

Exercice 1

6 points

Soit $n \in \mathbb{N}$, On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{1+2k}$ et $v_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} \frac{(-1)^k}{1+2k}$ et la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}[$ par $f_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{1+2k} \tan^{2k+1}(x)$

1.5 pt **1** Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

1 pt **2** Montrer que $(\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[) : f'_n(x) = 1 - (-1)^{n+1} \tan^{2n+2}(x)$

1 pt **3** Montrer que $(\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[) : f_{2n+1}(x) < x < f_{2n}(x)$

1 pt **4** En utilisant le résultat de la question 3 déterminer la limite des deux suites (u_n) et (v_n)

1.5 pt **5** Déterminer une primitives des deux fonctions p et q sur l'intervalle I définies respectivement par : $p(x) = \frac{3}{x^2 - 6x + 25}$; $I = \mathbb{R}$ et $q(x) = -\frac{5}{3x^2 + 5x + 2}$; $I =]-\infty; -1[$

Exercice 2

14 points

- I) Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 2$ et (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 0.5 pt **1** Montrer que la fonction f est continue en 0
- 1.5 pt **2** Soit a un élément de $] -\frac{1}{2}; 0[\cup]0; +\infty[$, en utilisant le théorème de **ROLLE** sur la fonction $x \mapsto (\ln(1+2a) - 2a)x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)a^2$, montrer qu'il existe un réel b appartenant à l'intervalle I telle que $\frac{\ln(2a+1) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$
- 1 pt **3** En déduire que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -2$.
- 1.5 pt **4** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} f(x)$ et interpréter graphiquement ces deux résultats
- 0.5 pt **5** Montrer que $(\forall x \in]-\frac{1}{2}; 0[\cup]0; +\infty[) : f'(x) = \frac{2x - (1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}$
- 1 pt **6** Montrer que $(\forall x \in]-\frac{1}{2}; 0[\cup]0; +\infty[) : 2x - (1+2x)\ln(1+2x) < 0$
- 0.5 pt **7** Dresser le tableau de variations de la fonction f
- 0.5 pt **8** Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $]1; 2[$ tel que $f(\alpha) = 1$
- 0.5 pt **9** Montrer que la fonction f est bijective de I vers un intervalle J à déterminer
- 0.5 pt **10** Montrer que f^{-1} la bijection réciproque de f est dérivable en 2 et déterminer $(f^{-1})'(2)$
- 1.5 pt **11** Construire dans le même repère les deux courbe (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ ($\alpha \sim 1.3$)
- II) On considère la fonction φ définie sur $[1; \alpha]$ par $(\forall x \in [1; \alpha]) : \varphi(x) = \ln(1+2x)$
- 1 pt **1** Montrer la fonction φ est dérivable sur $[1; \alpha]$ et que $(\forall x \in [1; \alpha]) : 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$
- 1 pt **2** Vérifier que $\varphi(\alpha) = \alpha$ et que $\varphi([1; \alpha]) \subset [1; \alpha]$
- III) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \ln(1+2u_n)$ et $u_0 = 1$
- 1 pt **1** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 \leq u_n < \alpha$
- 1 pt **2** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$
- 0.5 pt **3** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite