

Exercice n°1 : (6 points)

- 1 pt 1) Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[) : \sin(x) \leq x$.
- 1 pt 2) Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[) : \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.
- 2 pts 3) Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[) : \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.
- 2 pts 4) Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2} & ; x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0

Exercice n°2 : (14 points)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - x + \frac{8x}{x^2 + 3}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 pt 1) a) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 1.5 pt b) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.
- 1 pt c) Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et l'asymptote oblique.
- 1 pt 2) a) Montrer que : $(\forall x \in D_f) : f'(x) = \frac{(1 - x^2)(x^2 + 15)}{(x^2 + 3)^2}$
- 1 pt b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 1 pt 3) a) Écrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0
- 1 pt b) Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la tangente (T) .
- 1 pt b) Interpréter graphiquement le résultat.
- 1 pt 4) Déterminer les points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et l'axe des abscisses.
- 1.5 pt 5) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
- 1 pt 6) Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout x de D_f .
- 2 pts 7) Construire dans le même repère la courbe de la fonction :

$$g : x \mapsto 1 + |x| - \frac{8|x|}{3 + x^2}$$