

Examen de rattrapage d'Analyse Numérique des EDPs (Durée 1h30)

Juillet 2018

Exercice 1 Soit l'équation différentielle du second ordre à conditions initiales :

52E8

$$(1) : \begin{cases} y''(t) + 2y'(t) = 2y(t), & t \in [a, b], \\ y(a) = 1 \text{ et } y'(a) = 2. \end{cases}$$

1) Ecrire cette équation différentielle sous la forme d'un système différentiel de deux équations différentielles d'ordre un.

2) Appliquer la méthode de RK2 à ce système.

3) Etudier la consistance de la méthode (On suppose que $y(t)$ est suffisamment régulière).

propagation
d'onde

Exercice 2 On veut approcher numériquement par la méthode des différences finies la solution u du problème modèle suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0 & \text{dans } (0, T] \times (0, L), \\ u(t, 0) = \alpha \text{ et } u(t, L) = \beta, & t \in [0, T], \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x), & x \in [0, L], \end{cases}$$

où α, β et c sont des réels non nuls, u_0 et v_0 sont des données initiales.

On se donne une discrétisation en temps $t_n = n\Delta t$ et en espace $x_j = jh$ avec $n \in [0, N]$, $j \in [0, J]$ et $N\Delta t = T$, $Jh = L$. On note u_j^n une approximation de $u(t_n, x_j)$ (que l'on veut construire).

1) Quel est le type du problème $(\mathcal{P})$? justifier votre réponse.

2) Ecrire sous forme matricielle le schéma d'Euler explicite pour le problème $(\mathcal{P})$.

3) Ecrire sous forme matricielle le schéma d'Euler implicite pour le problème $(\mathcal{P})$.

4) Montrer que le problème discret obtenu par le schéma d'Euler implicite admet une solution unique.

5) Quelle est l'erreur de consistance pour ces deux schémas?

===== Bonne chance =====

Exercice 2

1) Le prb est ~~parabolique~~ ^{hyperbolique} car le prb (P) peut se réécrire
 sous la forme $A(t, x): U(t, x) + \beta \nabla u = 0$
 avec $A(t, x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix}$ et $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$

La matrice A admet deux valeurs propres $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -c^2$ non nulle
 qui sont de signe différent

2) On a
$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

et
$$\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$$

alors
$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = 0$$

alors
$$u_i^{n+1} = \frac{c^2 \Delta t^2}{h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + 2u_i^n - u_i^{n-1}$$

alors
$$u_i^{n+1} = A u^n + b$$

avec
$$A = \begin{pmatrix} 2 - 2\gamma & \gamma \\ \gamma & 2 - 2\gamma \end{pmatrix}$$

et
$$b = \begin{pmatrix} u_1^{n-1} + \gamma \alpha \\ u_{N-1}^{n-1} + \gamma \beta \end{pmatrix}$$

avec
$$\gamma = \frac{c^2 \Delta t^2}{h^2}$$

$$u^n = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

3)

$$\frac{U_i^{n+1} - 2U_i^n + U_i^{n-1}}{\Delta t^2} + c^2 \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_{i+1}^n + U_{i+1}^{n-1}}{h^2} = 0$$

$$U_i^{n+1} - \frac{c^2 \Delta t^2}{h^2} (U_{i-1}^{n+1} + 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}) = 2U_i^n - U_i^{n-1}$$

alors $A U_i^{n+1} = 2U_i^n - b$

avec $A = \begin{pmatrix} 2\gamma+1 & -\gamma \\ -\gamma & \ddots \end{pmatrix}$

et $b = \begin{pmatrix} U_1^{n-1} \\ \vdots \\ U_{j-1}^{n-1} \end{pmatrix}$ ↳ la constante oubliée

avec $\gamma = \frac{c^2 \Delta t^2}{h^2}$

4) Montrer que

ona la matrice $A = \begin{pmatrix} 1+2\gamma & -\gamma \\ -\gamma & 1+2\gamma & \ddots \end{pmatrix}$ est a diagonale

strictement dominante alors inversible.

alors le schéma d'euler implicite admet une solution unique

5) Pour le schémas d'euler explicite

$$\begin{aligned} & \frac{U(t_{n+1}, x_i) - 2U(t_n, x_i) + U(t_{n-1}, x_i))}{\Delta t^2} - c^2 \frac{U(t_n, x_{i+1}) - 2U(t_n, x_i) + U(t_n, x_{i-1}))}{h^2} = \\ & = \frac{\partial^2 U(t_n, x_i)}{\partial t^2} + O(\Delta t^2) + c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t_n, x_i) + O(h^2) \\ & = O(\Delta t^2) + O(h^2) \end{aligned}$$

alors le schémas d'euler explicite est d'ordre 2 en temps et en espace

• pour le schéma d'Euler implicite

$$R^{n+1} = \frac{u(t_{n+1}, x_i) - u(t_n, x_i) + u(t_{n+1}, x_i) - c^2 \frac{u(t_{n+1}, x_{i+1}) - 2u(t_{n+1}, x_i) + u(t_{n+1}, x_{i-1}))}{h^2}}{\Delta t^2} \quad \textcircled{B}$$

$$= \frac{\delta^2 u(t_n, x_i)}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2) + \frac{c^2}{\Delta x^2} \delta^2 u(t_{n+1}, x_i) + O(h^2)$$

$\downarrow$ D.T

$$= \frac{\delta^2 u(t_n, x_i)}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2) + \frac{\delta^2 u(t_n, x_i)}{\Delta t^2} +$$

$$\text{on a } -c^2 \frac{\delta^2 u(t_{n+1}, x_i)}{\Delta x^2} = - \frac{\delta^2 u(t_{n+1}, x_i)}{\Delta t^2}$$

$$\text{par D.T on a } - \frac{\delta^2 u(t_{n+1}, x_i)}{\Delta t^2} = - \frac{\delta^2 u(t_n, x_i)}{\Delta t^2}$$

$$\text{alors on a } R^{n+1} = \frac{\delta^2 u(t_n, x_i)}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2) + \frac{\delta^2 u(t_n, x_i)}{\Delta t^2} + O(h^2)$$

$$= O(\Delta t^2) + O(h^2)$$

alors le schéma d'Euler implicite est d'ordre 2 en

temps et en espace