

Exercice 1

6 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

On considère le cercle $(\mathcal{C})$ définie par : $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ et les deux points $A(-7; -1)$ et $B(1; -7)$

- 1 pt **1** Déterminer le centre Ω et le rayon r du cercle $(\mathcal{C})$
- 1.5 pt **2** Montrer que le segment $[AB]$ est un diamètre du cercle $(\mathcal{C})$
- 0.5 pt **3** Déterminer la position du point $C(1; -1)$ par rapport au cercle $(\mathcal{C})$
- 1.5 pt **4** Déterminer une équation cartésienne de la tangente (Δ) au cercle $(\mathcal{C})$ au point C
- 1.5 pt **5** Montrer que la droite (D) d'équation $3x + 4y = 0$ est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en déterminant le point de tangence

Exercice 2

6 points

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $u_0 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = \frac{-1 + 2u_n}{u_n}$

- 1 pt **1** Calculer u_1 et u_2
- 1 pt **2** Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 < u_n$
- 1 pt **3** Étudier la monotonie la suite (u_n)
- 4** Soit (v_n) une suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) v_n = \frac{1}{u_n - 1}$
- 1 pt a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique
- 1 pt b) Calculer v_n en fonction de n
- 1 pt c) En déduire u_n en fonction de n

Exercice 3

8 points

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = \frac{7u_n}{2u_n + 1}$

- 1 pt **1** Calculer u_1 et u_2
- 1.5 pt **2** Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < 3$
- 3** Soit (v_n) une suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) v_n = \frac{u_n}{3 - u_n}$
- 1 pt a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique
- 1 pt b) Calculer v_n en fonction de n
- 1 pt c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{6 \times (7)^n}{2 \times (7)^n + 1}$
- 4** On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) S_n = \frac{1}{3 - u_0} + \frac{1}{3 - u_1} + \frac{1}{3 - u_2} + \dots + \frac{1}{3 - u_n}$
- 1 pt a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{1}{3 - u_n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} v_n$
- 1.5 pt b) En déduire la somme S_n en fonction de n