classe :2BAC SMF

DEVOIR SURVEILLE N :02 S2

lycée : RIAD EZZAHIA

Exercice 1

9,5 **points**

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $]-1;1[$ par : $F(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ et $(\mathscr{C}_f)$ La courbe représentative de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\|=5cm$

1 pt **1** Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $]-1;1[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x\in]-1;1[$

1 pt **2** Montrer que la fonction F est impaire

1 pt **3** En posant $t=\sin(u)$ tel que $u\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, calculer $F(sin(x))$ pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

1.5 pt **4** Calculer les deux limites $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+} F(x)$

5 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1;1]$ par

$$\begin{cases} f(x)=F(x) & ;\ x\in]-1;1[\\ f(1)=\frac{\pi}{2}\ \ et\ \ f(-1)=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1 pt a) Étudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en 1

1 pt b) Montrer que la fonction f est bijective de l'intervalle $[-1;1]$dans un intervalle J qu'on déterminera et calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

0.5 pt c) Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 pt d) Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$,les axes du repère et la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$

1.5 pt **6** Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ u_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\arctan(\frac{k}{n})$

Exercice 2

3 **points**

Soit p un nombre premier positif qui vérifie la relation :

"il existe un entier naturel non nul n tel que p divise n^2-n+1 "

0.5 pt **1** Montrer que $p\geq 3$

0.5 pt **2** Montrer que $(\forall k\in\mathbb{N})\ \ n^{6k+3}\equiv -1\ \ [p]$

0.5 pt **3** En utilisant le théorème de **Bezout** ;montrer que $n\wedge p=1$

1.5 pt **4** On suppose que $p\neq 3$, montrer que $p=6k+1$ tel que $k\in\mathbb{N}^*$

Exercice 3

7,5 **points**

1 On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation suivante $(E):11m-24n=1$

0.5 pt a) En utilisant l'algorithme d'Euclide , déterminer une solution particulière de l'équation (E)

1 pt b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E)

0.5 pt **2** Vérifier que le nombre 10^p-1 divise le nombre $10^{kp}-1$ pour tout $(p,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

3 Soit $(m;n)$ une solution de l'équation (E) dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

0.5 pt a) Montrer que $(10^{11m}-1)-10(10^{24n}-1)=9$

0.5 pt b) En déduire qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $(10^{11}-1)u-(10^{24}-1)v=9$

0.5 pt c) Montrer que tout diviseur commun à $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$ divise 9

0.5 pt **4** En déduire le plus grand diviseur commun à $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$

1 pt **5** Montrer que $(\forall a\in\mathbb{Z})\ \ a\wedge 3=1\Rightarrow a^2\equiv 1\ \ [3]$ et $(\forall a\in\mathbb{Z})\ \ a\wedge 4=1\Rightarrow a^2\equiv 1\ \ [4]$

0.5 pt **6** En déduire que $(\forall a\in\mathbb{Z})\ \ a\wedge 12=1\Rightarrow a^2\equiv 1\ \ [12]$

7 Soient x et y deux entiers relatifs tels que $xy\equiv -1\ \ [12]$

1 pt a) Montrer que $x\wedge 12=1$ et $y\wedge 12=1$

1 pt b En déduire que $x+y\equiv 0\ \ [12]$