الدوال العددية - عموميات

1. مفهوم دالة عددية

تعريف

ليكن D جزء من $\mathbb{R}$ (مجال أو اتحاد مجالات). نعرف دالة f على D عندما نربط بكل عدد حقيقي x من D عددا حقيقيا وحيدا, نرمز إليه بالرمز $f(x)$.

تعابير واصطلاحات

- نرمز عادة إلى الدوال بالرموز f, g, h, ...
- D جزء من $\mathbb{R}$ و f دالة معرفة على D :
  - D هي مجموعة تعريف الدالة.
  - إذا كان x عنصرا من D، نسمي العدد الحقيقي $f(x)$ صورة x بالدالة f.
  - إذا كان العدد الحقيقي y صورة العدد الحقيقي x بالدالة f, نقول إن x سابق للعدد y بالدالة f.
  - للتعبير عن الدالة f , نكتب:

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

في هذه الكتابة, x يمثل المتغير و y مرتبط بالمتغير x.

أمثلة :

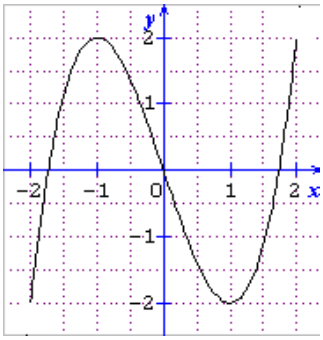
- دالة معرفة بصيغتها الجبرية

لتكن f دالة معرفة على المجال $[-2\,;2]$ كالآتي : $f(x) = x^2 + 1$

- مجموعة تعريف الدالة f هي المجال $[-2\,;2]$. $D_f = [-2\,;2]$
- لدينا $f(-1) = 2$ ولدينا كذلك $f(1) = 2$, أي أن العددين 1– و 1 لهما نفس الصورة بالدالة f.

ملاحظة : لا يمكن أن يكون لعدد حقيقي عدة صور لكن يمكن أن يكون لعدد حقيقي عدة سوابق.

- دالة معرفة بتمثيلها المبياني



لتكن h الدالة العددية المعرفة بتمثيلها المبياني جانبه :

- مجموعة تعريف الدالة h : $D_h = [-2\,;2]$.

نقرأ على التمثيل المبياني:

$$h(-2) = -2 \ , \ h(1) = -2 \ , \ h(0) = 0$$

ملاحظة :

مبيانيا, لتحديد سوابق عدد a بدالة عددية ننشئ المستقيم ذو المعادلة $y = a$, ثم نحدد أفاصيل نقط تقاطعه مع التمثيل المبياني لهذه الدالة.

2. التمثيل المبياني لدالة عددية

تعريف

المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. f دالة معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$.

التمثيل المبياني (أو المنحنى الممثل) للدالة في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ هو مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث:

$x \in D$ و $y = f(x)$. ونرمز له بالرمز (C_f).

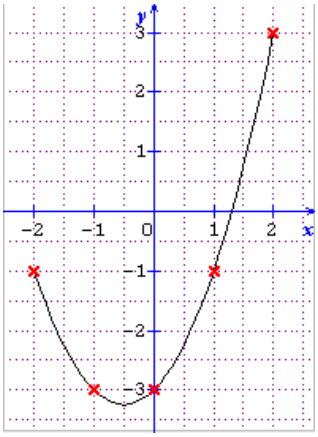
ونقول أن المعادلة $y = f(x)$ هي معادلة (C_f) في المعلم $(O;I,J)$.

مثال:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[-2;2]$ بما يلي : $f(x)=x^2+x-3$

يمكن رسم المنحنى الممثل للدالة f في المعلم $(O;I,J)$ نستعين بجدول لبعض قيم الدالة:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	-3	-3	-1	3



ملاحظة :

إن إعطاء مجموعة من القيم لا يكفي للحصول على المنحنى الممثل للدالة. هناك العديد من الكيفيات للمرور من نقطة إلى أخرى. فمن الضروري إذن أن تعطى معلومات أخرى حول سلوك الدالة (أي تغيراتها).

3. تساوي دالتين

تعريف

لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g مجموعتا تعريفهما.نقول أن f و g متساويتان (f=g) اذا وفقط اذا كان :

- لهما نفس مجموعة التعريف $D=D_f=D_g$.
- لكل x من D , $f(x)=g(x)$.

مثال:

ادرس تساوي الدالتين f و g في كل حالة :

أ- $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x}$; $g(x)=x+1$ ب- $f(x)=x$; $g(x)=\sqrt{x^2}$

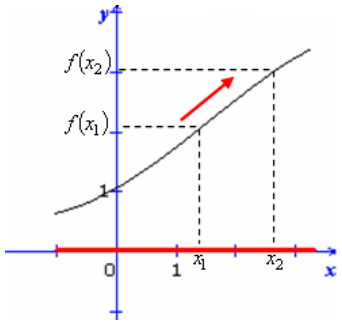
ملاحظة : مبيانيا : اذا كان $f=g$ فان (C_f) و (C_g) يكونان منطبقان.

4. منحى تغيرات دالة معرفة على مجال

تعريف 1

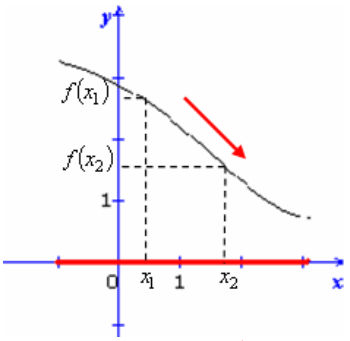
لتكن f دالة معرفة على مجال I من D_f. نقول أن :

- f تزايدية على I اذا وفقط اذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I :
  إذا كان $x_1<x_2$ فإن $f(x_1)\le f(x_2)$
- f تزايدية قطعا على I اذا وفقط اذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I :
  إذا كان $x_1<x_2$ فإن $f(x_1)<f(x_2)$
- f تناقصية على I اذا وفقط اذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I :
  إذا كان $x_1<x_2$ فإن $f(x_1)\ge f(x_2)$
- f تناقصية قطعا على I اذا وفقط اذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I :
  إذا كان $x_1<x_2$ فإن $f(x_1)>f(x_2)$



دالة تزايدية قطعا

$f(x_1)$ و $f(x_2)$ في نفس ترتيب x_1 و x_2.
الدالة تحافظ على الترتيب.



دالة تناقصية قطعا

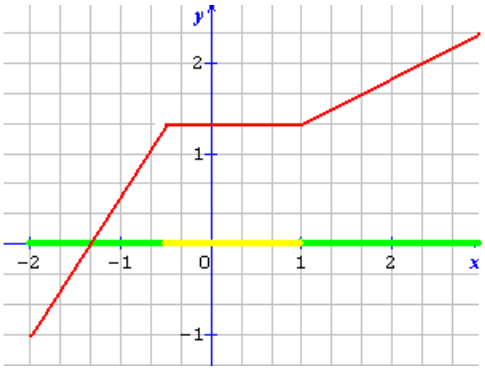
$f(x_1)$ و $f(x_2)$ ليسا في نفس ترتيب x_1 و x_2.
الدالة تعكس الترتيب.

تعريف 2

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I ضمن D_f. نقول أن f رتيبة (قطعا) اذا وفقط اذا كانت f اما تزايدية (قطعا) على I واما تناقصية (قطعا) على I .

مثال:

لتكن g الدالة العددية المعرفة بالتمثيل المبياني جانبه:
حدد رتابة الدالة g على المجال $[-2\ ;\ 2]$.



ملاحظة :
دراسة رتابة دالة هي تعيين المجالات التي تكون فيها هذه الدالة تزايدية أو تناقصية, و نلخص هذه الدراسة في جدول يسمى جدول التغيرات.

5. معدل تغير دالة عددية

تعريف

لتكن f دالة عددية, و D_f مجموعة تعريفها. وليكن x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من D_f.

العدد $T(x_1\ ;\ x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ يسمى معدل تغير الدلة f بين x_1 و x_2.

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I ضمن D_f. وليكن x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من I.

- تكون f تزايدية (قطعا) على I اذا وفقط اذا كان $T(x_1\ ;\ x_2)\geq 0$ $\left(T(x_1\ ;\ x_2)>0\right)$.
- تكون f تناقصية (قطعا) على I اذا وفقط اذا كان $T(x_1\ ;\ x_2)\leq 0$ $\left(T(x_1\ ;\ x_2)<0\right)$.

تمرين تطبيقي : نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=x^2-4x-1$

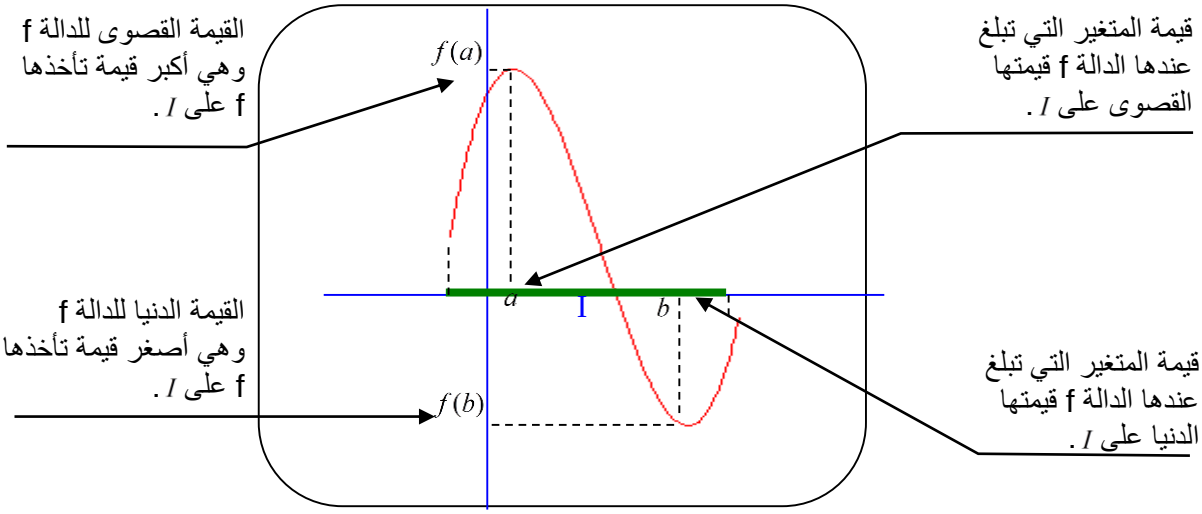
- ادرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $]2;+\infty[$ و $]-\infty;2]$. ثم اعط جدول تغيرات f.

6. القيمة القصوى – القيمة الدنيا

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال I ضمن D_f .

- القيمة القصوى للدالة f على المجال I هي أكبر صورة $f(x)$ تبلغها f من أجل عدد a من I .
  ولدينا لكل x من I , $f(x)\le f(a)$
- القيمة الدنيا للدالة f على I هي أصغر صورة $f(x)$ تبلغها f من أجل عدد b من I .
  ولدينا لكل x من I , $f(x)\ge f(b)$
- كل من القيم القصوى و القيم الدنيا تسمى مطاريف الدالة f.



مثال :

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

- بين أن f تقبل قيمة دنيا على المجال $]0;+\infty[$ عند 1.

خاصية

لتكن f دالة مجموعة تعريفها D_f , وليكن $[a;b]$ و $[b;c]$ مجالين ضمن D_f .

- اذا كانت f تزايدية على $[a;b]$ وتناقصية على $[b;c]$ فان الدالة f تقبل قيمة قصوى عند b.
- اذا كانت f تناقصية على $[a;b]$ و تزايدية على $[b;c]$ فان الدالة f تقبل قيمة دنيا عند b.

تمرين تطبيقي : نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=x^3-3x$

- ادرس رتابة الدالة f على كل من المجالات $]1;+\infty[$ و $[-1;1]$ و $]-\infty;-1]$, ثم حدد مطاريف الدالة f.

7. زوجية دالة عددية

1. دالة زوجية

تعريف

لتكن f دالة مجموعة تعريفها D_f , نقول أن f دالة زوجية اذا تحقق الشرطان التاليان :

- لكل x من D_f , $-x \in D_f$ (يعني أن D_f متماثلة بالنسبة الى 0).
- لكل x من D_f , $f(-x)=f(x)$.

مثال : هل الدالة العددية f زوجية في الحالات التالية :

$$f(x)=x^4+1 \quad /a \qquad f(x)=|x|-\frac{1}{x^2} \quad /b \qquad f(x)=\begin{cases}2x & ; 0\le x\le 4\\ -2x & ; x<0\end{cases} \quad /c$$

2.دالة فردية

تعريف

لتكن f دالة مجموعة تعريفها D_f , نقول أن f دالة فردية اذا تحقق الشرطان التاليان :

- لكل x من D_f , $-x \in D_f$ (يعني أن D_f متماثلة بالنسبة لـ0).
- لكل x من D_f , $f(-x)=-f(x)$.

مثال : هل الدالة العددية f فردية في الحالات التالية :

$$f(x)=|x-1|-|x+1| \quad /a \qquad f(x)=\begin{cases}-2x+1 & ; 0\le x\le 2\\ -2x-1 & ; -2\le x<0\end{cases} \quad /b \qquad f(x)=x^6+1 \quad /c$$

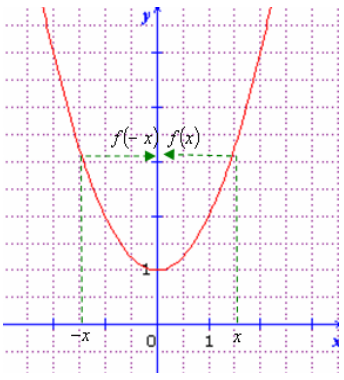
ملاحظة : يمكن للدالة أن تكون غير فردية و غير زوجية.

3.التمثيل المبياني لدالة زوجية – دالة فردية

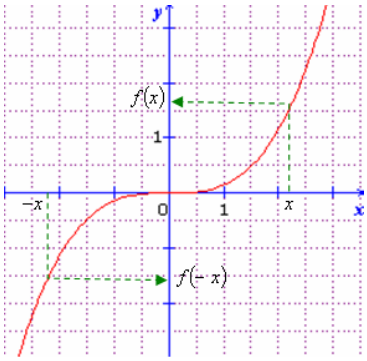
خاصية

لتكن f دالة و (C_f) منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- تكون f دالة زوجية اذا و فقط اذا كان (C_f) متماثلا بالنسبة لمحور الأراتيب.
- تكون f دالة فردية اذا و فقط اذا كان (C_f) متماثلا بالنسبة لأصل المعلم.



منحنى لدالة زوجية : (C_f) متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب.



منحنى لدالة فردية : (C_f) متماثل بالنسبة لأصل المعلم.

تمرين تطبيقي :

1. نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{|x|+x^2}{x}$

a. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

b. بين أن f دالة فردية, ثم أنشئ معلم م.م (ζ_f) منحنى الدالة f.

4. الرتابة و زوجية دالة

خاصية 1

لتكن f دالة زوجية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مماثل I بالنسبة الى 0.

- اذا كانت f تزايدية على I فان f تناقصية على J.
- اذا كانت f تناقصية على I فان f تزايدية على J.

نقول أن الدالة f تعكس الرتابة.

خاصية 2

لتكن f دالة فردية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مماثل I بالنسبة الى 0.

- اذا كانت f تزايدية على I فان f تزايدية على J.
- اذا كانت f تناقصية على I فان f تناقصية على J.

نقول أن الدالة f تحافظ على الرتابة.

تمرين تطبيقي :

لتكن f دالة عددية, علما أن f دالة فردية أتمم جدول التغيرات التالي :

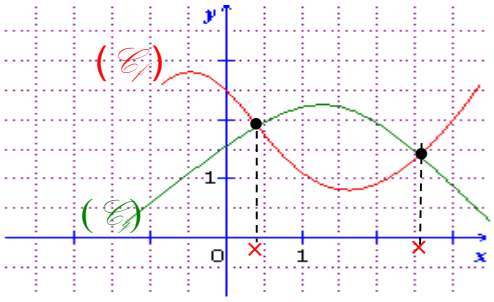
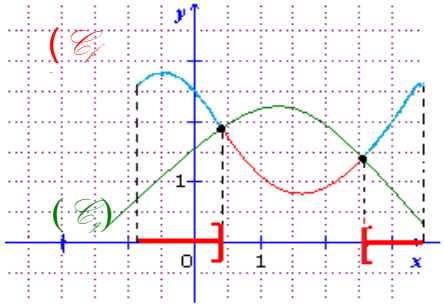
x	-5	-2	0	2	5
$f(x)$		↗	0	6 ↘	1

8. دراسة وضعية منحنيين - حل معادلات ومتراجحات مبيانيا

خاصية

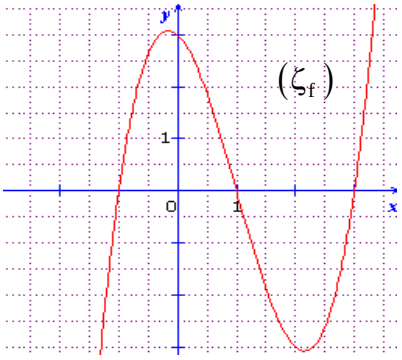
ليكن (C_f) و (C_g) منحنيين للدالتين f و g على التوالي , و I مجال من $\mathbb{R}$

- يكون $f(x)>g(x)$ على المجال I اذا و فقط اذا كان (C_f) فوق (C_g) في المجال I.
- يكون $f(x)<g(x)$ على المجال I اذا و فقط اذا كان (C_f) تحت (C_g) في المجال I.
- حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ على المجال I هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g) في المجال I.

• حل المعادلة $f(x)=g(x)$ مبيانيا يعني : تحديد أفاصيل نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g)	• حل المتراجحة $f(x)>g(x)$ مبيانيا يعني : تحديد أفاصيل نقط المنحنى (C_f) الواقعة فوق (C_g)
	

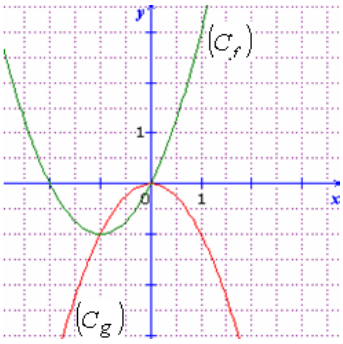
أمثلة

1. نعرف الدالة f بالمنحنى (ζ_f) التالي.



حل المعادلة $f(x)=0$.

2. لتكن f و g دالتان معرفتان بالمنحنيين (ζ_f) و (ζ_g) التاليين :



حل المتراجحة $f(x)\geq g(x)$

تمرين : نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=x|x|-4x$

- حدد تقاطع المنحنى (ζ_f) و المستقيم (D) ذو المعادلة : $y=-2x$.