(A \cup B)$ et pour $B \subset A \cup B$ on obtient $\sup B \leqslant \sup(A \cup B)$. On vient de prouver $\sup(A \cup B) \geqslant \max(\sup A, \sup B)$. Pour l'autre inégalité : soit $M = \max(\sup A, \sup B)$. Pour $x \in A \cup B$ alors soit $x \in A$ et alors $x \leqslant \sup A \leqslant M$, ou soit $x \in B$ et alors $x \leqslant \sup B \leqslant M$; donc quelque soit $x \in A \cup B$, $x \leqslant M$ donc M est un majorant de $A \cup B$, donc $\sup(A \cup B) \leqslant M = \max(\sup A, \sup B)$.
2. (a) $d(0, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0$, regarder des éléments du type $\frac{\sqrt{2}}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) $d(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = 0$, c'est la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ ou alors regarder la suite définie par $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}), n \in \mathbb{N}$, qui est une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$.
   (c) On suppose que $\mathcal{D}$ passe par l'origine, alors $d(M, \mathcal{D}) = x^2 + y^2 + z^2 - (ax + by + cz)^2$.
3. $d(A, B) = 0$.
4. $\mathrm{diam}(]0, 1[\cap \mathbb{Q}) = 1 = \mathrm{diam}([0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$.

Correction 2 1. J_x est un ouvert non vide car c'est une union d'ouverts contenant x. De plus J_x est un intervalle car c'est une union d'intervalles contenant tous le point x. Donc J_x est un intervalle ouvert. On peut donc écrire $\mathcal{O} = \cup_{x\in\mathcal{O}} J_x$. Mais cette union n'est pas nécessairement dénombrable.

Tout d'abord si $z \in J_x$ alors $J_x = J_z$. En effet soit I un intervalle inclus dans $\mathcal{O}$ contenant x et z. Si $x' \in J_x$, soit J un intervalle inclus dans $\mathcal{O}$ contenant x et x'. Alors $I \cup J$ est un intervalle (car x est dans les deux intervalles I et J), $I \cup J$ est inclus dans $\mathcal{O}$ et contient x' et z. Donc $x' \in J_z$. Donc $J_x \subset J_z$. Enfin comme $z \in J_x$ on a aussi $x \in J_z$, donc on montrerait de même $J_z \subset J_x$. Donc $J_x = J_z$.

Pour $x, y \in \mathcal{O}$ alors $J_x = J_y$ ou $J_x \cap J_y = \varnothing$. En effet supposons que $J_x \cap J_y \neq \varnothing$ et soit $z \in J_x \cap J_y$. Comme $z \in J_x$ alors $J_x = J_z$, comme $z \in J_y$ alors $J_y = J_z$. Donc $J_x = J_y$.

Pour chaque intervalle ouvert J_x il existe $q \in \mathbb{Q} \cap J_x$, avec bien sûr $J_x = J_q$. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable $\mathcal{O} \cap \mathbb{Q}$ l'est aussi. On a ainsi écrit

$$\mathcal{O} = \bigcup_{q\in\mathcal{O}\cap\mathbb{Q}} J_q,$$

ce qui était demandé.

2. Pour $\mathbb{R}^n$ on peut montrer le résultat suivant : tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme l'union dénombrable de boules ouverte. On considére J_x l'union des boules ouvertes de rayon rationnel centrées en x, ensuite on regarde seulement les x appartenant à $\mathcal{O} \cap \mathbb{Q}^n$. Par contrer on autorise deux boules à s'intersecter.

Correction 3 1. Soient $d = p + q\sqrt{2}$ et $d' = p' + q'\sqrt{2}$ deux éléments de D. Alors $d + d' = (p + p') + (q + q')\sqrt{2}$ est un élément de D et $dd' = (pp' + 2qq') + (pq' + p'q)\sqrt{2}$ aussi.

2. On a $u < 1$ donc u^k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Donc pour $\varepsilon = b - a$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geqslant n$ on a $u^k < \varepsilon = b - a$. En particulier $u^n < b - a$. Si on cherchait un réel alors $r = \frac{a}{u^n} + 1$ conviendrait, mais on cherche un entier, posons $m = E(\frac{a}{u^n}) + 1$. Alors $m - 1 \leqslant \frac{a}{u^n} < m$. L'inégalité de droite donne $a < mu^n$. L'inégalité de gauche s'écrit aussi $mu^n - u^n \leqslant a$ soit $mu^n \leqslant a + u^n < a + b - a = b$ donc $a < mu^n < b$.

Déduisons de cela que D est dense dans $\mathbb{R}$: pour tout intervalle $[a, b]$, $a < b$ il existe m, n des entiers tels que $mu^n \in [a, b]$. Or mu^n est dans D car $u \in D$ donc par multiplication $u^n \in D$.

Correction 4 1. Cette exercice justifie la terminologie "boule fermée". Il s'agit de montrer que le complémentaire d'une boule fermée est un ensemble ouvert. Il est vivement conseillé de faire un dessin. Soit $C = E \setminus B'(a, r)$. Soit $x \in C$, on cherche une boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ contenue dans C. Comme $x \in C$, $x \notin B'(a, r)$ donc $d(a, x) > r$. Soit ε tel que $0 < \varepsilon < d(a, x) - r$. Montrons que $B(x, \varepsilon) \subset C$: pour $y \in B(x, \varepsilon)$, l'inégalité triangulaire $d(a, x) \leqslant d(a, y) + d(y, x)$ donc $d(a, y) \geqslant d(a, x) - d(y, x) \geqslant d(a, x) - \varepsilon > r$. Comme $d(a, y) > r$ alors $y \notin B'(a, r)$ donc $y \in C$. Comme la preuve est valable quelque soit $y \in B(x, \varepsilon)$, donc $B(x, \varepsilon) \subset C$. Et donc C est un ouvert.

2. Pour $a = (\frac{1}{2}, 0)$ et $r = \frac{1}{2}$ on a $B'(a, r) = [0, 1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0, \frac{1}{2}]$, $B(a, r) =]0, 1[\times \{0\}$ et $\overline{B(a, r)} = [0, 1] \times \{0\}$.

Correction 5 1. On note $B = B(a, r)$, $B' = B'(a, r)$, $\bar{B} = \overline{B(a, r)}$. Il faut montrer $B' = \bar{B}$. B' est une boule fermée, donc un fermé contenant B, alors que $\bar{B}$ est le plus petit fermé contenant B, donc $\bar{B} \subset B'$.

Étudions l'inclusion inverse : soit $x \in B'$, il faut montrer $x \in \bar{B}$. Si $x \in B$ alors $x \in \bar{B}$, supposons donc que $x \notin B$, alors $\|x-a\| = r$. Soit $B(x,\varepsilon)$ un boule centrée en x. x est adhérent à B si $B(x,\varepsilon) \cap B$ est non vide quelque soit $\varepsilon > 0$. Fixons $\varepsilon > 0$ et soit le point

$$y = x - \frac{\varepsilon}{2} \frac{x-a}{\|x-a\|}.$$

Faire un dessin et placer y sur ce dessin. D'une part $y \in B(x,\varepsilon)$ car $\|y-x\| = \varepsilon/2 < \varepsilon$. D'autre part $y \in B = B(a,r)$ car $\|y-a\| = \|x-a-\frac{\varepsilon}{2}\frac{x-a}{\|x-a\|}\| = \|x-a\|(1-\frac{\varepsilon}{2\|x-a\|}) = r - \frac{\varepsilon}{2} < r$. Donc $y \in B \cap B(x,\varepsilon)$, ce qui prouve que $B' \cap \bar{B}$. Donc $B' = \bar{B}$.

2. Pour le sens $\Leftarrow$. Soit $x \in \bar{B}(a,r)$ alors $\|x-b\| = \|x-a+a-b\| \leqslant \|x-a\| + \|a-b\| \leqslant r + R - r \leqslant R$, donc $x \in \bar{B}(b,R)$.
   Pour le sens $\Rightarrow$. Soit
   $$x = a + r\frac{a-b}{\|a-b\|},$$
   alors $\|x-a\| = r$ donc $x \in \bar{B}(a,r)$, donc $x \in \bar{B}(b,R)$, donc $\|x-b\| \leqslant R$ or $\|x-b\| = \|a-b\| + r$ (c'est le même calcul que pour la question précédente). Donc $\|a-b\|+r \leqslant R$, soit $0 \leqslant \|a-b\| \leqslant R-r$ et en particulier $r \leqslant R$.

Correction 6 1. (a) Si $||(x,y)|| = 0$ alors $\max(|x+y|,|x-2y|) = 0$ donc $x+y=0$ et $x-2y=0$ donc $x=0$ et $y=0$. Réciproquement $\|(0,0)\| = 0$.

(b) $||\lambda.(x,y)|| = ||(\lambda x,\lambda y)|| = \max(|\lambda x+\lambda y|,|\lambda x-2\lambda y|) = |\lambda|\max(|x+y|,|x-2y|) = |\lambda|.||(x,y)||$.

(c) $\|(x,y)+(x',y')\| = \|(x+x',y+y')\| = \max(|x+x'+y+y'|,|x+x'-2y-2y'|) \leqslant \max(|x+y|+|x'+y'|,|x-2y|+|x'-2y'|) \leqslant \max(|x+y|,|x-2y|) + \max(|x'+y'|,|x'-2y'|) \leqslant ||(x,y)|| + ||(x',y')||$.

La boule unité fermée centrée à l'origine est la région du plan comprise entre les droites d'équations $x+y=+1$, $x+y=-1$, $x-2y=+1$, $x-2y=-1$.

2. Sens $\Leftarrow$: Si $x \in B_q$ alors $q(x) \leqslant 1$ donc $p(x) \leqslant 1$ donc $x \in B_p$. Sens $\Rightarrow$: Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ alors $q(\frac{x}{q(x)}) = 1$ donc $\frac{x}{q(x)} \in B_q$ donc $\frac{x}{q(x)} \in B_p$ donc $p(\frac{x}{q(x)}) \leqslant 1$ soir $p(x) \leqslant q(x)$. Ceci étant aussi valable pour $x=0$.
   $B_q \subset 2B_p$ est équivalent à $p(x) \leqslant 2q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (attention au sens !). Et $\frac{1}{2}B_p \subset B_q$ est équivalent à $\frac{1}{2}q(x) \leqslant p(x)$. Si les deux inclusions sont vraies alors $\frac{1}{2}p \leqslant q \leqslant 2p$ et en particulier les normes p et q sont équivalentes.
   Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_\infty$ On a
   $$B_1 \subset B_2 \subset B_\infty \subset 2B_1 \subset 2B_2 \subset \cdots$$

Correction 7 1. Une suite de l^∞ est notée $(x^p)_{p\in\mathbb{N}}$, pour chaque $p \geqslant 0$, x^p est elle même une suite $x^p = (x^p(0), x^p(1), x^p(2), \ldots)$. (Il convient de garder la tête froide : on regarde des suites de suites !) Il faut montrer que Y est fermé dans X. Soit donc (x^p) une suite de Y qui converge vers $x \in X$. Il faut donc montrer qu'en fait $x \in Y$, c'est-à-dire que $x = (x(0), x(1), \ldots)$ est une suite tendant vers 0. Soit $\varepsilon > 0$ comme $x^p \to x$ alors il existe P tel que si $p \geqslant P$ on ait $d(x^p,x) < \varepsilon$. Par la définition de d on a pour $p \geqslant P$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x^p(n) - x(n)| < \varepsilon$. Fixons $p = P$, alors $x^P \in Y$ donc x^P est une suite tendant vers 0, donc il existe N tel que si $n \geqslant N$ alors $|x^P(n)| < \varepsilon$. Réunissons tout cela, pour $n \geqslant N$:

$$|x(n)| = |x(n) - x^P(n) + x^P(n)| \leqslant |x(n) - x^P(n)| + |x^P(n)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Donc la suite x tend vers 0, donc $x \in Y$ et Y est fermé.

2. Notons Z l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Pour $y = (y(0), y(1), y(2), \dots) \in Y$, définissons la suite $y^0 = (y(0), 0, 0, \dots)$, $y^1 = (y(0), y(1), 0, 0, \dots)$,... $y^p = (y(0), \dots, y(p-1), y(p), 0, 0, 0, \dots)$. La suite (y^p) est bien une suite d'éléments de Z. De plus $d(y^p, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |y^p(n) - y(n)| = \sup_{n>p} |y(n)|$ or la suite $y(n)$ tend vers 0 donc $d(y^p, y)$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

   On montre facilement (par l'absurde) que l'élément $x = (1, 1, 1, \dots) \in X$ n'est limite d'aucune suite d'éléments de Z, (ni d'ailleurs de Y).

Correction 8 Par l'inégalité triangulaire $|f(x) + f'(x)| \leqslant |f(x)| + |f'(x)|$ on obtient $\|f\| \leqslant N(f)$. Pour une inégalité dans l'autre sens décomposons le travail :
- $\|f'\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f\|$: en effet par l'inégalité triangulaire $|f'(x)| \leqslant |f(x)| + |f'(x) + f(x)|$.
- $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$: en effet f est continue sur $[0, 1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes. Soit $x_0 \in [0, 1]$ ce point du maximum. Si $x_0 \in]0, 1[$ alors $f'(x_0) = 0$ donc $\|f\|_\infty = |f(x_0)| = |f(x_0) + f'(x_0)| \leqslant \|f\|$. Si $x_0 = 1$ alors f et f' ont même signe sur un intervalle $[1-\varepsilon, 1]$ donc sur cet intervalle $|f(x)| \leqslant |f(x) + f'(x)|$ et donc $\|f\|_\infty = |f(1)| \leqslant \|f\|$. (Enfin $f(0) = 0$ donc si $x_0 = 0$ alors f est nulle et l'inégalité est triviale.)
- Il reste à rassembler les expressions :

$$N(f) = \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f\| + \|f\|_\infty \leqslant 3\|f\|.$$

  (La première inégalité vient du premier point et la deuxième du second.)

Les normes $\|f\|$ et $N(f)$ sont équivalentes :

$$\frac{1}{3}N(f) \leqslant \|f\| \leqslant N(f).$$

Correction 10 1. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty dt \leqslant \|f\|_\infty$. Donc $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$ Par contre il n'existe aucune constante $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$ pour tout f. Pour montrer ceci par l'absurde, supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$ pour tout f de $C([0, 1], \mathbb{R})$. Regardons les fonctions f_k définies par $f_k(x) = 2k(1 - kx)$ si $x \in [0, \frac{1}{k}]$ et $f_k(x) = 0$ si $x > \frac{1}{k}$. Alors $f_k \in C([0, 1], \mathbb{R})$ et $\|f_k\|_\infty = 2k$ alors que $\|f_k\|_1 = 1$. On obtient $2k \leqslant C.1$ ce qui est contradicoire pour k assez grand. Cela prouve que les normes ne sont pas équivalentes.

2. Comme les métriques sont définies par des normes et que les normes ne sont pas équivalentes alors les métriques ne définissent pas la même topologie.

Correction 11 1. On montre facilement

$$N_1 \leqslant N_2 \leqslant 2N_1 \leqslant 2N_4 \leqslant 2N_3.$$

2. Par contre il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_3 \leqslant CN_4$ ou $N_2 \leqslant CN_4$. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que $N_3 \leqslant CN_4$ on regarde f_k définie par $f_k(x) = x^k$, après calcul on obtient $N_3(f_k) = k+1$ et $N_4(f_k) = 2$, pour k suffisament grand on obtient une contradiction. Comme N_1 et N_2 sont équivalentes on va prouver qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_3 \leqslant CN_1$. On prend g_k, définie par $g_k(x) = 1 + \sin(2\pi kx)$. Alors $N_1(g_k) = 2$ et $N_3(g_k) = 4k$, ce qui prouve le résultat souhaité.

Correction 12 1. (a) Par exemple une suite constante $x_n = a$ pour tout n.

   (b) Par exemple $x_n = \frac{1}{n}$ et $a = 0$.

(c) Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable on peut trouver une suite x_n telle que $A = \{x_1, x_2, \dots\} = \mathbb{Q}$. On prend $a = \sqrt{2}$ alors $a \in \bar{A} \setminus A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. C'est juste les définitions : un point d'accumulation de A est toujours une valeur d'adhérence de A.

Correction 13 1. (Correction pour $n = 1$, pour $n > 1$ remplacer les intervalles par des boules.) Comme 0 est isolé soit $I =]-\varepsilon, +\varepsilon[$ un voisinage de 0 tel que $I \cap G = \{0\}$. Soit $g \in G$ et considérons $I_g = g + I =]g - \varepsilon, g + \varepsilon[$. Supposons, par l'absurde, que $I_g \cap G$ ne soit pas réduit à g. Alors il existe $g' \in I_g \cap G$, $g' \neq g$. Mais $g - \varepsilon < g' < g + \varepsilon$ et donc $g - g' \in I$ comme G est un groupe on a $g - g' \in G$ et on a $g - g' \neq 0$. On a donc trouvé un élément $g - g' \in G \cap I$ qui n'est pas 0. Ce qui est une contradiction.

Pour montrer que G est discret (c'est-à-dire G est dénombrable et ses points sont isolés) on remarque que la distance entre deux éléments de G est au moins ε donc pour $J_g =]g - \frac{\varepsilon}{2}, g + \frac{\varepsilon}{2}[$ on a $g \neq g'$ implique $J_g \cap J_{g'} = \varnothing$. Pour chaque $g \in G$ on choisit $q(g) \in \mathbb{Q} \cap J_g$, ce qui donne une application : $\Phi : G \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par $\Phi(g) = q(g)$, et Φ est injective, donc G est dénombrable.

Montrons que G est fermé : soit (g_n) une suite de G qui converge vers $g \in \mathbb{R}$. Pour N assez grand et pour tout $n \geqslant N$ on a $|g_n - g| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Pour $n \geqslant N$ on a $|g_n - g_N| \leqslant |g_n - g| + |g - g_N| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Donc comme $g_N \in J_{g_N}$ alors $g_n \in J_{g_N}$ également, or J_{g_N} ne contient qu'un seul élément de G donc $g_n = g_N$ pour tout $n \geqslant N$. La suite est donc stationnaire (i.e. constante à partir d'un certain rang) donc la limite g vaut g_N et en particulier $g \in G$.

2. Supposons $G \neq \{0\}$. Soit $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$. Comme 0 est isolé alors $a > 0$. Comme G est fermé alors $a \in G$. Soit $g \in G$. Soit $k = E(\frac{g}{a})$ alors $k \leqslant \frac{g}{a} < k + 1$. Donc $0 \leqslant g - ka < a$. Or $g - ka$ est dans G et dans $\mathbb{R}_+$, comme il est plus petit que $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$ alors nécessairement $g - ka = 0$, soit $g = ka \in a\mathbb{Z}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, on cherche $g \in G \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. Comme 0 est un point d'accumulation de G il existe $h \in G$ tel que $0 < h < \varepsilon$ pour $k = E(\frac{x}{h})$, on a $kh \leqslant x < kh + h$, donc $g = kh \in G \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. Donc G est dense dans $\mathbb{R}$.

Pour un groupe G quelconque soit 0 est isolé, soit 0 est un point d'accumulation. Si en plus G est fermé alors soit $G = a\mathbb{Z}$ ou $G = \{0\}$, soit $\bar{G} = \mathbb{R}$ donc $G = \mathbb{R}$. Les sous-groupes fermés de $(\mathbb{R}, +)$ sont donc 0, $\mathbb{R}$ et les $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$.

4. Soit $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, c'est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Si G n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ alors, par les questions précédentes, il existe $a > 0$ tel que $G = a\mathbb{Z}$. En particulier $1 \in G$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $1 = ka$ de même $\alpha \in G$ donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = k'a$. Par division $\alpha = \frac{k'}{k}$. Ce qui contredit $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Donc $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Définissons $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ par $t \mapsto e^{2i\pi t}$ (S^1 est le cercle de $\mathbb{C}$ des nombre complexes de module 1). Alors Φ est continue et surjective. Comme Φ est continue alors pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ on $\Phi(\bar{A}) \subset \overline{\Phi(A)}$. Appliqué à l'ensemble $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, on a $\bar{G} = \mathbb{R}$ donc $\Phi(\bar{G}) = S^1$ car Φ est surjective ; d'autre part $\Phi(G) = \{e^{2i\pi k\alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Donc $S^1 = \Phi(\bar{G}) \subset \overline{\Phi(G)} = \overline{\{e^{2i\pi k\alpha}\}}$. L'adhérence de $\{e^{2i\pi k\alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est donc le cercle S^1 tout entier.