

المملكة المغربية
ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵍⵎⴰⴳⴷⴰⵢⵜ



وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة
ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵉⵔⴷⴰⵢⵜ ⵏ
ⵉⵔⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵉⵔⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵉⵔⴷⴰⵢⵜ



Lycée ibnou zohr

الثانوية التأهيلية ابن زهر

Deuxième année du baccalauréat
Série sciences expérimentales
Option sciences physiques // sciences de vie et de
terre

Série sciences et technologies industrielles
Section internationale

8

Calcul intégral

Professeur : Mustapha Baq

Année scolaire 2021_2022

Matière : mathématiques

 Prof. Mustapha Baq

 baqmustapha@gmail.com

 Mustapha Baq

I. Intégrale d'une fonction continue sur un segment. 3

II. Relation de Chasles – Linéarité de l'intégrale. 4

1. Relation de Chasles. 4

2. Linéarité de l'intégrale. 5

III. Expression d'une primitive à l'aide d'une intégrale. 6

IV. Intégrale et ordre – Valeur moyenne. 7

1. Intégrale et ordre. 7

2. La valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment. 7

V. Quelques techniques pour le calcul d'intégrale. 8

1. Utilisation d'une fonction primitive. 8

2. Intégration par parties. 9

VI. Application du calcul intégral. 10

1. Calcul des aires. 10

2. Calcul des volumes. 13

I. Intégrale d'une fonction continue sur un segment.

a. Activité.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 2x$.

1. Donner trois fonctions primitives F , G et H de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $F(2) - F(-1)$, $G(2) - G(-1)$ et $H(2) - H(-1)$.

3. Que peut-on remarquer ?

On remarque que le nombre réel $F(2) - F(-1)$ est indépendant du choix de la primitive choisie.

Ce nombre est appelé *l'intégrale de f de -1 à 2* , et se note $\int_{-1}^2 f(x)dx$, et on a :

$$\int_{-1}^2 f(x)dx = F(2) - F(-1).$$

$$\begin{aligned}\text{On écrit encore : } \int_{-1}^2 f(x)dx &= [F(x)]_{-1}^2 \\ &= F(2) - F(-1)\end{aligned}$$

b. Définition.

Soient f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de I .

Le nombre réel $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f , est appelé *l'intégrale de a à b de la fonction f* , et se note $\int_a^b f(x)dx$. On écrit alors : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$
 $= F(b) - F(a)$

c. Remarques.

✓ $\int_a^b f(x)dx$ se lit somme de $f(x)dx$ de a à b ou intégrale de a à b de $f(x)dx$.

✓ Les nombres réels a et b s'appellent les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

✓ Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, la variable x peut être remplacée par une autre variable. Ainsi, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta = \dots$$

d. Exemples.

Calculons les intégrales suivantes : $I = \int_1^e \frac{1}{x}dx$, $J = \int_0^{\ln(2)} e^{2x} dx$, $L = \int_e^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x}dx$, $M = \int_1^{-1} \sqrt{x+2}dx$ et $N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)dx$,

1. Calculons l'intégrale $I = \int_1^e \frac{1}{x}dx$.

On a : la fonction $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $[1; e]$.

La fonction $F: x \rightarrow \ln(x)$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[1; e]$.

$$\begin{aligned}\text{Alors } I &= \int_1^e \frac{1}{x}dx \\ &= [\ln(x)]_1^e \\ &= \ln(e) - \ln(1) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\text{D'où } I = \int_1^e \frac{1}{x}dx = 1$$

2. Calculons l'intégrale $J = \int_0^{\ln(2)} e^{2x} dx$.

On a : la fonction $f: x \rightarrow e^{2x}$ est continue sur l'intervalle $[0; \ln(2)]$.

La fonction $F: x \rightarrow \frac{1}{2}e^{2x}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; \ln(2)]$.

$$\begin{aligned}\text{Alors } J &= \int_0^{\ln(2)} e^{2x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^{\ln(2)} \\ &= \frac{1}{2}e^{2\ln(2)} - \frac{1}{2}e^{2 \cdot 0} \\ &= \frac{1}{2}e^{\ln(2^2)} - \frac{1}{2}e^0 \\ &= \frac{1}{2} \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 1 \\ &= \frac{4-1}{2} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{3}{2} \\ \text{D'où } J &= \int_0^{\ln(2)} e^{2x} dx = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

3. Calculons l'intégrale $L = \int_e^{e^2} \frac{\ln^2(x)}{x}dx$.

On a : la fonction $f : x \rightarrow \frac{\ln^2(x)}{x}$ est continue sur l'intervalle $[e; e^2]$ (en tant que quotient de deux fonctions continues).

La fonction $F : x \rightarrow \frac{1}{3} \ln^3(x)$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[e; e^2]$

$$\left(\frac{\ln^2(x)}{x} = \ln'(x) \times \ln^2(x) \right).$$

$$\begin{array}{l|l|l} \text{Alors } L = \int_e^{e^2} \frac{\ln^2(x)}{x} dx & = \frac{1}{3} \ln^3(e^2) - \frac{1}{3} \ln^3(e) & = \frac{7}{3} \\ & = \frac{1}{3} \times 2^3 - \frac{1}{3} \times 1 & \\ & = \frac{8-1}{3} & \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{D'où } L = \int_e^{e^2} \frac{\ln^2(x)}{x} dx = \frac{7}{3} \end{array}$$

4. Calculons l'intégrale $M = \int_1^{-1} \sqrt{x+2} dx$.

On a : la fonction $f : x \rightarrow \sqrt{x+2}$ est continue sur l'intervalle $[-1; 1]$ ($x \rightarrow x+2$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1; 1]$).

La fonction $F : x \rightarrow \frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[-1; 1]$

$$\left(\sqrt{x+2} = (x+2)^{\frac{1}{2}} = (x+2)'(x+2)^{\frac{1}{2}} \right).$$

$$\begin{array}{l|l|l} \text{Alors } M = \int_1^{-1} \sqrt{x+2} dx & = \frac{2}{3} \sqrt{(1)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(3)^3} & = \frac{2}{3} - 2\sqrt{3} \\ & = \frac{2}{3} \sqrt{1} - \frac{2}{3} \sqrt{3 \times 3^2} & \text{D'où} \\ & = \frac{2}{3} \times 1 - \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} & M = \int_1^{-1} \sqrt{x+2} dx = \frac{2}{3} - 2\sqrt{3} \end{array}$$

5. Calculons l'intégrale $N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx$.

On a : la fonction $f : x \rightarrow \cos(2x)$ est continue sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ (en tant que composée de deux fonctions continues).

La fonction $F : x \rightarrow \frac{1}{2} \sin(2x)$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

$$\begin{array}{l|l|l} \text{Alors } N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx & = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin(0) & \text{D'où } N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \\ & = \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{2} \times 0 & \\ & = \frac{1}{2} & \end{array}$$

e. Exercice d'application.

Calculer les intégrales suivantes : $I = \int_1^e (x^2 - x) dx$, $J = \int_0^{\ln(3)} \frac{e^x}{e^x - 1} dx$, $K = \int_{-2}^{-3} \sqrt{1-x} dx$,

$$L = \int_2^5 \left(2x - \frac{1}{x^2} + \frac{8}{\sqrt{x-1}} \right) dx.$$

f. Conséquences.

Soient f une fonction continue sur un intervalle I , a , b et c trois éléments de l'intervalle I , et k un nombre réel, alors on a : $\int_a^b k dx = [kx]_a^b$; $\int_a^a f(x) dx = 0$; $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

$$\begin{aligned} &= kb - ka \\ &= k(b - a) \end{aligned}$$

II. Relation de Chasles – Linéarité de l'intégrale.

1. Relation de Chasles.

a. Activité.

Soient f une fonction continue sur un intervalle I , a , b et c trois éléments de l'intervalle I , et k un nombre réel. Montrer que : $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$. Cette égalité s'appelle **la relation de Chasles pour les intégrales**.

b. Propriété (Relation de Chasles).

Soient f une fonction continue sur un intervalle I , a , b et c trois éléments de l'intervalle I , on a :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

c. Exemples.

1. Calculons l'intégrale $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos(x)| dx$.

Le tableau de signe de $\cos(x)$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ est donné ci-contre :

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos(x)| dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(x)| dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos(x)| dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\cos(x) dx \\ &= [\sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + [-\sin(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \end{aligned}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
Signe de $\cos(x)$	+	0	-

$$\begin{aligned} &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \left(-\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) - \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos(x)| dx = 2$$

2. Calculons l'intégrale $J = \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx$

Le tableau de signe du trinôme $x^2 - x = x(x - 1)$ est donné ci-contre

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx \\ &= \int_{-1}^0 |x^2 - x| dx + \int_0^1 |x^2 - x| dx + \int_1^2 |x^2 - x| dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx + \int_0^1 -(x^2 - x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Signe de $x^2 - x$	+	0	-	+

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \times 0^3 - \frac{1}{2} \times 0^2 - \left(\frac{1}{3} \times (-1)^3 - \frac{1}{2} \times (-1)^2\right) - \left(\frac{1}{3} \times 1^3 + \frac{1}{2} \times 1^2 - \left(-\frac{1}{3} \times 0^3 + \frac{1}{2} \times 0^2\right)\right) + \\ &\quad \frac{1}{3} \times 2^3 - \frac{1}{2} \times 2^2 - \left(\frac{1}{3} \times 1^3 - \frac{1}{2} \times 1^2\right) \\ &= -\left(\frac{1}{3} \times (-1) - \frac{1}{2} \times 1\right) - \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{3} \times 8 - \frac{1}{2} \times 4 - \left(\frac{1}{3} \times 1 - \frac{1}{2} \times 1\right) \\ &= -\left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} + \frac{2}{2} + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{2} + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} - \frac{4}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Par suite } J = \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx = \frac{7}{3}$$

d. Exercice d'application.

Calculer les intégrales suivantes : $I = \int_{-1}^2 |2x - 1| dx$, $J = \int_{-1}^1 \frac{2|x|}{x^2+1} dx$, $K = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$,

$$L = \int_{-2}^3 |2x^2 - 2x - 4| dx$$

2. Linéarité de l'intégrale.

a. Activité.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a et b deux éléments de l'intervalle I , et k un nombre réel. Montrer que : $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ et que

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

b. Propriété.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a et b deux éléments de l'intervalle I , et k un nombre réel, on a : $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

c. Remarque.

Soient k et k' deux nombres réels, on peut remplacer les deux formules de la propriété par la formule suivante : $\int_a^b (kf(x) + k'g(x))dx = k \int_a^b f(x)dx + k' \int_a^b g(x)dx$. Cette formule est dite **formule de linéarité**.

d. Exemple.

Calculons l'intégrale suivante : $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + 2 \ln(x) \right) dx + \int_1^e 2 \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } I &= \int_1^e \left(\frac{1}{x} + 2 \ln(x) \right) dx + \int_1^e 2 \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx \\ &= \int_1^e \frac{1}{x} dx + \int_1^e 2 \ln(x) dx + \int_1^e 2 \frac{1}{4\sqrt{x}} dx + \int_1^e 2 \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx \\ &= \int_1^e \frac{1}{x} dx + 2 \int_1^e \ln(x) dx + \int_1^e \frac{1}{2\sqrt{x}} dx - 2 \int_1^e \ln(x) dx \\ &= \int_1^e \frac{1}{x} dx + \int_1^e \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ &= [\ln(x)]_1^e + [\sqrt{x}]_1^e \\ &= \ln(e) - \ln(1) + \sqrt{e} - \sqrt{1} \\ &= \sqrt{e} \end{aligned}$$

$$\text{Il s'ensuit que } I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + 2 \ln(x) \right) dx + \int_1^e 2 \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx = \sqrt{e}$$

e. Exercice d'application.

On considère les deux intégrales suivantes : $M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\cos(4x)dx$ et $N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\sin(4x)dx$.

1. Calculer les deux intégrales $M + N$ et $M - N$.
2. En déduire les valeurs des deux intégrales M et N .

III. Expression d'une primitive à l'aide d'une intégrale.

a. Propriété.

Soient f une fonction continue sur un intervalle I , a un élément de l'intervalle I et k un nombre réel, on a : la fonction φ définie sur l'intervalle I par : $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I s'annulant en a .

b. Remarque.

La fonction φ est dérivable sur l'intervalle I et on a : pour tout x de l'intervalle I : $\varphi'(x) = f(x)$.

Par suite pour tout a élément de l'intervalle I : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t)dt}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x-a} = \varphi'(a) = f(a)$.

c. Exemple.

On sait que la fonction $\ln$ est la primitive de la fonction définie par : $x \rightarrow \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$, qui s'annule en 1, alors $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ pour tout x élément de l'intervalle $]0; +\infty[$.

IV. Intégrale et ordre – Valeur moyenne.

1. Intégrale et ordre.

a. Activité.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$).

1. Montrer que si la fonction f est positive sur l'intervalle $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
2. Montrer que si $f(x) \geq g(x)$ pour tout x élément de l'intervalle $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

b. Propriété.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$), on a :

- ✓ Si la fonction f est positive sur l'intervalle $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- ✓ Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout x élément de l'intervalle $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

c. Exemples.

1. On sait que la fonction $\ln$ est continue et positive sur l'intervalle $[1; e]$, alors $\int_1^e \ln(x)dx \geq 0$.
2. On sait que la fonction $\ln$ est continue et négative sur l'intervalle $[\frac{1}{e}; 1]$, alors $\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln(x)dx \leq 0$.

3. Montrons que : $2e^{-4} \leq \int_0^2 e^{-x^2} dx \leq 2$ -

Pour tout x de l'intervalle $[0; 2]$ on a : $0 \leq x^2 \leq 4$

Donc $-4 \leq -x^2 \leq 0$

Et comme la fonction $x \rightarrow e^x$ est strictement croissant sur $\mathbb{R}$, alors $e^{-4} \leq e^{-x^2} \leq e^0$

C'est-à-dire que $e^{-4} \leq e^{-x^2} \leq 1$

Il en résulte que $\int_0^2 e^{-4} dx \leq \int_0^2 e^{-x^2} dx \leq \int_0^2 1 dx$

C'est-à-dire que $e^{-4} \int_0^2 dx \leq \int_0^2 e^{-x^2} dx \leq \int_0^2 dx$

Ou encore $e^{-4}[x]_0^2 \leq \int_0^2 e^{-x^2} dx \leq [x]_0^2$

Par conséquent $2e^{-4} \leq \int_0^2 e^{-x^2} dx \leq 2$

d. Propriété (Intégrale et valeur absolue).

Soient f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de l'intervalle I tels que $a \leq b$, on a : $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

2. La valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.

a. Activité.

Soient f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de l'intervalle I tels que $a \leq b$

1. Montrer que s'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout x de l'intervalle $[a; b]$:

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ alors } m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

2. Montrer que s'il existe un nombre réel M tel que pour tout x de l'intervalle $[a; b]$: $|f(x)| \leq M$, alors $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M(b-a)$.

b. Propriété.

Soient f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de l'intervalle I tels que $a \leq b$, on a :

- ✓ S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout x de l'intervalle $[a; b]$: $m \leq f(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

- ✓ S'il existe un nombre réel M tel que pour tout x de l'intervalle $[a; b]$: $|f(x)| \leq M$, alors $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M(b-a)$.

c. Définition.

Soient f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de l'intervalle I tels que $a < b$. La **valeur moyenne** de la fonction sur l'intervalle $[a; b]$ est le nombre réel : $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

d. Remarques.

- ✓ Dans la pratique les deux nombres réels m et M représentent la valeur minimale et la valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$.
- ✓ Si pour tout x de l'intervalle $[a; b]$: $m \leq f(x) \leq M$, alors $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$, cette inégalité est appelée **inégalité de la moyenne**.
- ✓ La formule $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est une généralisation de la formule $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ donnant la moyenne arithmétique d'une série statistique.

e. Exemple.

La valeur moyenne de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ sur l'intervalle $[0; \ln(2)]$ est :

$$\frac{1}{\ln(2)-0} \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx.$$

Calculons alors l'intégrale $\int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx$

On a : $\frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$ donc la fonction $x \rightarrow \frac{-1}{e^x+1}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; \ln(2)]$.

$$\begin{aligned} \text{Par suite } \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx &= \left[\frac{-1}{e^x+1} \right]_0^{\ln(2)} \\ &= \frac{-1}{e^{\ln(2)}+1} - \frac{-1}{e^0+1} \\ &= \frac{-1}{2+1} + \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{-1}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; \ln(2)]$ est : $\frac{1}{\ln(2)} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6 \ln(2)}$.

f. Théorème (Théorème de la moyenne).

Soient f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de l'intervalle I tels que $a \leq b$. Il existe au moins un nombre réel c de l'intervalle $[a; b]$ tel que $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$. Ce théorème est appelé **théorème de la moyenne**.

g. Exercice d'application.

Dans chacun des cas suivants : déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I

$$f(x) = \frac{x+\ln^2(x)}{x} \text{ et } I = [1; e]; f(x) = 4\sin(2x+1) \text{ et } I = [-\pi; \pi]; f(x) = \sin^2(x) \text{ et } I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$$

V. Quelques techniques pour le calcul d'intégrale.

1. Utilisation d'une fonction primitive.

Pour calculer une intégrale, on envisage en premier temps d'utiliser les primitives des fonctions usuelles et leurs propriétés (somme, produit...). Ainsi et avant de commencer le calcul d'une intégrale d'une fonction, il faut vérifier que cette fonction est continue sur l'intervalle de l'intégration.

a. Exercice d'application.

1. Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{2x-3}{x^2-3x+8} dx$.

2. Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ puis calculer l'intégrale suivante : $J = \int_0^1 \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \right) dx$.

3. Déterminer les nombres réels a , b et c tels que : $(\forall x \neq 2) : \frac{x^2-4x+7}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2}$ puis calculer l'intégrale suivante : $K = \int_0^1 \left(\frac{x^2-4x+7}{x-2} \right) dx$.

4. Linéariser $\cos^3(x)$, puis calculer l'intégrale suivante : $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx$.

2. Intégration par parties.

a. Activité.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées u' et v' soient continues sur I . Montrer que pour tous a et b éléments de l'intervalle I , on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Cette technique est appelée **intégration par parties**.

b. Propriété.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées u' et v' soient continues sur I , alors pour tous a et b éléments de l'intervalle I , on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

c. Exemples.

1. En utilisant la formule de l'intégration par parties, calculons l'intégrale : $I = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} xe^x dx$

Posons : $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

Les deux fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[\ln(2); \ln(3)]$, et leurs dérivées u' et v' sont continues sur l'intervalle $[\ln(2); \ln(3)]$.

Il s'ensuit donc que $I = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} xe^x dx$

$$\begin{aligned} &= [xe^x]_{\ln(2)}^{\ln(3)} - \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} e^x dx \\ &= \ln(3)e^{\ln(3)} - \ln(2)e^{\ln(2)} - [e^x]_{\ln(2)}^{\ln(3)} \\ &= 3\ln(3) - 2\ln(2) - (e^{\ln(3)} - e^{\ln(2)}) \\ &= 3\ln(3) - 2\ln(2) - (3 - 2) \\ &= 3\ln(3) - 2\ln(2) - 1 \end{aligned}$$

D'où $I = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} xe^x dx = 3\ln(3) - 2\ln(2) - 1$

2. En utilisant la formule de l'intégration par parties, calculons l'intégrale : $J = \int_{e^2}^e (2x+1)\ln(x)dx$

Posons : $\begin{cases} u'(x) = 2x+1 \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = x^2+x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

Les deux fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[e; e^2]$, et leurs dérivées u' et v' sont continues sur l'intervalle $[e; e^2]$.

Il s'ensuit donc que $J = \int_{e^2}^e (2x+1)\ln(x)dx$

$$\begin{aligned} &= [(x^2+x)\ln(x)]_{e^2}^e - \int_{e^2}^e \frac{x^2+x}{x} dx \\ &= (e^2+e)\ln(e) - ((e^2)^2+e^2)\ln(e^2) - \int_{e^2}^e (x+1)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= e^2 + e - 2(e^4 + e^2) - \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{e^2}^e \\ &= e^2 + e - 2e^4 - 2e^2 - \left(\frac{1}{2}e^2 + e - \left(\frac{1}{2}(e^2)^2 + e^2\right)\right) \\ &= -2e^4 - e^2 + e - \left(\frac{1}{2}e^2 + e - \frac{1}{2}e^4 - e^2\right) \\ &= -2e^4 - e^2 + e + \frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}e^4 \\ &= -\frac{3}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^2 \\ &= -\frac{1}{2}(3e^4 + e^2) \end{aligned}$$

D'où $J = \int_{e^2}^e (2x+1)\ln(x)dx = -\frac{1}{2}(3e^4 + e^2)$

2. En utilisant la formule de l'intégration par parties, calculons l'intégrale : $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos(2x) dx$

Posons : $\begin{cases} u'(x) = \cos(2x) \\ v(x) = x \end{cases}$ alors

$$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

Les deux fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{4}]$, et leurs dérivées u' et v' sont continues sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{4}]$.

Il s'ensuit donc que $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos(2x) dx$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{2}x \sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin(2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x \sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \times 0 \times \sin(2 \times 0) - \\ &\quad \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{2} \cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{8} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2} \cos\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \cos(2 \times 0)\right) \\ &= \frac{\pi}{8} \times 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos(0)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 \right) \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{8} (\pi - 2)
\end{aligned}$$

$$D'où K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos(2x) dx = \frac{1}{8} (\pi - 2)$$

d. Exercice d'application.

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties : $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$, $J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \cos x dx$,

$$K = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} e^x \cos x dx, L = \int_1^e \ln(x-1) dx, M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx, N = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$$

VI. Application du calcul intégral.

1. Calcul des aires.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

On appelle unité d'aire, notée **u. a** l'aire du rectangle $OIKJ$ où I, J et K sont les points définis par : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{i} + \vec{j}$.

L'unité d'aire donc est : **u. a** = $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

a. Propriété.

Soient f une fonction continue sur un segment $[a; b]$ ($a < b$) et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal. L'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe représentative (C_f) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à : $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| dx$ en unité d'aire **u. a**.

b. Remarques.

- ✓ Dans le cas où la fonction f est positive sur l'intervalle $[a; b]$, alors $\mathcal{A}_1 = \int_a^b f(x) dx$ en unité d'aire **u. a** (figure 1).
- ✓ Dans le cas où la fonction f est négative sur l'intervalle $[a; b]$, alors $\mathcal{A}_2 = - \int_a^b f(x) dx$ en unité d'aire **u. a** (figure 2).
- ✓ Le nombre réel positif $\int_a^b |f(x)| dx$ est appelé l'aire géométrique.
- ✓ Le nombre réel $\int_a^b f(x) dx$ est appelé l'aire algébrique.

figure 1

$$\mathcal{A}_1 = \int_a^b f(x) dx \text{ en unité d'aire u. a}$$

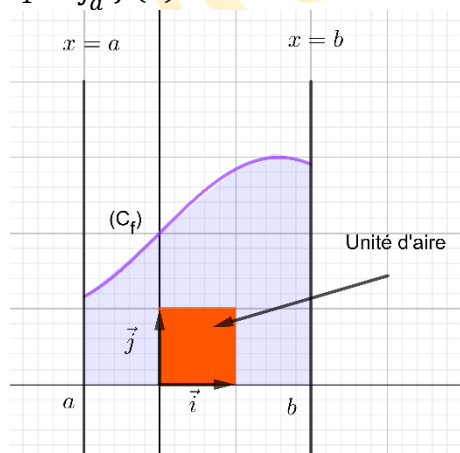
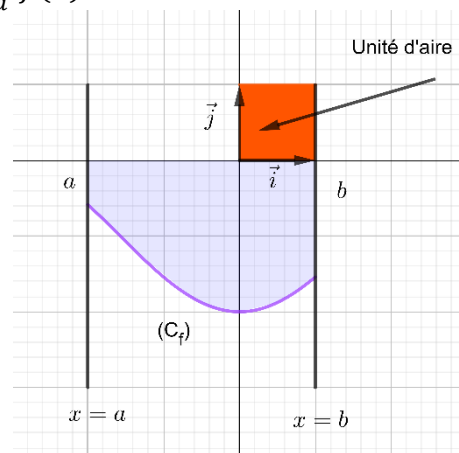


figure 2

$$\mathcal{A}_2 = - \int_a^b f(x) dx \text{ en unité d'aire u. a}$$



c. Exemples.

1. Soient f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x)$, et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$.

Calculons l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe représentative (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

On a : $\mathcal{A} = \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f(x)| dx \right) u.a$ où $u.a$ est l'unité d'aire.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f(x)| dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(x)| dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx, \end{aligned}$$

Car $\cos(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

On a : la fonction f est continue sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction $x \rightarrow \sin(x)$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} \text{Par suite } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx &= [\sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

2. Soient f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - 1$, et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$.

Calculons l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe représentative (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$ et $x = 0$.

On a : $\mathcal{A} = \left(\int_{\ln(\frac{1}{4})}^0 |f(x)| dx \right) u.a$ où $u.a$ est l'unité d'aire.

$$\text{On a : } \int_{\ln(\frac{1}{4})}^0 |f(x)| dx = \int_{\ln(\frac{1}{4})}^0 |e^x - 1| dx$$

Etudions le signe de $e^x - 1$ sur l'intervalle $\left[\ln\left(\frac{1}{4}\right); 0\right]$.

Soit $x \in \left[\ln\left(\frac{1}{4}\right); 0\right]$, donc

$\ln\left(\frac{1}{4}\right) \leq x \leq 0 \Rightarrow e^{\ln(\frac{1}{4})} \leq e^x \leq e^0$ (*) (la fonction $x \rightarrow e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

$$(*) \Rightarrow \frac{1}{4} \leq e^x \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} - 1 \leq e^x - 1 \leq 1 - 1$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4} \leq e^x - 1 \leq 0$$

D'où $(\forall x \in \left[\ln\left(\frac{1}{4}\right); 0\right]) : e^x - 1 \leq 0$

$$= 1 - (-1)$$

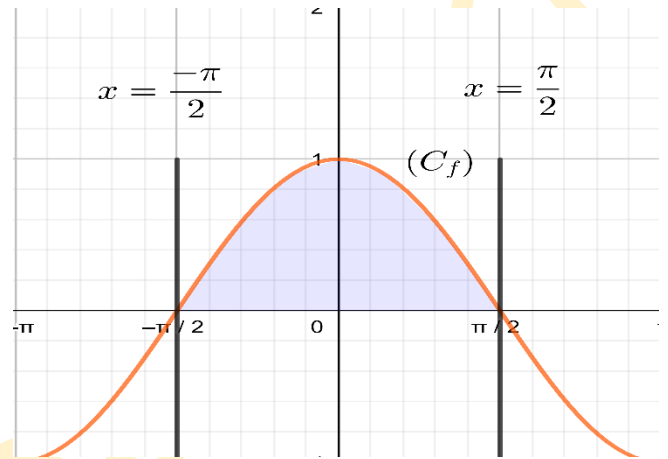
$$= 2$$

$$\text{D'où } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 2$$

Il s'ensuit donc que $\mathcal{A} = 2u.a$

$$\mathcal{A} = 2\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

$$\text{Par suite } \mathcal{A} = 8\text{cm}^2$$



Il s'ensuit donc que

$$\begin{aligned} \int_{\ln(\frac{1}{4})}^0 |e^x - 1| dx &= \int_{\ln(\frac{1}{4})}^0 -(e^x - 1) dx \\ &= \int_0^{\ln(\frac{1}{4})} (e^x - 1) dx \end{aligned}$$

$$\left(\int_a^b g(x) dx = - \int_b^a g(x) dx \right)$$

On a : la fonction f est continue sur l'intervalle $\left[\ln\left(\frac{1}{4}\right); 0\right]$.

La fonction $x \rightarrow e^x - x$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $\left[\ln\left(\frac{1}{4}\right); 0\right]$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \int_0^{\ln(\frac{1}{4})} (e^x - 1) dx &= [e^x - x]_0^{\ln(\frac{1}{4})} \\ &= e^{\ln(\frac{1}{4})} - \ln\left(\frac{1}{4}\right) - (e^0 - 0) \\ &= \frac{1}{4} + \ln(4) - 1 \\ &= \ln(4) - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \int_{\ln(\frac{1}{4})}^0 |e^x - 1| dx = \ln(4) - \frac{3}{4}$$

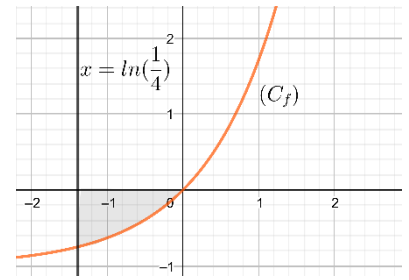
Il s'ensuit donc que $\mathcal{A} = \left(\ln(4) - \frac{3}{4}\right) u.a$

$$\text{Donc } \mathcal{A} = \left(\ln(4) - \frac{3}{4}\right) \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

Par suite $\mathcal{A} = \left(\ln(4) - \frac{3}{4}\right) \text{cm}^2$ (Voir la figure)

d. Exercice d'application.

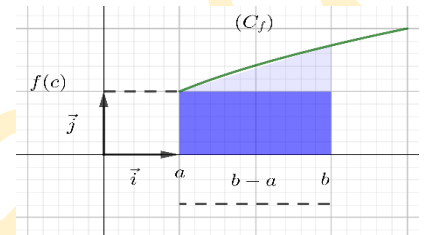
1. Calculer en cm^2 , $\mathcal{A}$ l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C_f) de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations : $x = 0$ et $x = 2$ où $f(x) = x^3 - 1$,
 $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = \sqrt{2}\text{cm}$.



2. Calculer en cm^2 , $\mathcal{A}$ l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C_f) de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations : $x = 0$ et $x = 4$ où $f(x) = x - 2\sqrt{x}$.

e. Remarque.

Interprétation géométrique du théorème de la moyenne : l'air algébrique sous la courbe représentative (C_f) de la fonction f est égale à celle d'un rectangle de dimensions $b - a$ et $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

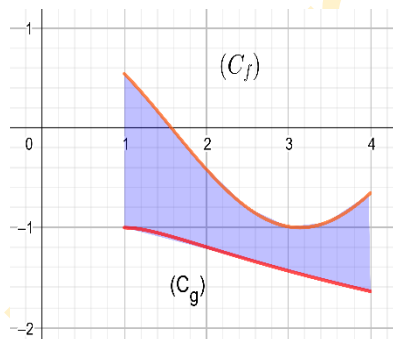


f. Propriété.

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a; b]$ ($a < b$) et soient (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal. L'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe représentative (C_f) , la courbe représentative (C_g) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à : $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ en unité d'aire $u. a$

g. Exemple.

La figure suivante représente les courbes représentatives (C_f) et (C_g) de deux fonctions f et g continues sur l'intervalle $[1; 4]$.



La courbe représentative (C_f) se trouve au-dessus de la courbe représentative (C_g) sur l'intervalle $[1; 4]$, alors

$$(\forall x \in [1; 4]) : f(x) > g(x)$$

Par suite l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe représentative (C_f) , la courbe représentative (C_g) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$ est égale à :

$$\mathcal{A} = \int_1^4 |f(x) - g(x)| dx \text{ en unité d'aire } u. a$$

C'est-à-dire $\mathcal{A} = \int_1^4 (f(x) - g(x)) dx$ en unité d'aire $u. a$

h. Exercice d'application.

1. Soient f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln(x)$, et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$.

1. Montrer que $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{(\ln(2))^2}{2}$.

2. Montrer que la fonction H définie par : $H: x \rightarrow 2 \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction h définie par : $h(x) = \frac{2}{x} - 1$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

3. A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $\int_1^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln(x) dx = (1 - \ln(2))^2$.

4. Calculer en cm^2 , $\mathcal{A}$ l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C_f) de la fonction f , la droite (D) d'équation cartésienne $y = x$ et les deux droites d'équations cartésiennes : $x = 1$ et $x = 2$

II. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - e^{-x}$ et $g(x) = -e^{-x}$, et (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 3\text{cm}$. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe représentative (C_f) , la courbe représentative (C_g) et les droites d'équations catésiennes : $x = \ln(4)$ et $x = \ln(6)$.

2. Calcul des volumes.

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

L'unité de volume est : $u.v = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$.

a. Propriété.

Soient (S) un solide délimité par les deux plans (P_1) et (P_2) parallèles au plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$, d'équations respectives $z = a$ et $z = b$ avec $a < b$, et soit $S(t)$ l'aire de l'intersection du solide (S) et le plan d'équation $z = t$ avec $a \leq t \leq b$.

Si la fonction définie par : $t \rightarrow S(t)$ est continue sur l'intervalle $[a; b]$, alors le volume V du solide (S) est : égale à : $V = \int_a^b S(t) dx$ en unité de volume $u.v$.

b. Propriété.

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$ et (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe représentative (C_f) autour de l'axe des abscisses un tour complet est donné par la formule : $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ en unité de volume $u.v$.

c. Exemple.

Soient f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 2\sqrt{x}e^{x^2}$, et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ avec $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$.

Calculons le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe représentative (C_f) autour de l'axe des abscisses un tour complet sur l'intervalle $[0; 1]$.

On a : $V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx$ $u.v$ où $u.v$ est l'unité de volume.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \int_a^1 (f(x))^2 dx &= \int_a^1 (2\sqrt{x}e^{x^2})^2 dx \\ &= \int_a^1 4xe^{2x^2} dx \end{aligned}$$

On a : la fonction définie par : $x \rightarrow 4xe^{2x^2}$ est continue sur l'intervalle $[0; 1]$ (en tant que produit de deux fonctions continues).

La fonction définie par : $x \rightarrow e^{2x^2}$ est une primitive de la fonction $x \rightarrow 4xe^{2x^2}$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

$$\begin{aligned} \text{Par suite } \int_a^1 4xe^{2x^2} dx &= [e^{2x^2}]_0^1 \\ &= e^{2.1^2} - e^{2.0^2} \\ &= e^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \int_a^1 4xe^{2x^2} dx = e^2 - 1$$

$$\text{Par conséquent } V = \pi(e^2 - 1)u.v$$

$$\text{C'est-à-dire } V = \pi(e^2 - 1)\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$$

$$\text{Ou encore } V = \pi(e^2 - 1)\text{cm}^3.$$

d. Exercice d'application.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ($\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$).

Dans chacun des cas suivants, calculer en cm^3 , V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f autour de l'axe des abscisses un tour complet sur le segment I où

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \text{ et } I = [1, e], f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+1}} \text{ et } I = [0, \sqrt[3]{2}], f(x) = \sqrt{\sin x} \cos x \text{ et } I = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$$