

## T.D Calcul différentiel

### Série N° 1

**Exercice 1.** Sur l'espace  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  on définit les deux normes suivantes:

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \quad ; \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

- 1) Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.
- 2) Montrer que  $(E, \|\cdot\|_{\infty})$  est complet.
- 3) Montrer que  $(E, \|\cdot\|_1)$  n'est pas complet. [On pourra considérer, par exemple, la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 3}$ , définie sur  $[0, 1]$ , par:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ n(x - \frac{1}{2}) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases} \quad ]$$

**Exercice 2.** On munit l'espace  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  de la norme de la convergence uniforme :  $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ . Soit  $\phi : E \rightarrow E$  l'application définie par:

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad \forall f \in E, \forall x \in [0, 1].$$

- 1) Montrer que  $\phi$  est linéaire continue, et calculer  $\|\phi\|$ .
- 2) Même question lorsqu'on munit  $E$  de la norme  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$ .
- 3) Montrer la forme linéaire  $L : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$L(f) = f(0) \quad \forall f \in E$$

n'est pas continue.

**Exercice 3.** Soit  $C$  une partie fermée non vide d'un espace de Banach  $E$ . Montrer que toute application contractante  $f : C \rightarrow C$  admet un point fixe et un seul.

(Rappelons: -  $f$  est dite contractante s'il existe une constante réelle  $k \in [0, 1[$  telle que

$$\forall (x, y) \in C^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

- Un point  $a \in C$  est appelé point fixe de  $f$  si et seulement si  $f(a) = a$ .)

**Exercice 4.** Soient  $E_1$ ,  $E_2$ , et  $F$  des espaces vectoriels normés, et soit  $f : E_1 \times E_2 \rightarrow F$  une application bilinéaire continue.

- 1) Montrer que  $f$  est différentiable sur  $E_1 \times E_2$ , et calculer  $Df(a_1, a_2)$  pour tout point  $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$ .
- 2) Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$ .

**Exercice 5** (différentielle d'un produit). Soient  $E$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ , et  $F$  des espaces vectoriels normés. Soit  $U$  un ouvert non vide de  $E$ , et soit  $\psi : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$  une application bilinéaire continue.

- 1) Soient  $f : U \longrightarrow E_1$  et  $g : U \longrightarrow E_2$  deux applications différentiables en un point  $a \in U$ . Soit  $\varphi : U \longrightarrow F$  l'application définie par

$$\varphi(x) = \psi(f(x), g(x))$$

Montrer que  $\varphi$  est différentiable en  $a$  et calculer  $D\varphi(a)$ .

- 2) Application: soient  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions numériques, différentiables en un point  $a \in U$ . Soit  $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$\varphi(x) = f(x)g(x)$$

Montrer que  $\varphi$  est différentiable en  $a$  et calculer  $D\varphi(a)$ .

**Exercice 6** (différentielle d'un quotient). Soient  $E$  un espace vectoriel normé réel,  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $a$  un point de  $U$ ,  $f$  et  $g$  deux applications de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  différentiables au point  $a \in U$ . On suppose que  $g$  ne s'annule pas sur  $U$ . On définit une application  $q : U \longrightarrow \mathbb{R}$  en posant, pour tout  $x \in U$ ,  $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ . Montrer que  $q$  est différentiable au point  $a$  et déterminer sa différentielle  $Dq(a)$ .

**Exercice 7.** Soit  $H$  un espace préhilbertien réel, et soit  $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par

$$f(x) = \ln(1 + \langle x, x \rangle).$$

- 1) Montrer que l'application  $q : H \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$q(x) = \langle x, x \rangle$$

est de classe  $C^1$  sur  $H$ , et calculer  $Dq(x)$  pour tout  $x \in H$ . **L'application  $q$  est appelée la forme quadratique associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .**

- 2) Montrer que  $f$  est différentiable en tout point  $x \in H$ , et calculer sa différentielle  $Df(x)$  pour tout  $x \in H$ .
- 3) Montrer que pour tout  $x, y \in H$  on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|.$$

**Exercice 8.** Montrer, en utilisant une norme convenable, que le système:

$$(S) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \sin(x + y) \\ y = \frac{1}{2} \cos(x - y) \end{cases}$$

admet une solution et une seule dans  $\mathbb{R}^2$ .